Ασκήσεις: Εξισώσεις Cauchy-Riemann και αρμονικές συναρτήσεις

1) Υπολογίστε την μιγαδική παράγωγο της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ με δύο τρόπους:

α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου.

β) Με την βοήθεια (αφού τις αποδείξετε) των εξισώσεων Cauchy-Riemann.

2) Αποδείξτε ότι η $f(z) = |z|$ είναι παντού συνεχής αλλά δεν έχει πουθενά μιγαδική παράγωγο. Επίσης αποδείξτε ότι η $g(z) = |z|^2$ έχει μιγαδική παράγωγο μόνο στο 0.

3) Σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις, βρείτε για την f που είναι ορισμένη στον τόπο D τις u και v όπου $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy$ και u, v, x, y πραγματικές ποσότητες:

α) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

β) $f(z) = |z|$, $D = \mathbb{C}$

γ) $f(z) = \bar{z}$

δ) $f(z) = z^4$, $D = \mathbb{C}$.

Αποδείξτε ότι οι u και v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann παντού στις περιπτώσεις (α) και (δ) και πουθενά στις περιπτώσεις (β) και (γ).

4) Αποδείξτε τις εξισώσεις Cauchy-Rieman για τις συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ που είναι ορισμένες στον τόπο D:

α) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$, $D = \mathbb{R}^2$

β) $u(x,y) = \sin x \cosh y$, $v(x,y) = \cos x \sinh y$, $D = \mathbb{R}^2$

γ) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

δ) $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, $v(x,y) = \arcsin \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, $D = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

Σε κάθε περίπτωση, εξακριβώστε ότι οι u και v είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος ολόμορφης συνάρτησης.