Λύση της 10. Γράφουμε τις εξισώσεις C-R για την f

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Η πρώτη από αυτές (και επειδή η u είναι συνάρτηση μόνο του x και η v του y) μας δίνει ότι

$$u'(x) = v'(y) \quad , \quad \forall\, x+iy \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Έπεται ιδιαίτερα από την (1) ότι

αν $z = x \in \mathbb{R}$ τότε $u'(x) = v'(0)$ (2)

και αν $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ τότε $v'(y) = u'(0) = v'(0)$ (3)

Θέτουμε $\alpha = u'(0) = v'(0)$ και από τις (2) και (3) συνάγουμε ότι $u(x) = \alpha x + b,\ x \in \mathbb{R}$ και $v(y) = \alpha y + d,\ y \in \mathbb{R}$ για κάποιες πραγματικές σταθερές b, d.

Κατά συνέπεια

$$f(x+iy) = u(x) + iv(y) = \alpha x + b + i(\alpha y + d) = \alpha(x+iy) + b + id$$
$$= \alpha z + b + id \ , \quad z = x+iy.$$

Έτσι η f είναι μιγ. πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Λύση της 12. Θέτουμε $u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ και $v_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Επειδή η u είναι αρμονική είναι διαφορίσιμη της κλάσης C^∞ στο ανοιχτό D και συνεπώς και οι u_1, v_1 είναι C^∞-διαφορίσιμες στο D.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ και $\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Επειδή η u αρμονική έπεται ότι $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$.

Επίσης έχουμε $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ και $\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Επειδή η u είναι της κλάσης C^∞ ($\geq C^2$) έπεται ότι

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

Έτσι οι εξισώσεις C-R ισχύουν για την f στο D και επειδή οι u_1 και v_1 είναι της κλάσης C^∞ (≥ 1) στο D έχουμε το συμπέρασμα.