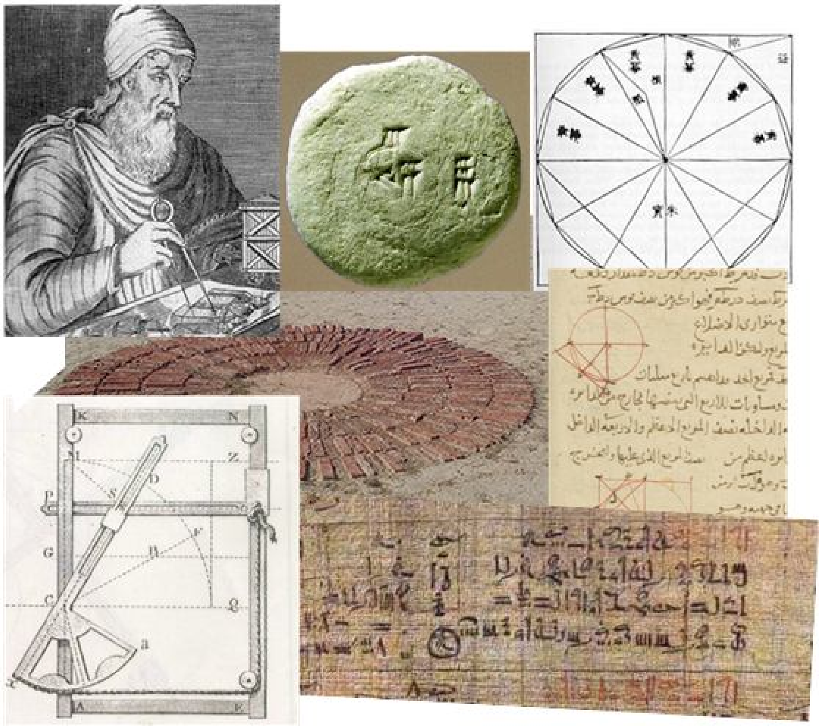
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμημα Μαθηματικων
Τμημα Μεθοδολογιας, Ιστοριας και Θεωριας Της Επιστημης
Τμημα Φιλοσοφιας – Παιδαγωγικης & Ψυχολογιας

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης
Τμημα Επιστημων Αγωγης

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
ο “ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ
ΜΙΑ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΣΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΒΑΡΒΕΡΗ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Επιβλέπων καθηγητής
Ευστάθιος Γιαννακούλιας

ΑΘΗΝΑ, 2009

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ………..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……………………….…………….. (επιβλέπων Καθηγητής)	………..……..	………………
2)………………………………………	…..……………..	..……………..
3)………………………………………	………..…….	………..…….

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας αυτής, κο Γιαννακούλια, για την ανάθεση του ενδιαφέροντος αυτού θέματος και την βοήθειά του, τον κο Λάππα για την πολύτιμη καθοδήγηση του και τις συμβουλές του, που κατέστησαν δυνατή την εκπόνηση αυτής της εργασίας καθώς και τον καθηγητή κο Σταύρο Γιωτόπουλο για τις συμβουλές και την ευγενή του διάθεση να συμμετέχει στην Εξεταστική Επιτροπή.

Επίσης θερμές ευχαριστίες και υποχρέωση εκφράζω στον καθηγητή μου κο Στυλιανό Νεγρεπόντη, που με έφερε σε επαφή με το έργο του Ευκλείδη και την πλατωνική φιλοσοφία, αλλά και στον αγαπητό καθηγητή μου κο Μιχαήλ Λάμπρου, που μου γνώρισε το έργο του Αρχιμήδη και μου εμφύσησε το ενδιαφέρον στην ιστορία των μαθηματικών.

Στην μνήμη

της γιαγιάς μου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από τις πρώτες καταγραφές ανθρώπινων πολιτισμών το κυκλικό σχήμα, φαίνεται να συνδέεται με τις πλέον σημαντικές πνευματικές αναζητήσεις του ανθρώπου. Η μελέτη του σχήματος αυτού από τον άνθρωπο ανάγεται πριν την καταγεγραμμένη ιστορία. Η ανακάλυψη του τροχού, που αποτελεί το σημαντικότερο εργαλείο για την περαιτέρω εξέλιξη της ανθρώπινης δραστηριότητας, αποτελεί από μόνη της μία θεμελιώδη ανακάλυψη των ιδιοτήτων του κύκλου.

Τόσο σε απλές μετρήσεις της γης, όσο και στις παρατηρήσεις του ουράνιου θόλου, το σχήμα του κύκλου γίνεται αντικείμενο μελέτης και σύγκρισης. Μίας μελέτης που δεν άφησε τον άνθρωπο ποτέ ικανοποιημένο. Ερωτήματα διαφορετικής φύσεως και στο διαφορετικό πλαίσιο κάθε πολιτισμού, διατυπώθηκαν και επαναδιατυπώθηκαν, επιδέχτηκαν απαντήσεις που αναθεωρήθηκαν, αλληλοσυμπληρώθηκαν και φτάνουν μέχρι τις ημέρες μας.

Στην εργασία αυτή θα ήταν πολύ φιλόδοξο να προσπαθήσουμε να χαρτογραφήσουμε μία πορεία 4.000 και πλέον ετών. Αυτό που θα προσπαθήσουμε να αποδώσουμε είναι μία εικόνα των πρώιμων αναζητήσεων, όπως αυτές καταγράφονται σε κείμενα που σώθηκαν από διάφορες περιόδους και διαφορετικούς πολιτισμούς μέχρι και τα τέλη του 14^{ου} αιώνα.

Η διαδρομή αυτή για μας σταματάει πριν την ανακάλυψη της μαθηματικής ανάλυσης και την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Ο αριθμός που εμπλέκεται στην μέτρησης του κύκλου, ο γνωστός σε μας πραγματικός αριθμός π, δεν είχε μέχρι την εποχή που εξετάζουμε σχεδόν κανένα γνώρισμα από αυτά που έχει για τους σύγχρονους μαθηματικούς. Τα ίδια τα μαθηματικά δεν είχαν στο σύνολό τους τον διεθνή χαρακτήρα που έχουν σήμερα. Το αποφασιστικό βήμα ωστόσο προς αυτήν την κατεύθυνση μίας γενικώς αποδεκτής αλήθειας, αλλά και του ίδιου του ορισμού της επιστήμης των μαθηματικών, έλαβε χώρα στο μεσοδιάστημα της περιόδου που εξετάζουμε και είναι γενικώς αποδεκτό ότι συνδέεται άρρηκτα με την αρχαία ελληνική φιλοσοφία.

Εμείς θα εξετάσουμε την μέτρηση του κύκλου όπως μπορούμε να γνωρίζουμε ότι έλαβε χώρα στα πρώιμα μαθηματικά διαφόρων πολιτισμών **μέσα από καθαρά γεωμετρικό πρίσμα**. Δηλαδή δεν θα εμπλέξουμε την παράλληλη ανάπτυξη της τριγωνομετρίας που αν και σε ορισμένες περιπτώσεις οδήγησε σε σημαντικές ανακαλύψεις σχετικά με τον κύκλο, άνθησε στην δύση από τον 16^{o} αιώνα και μετά οδηγώντας σε αναλυτικές εκφράσεις του αριθμού π.

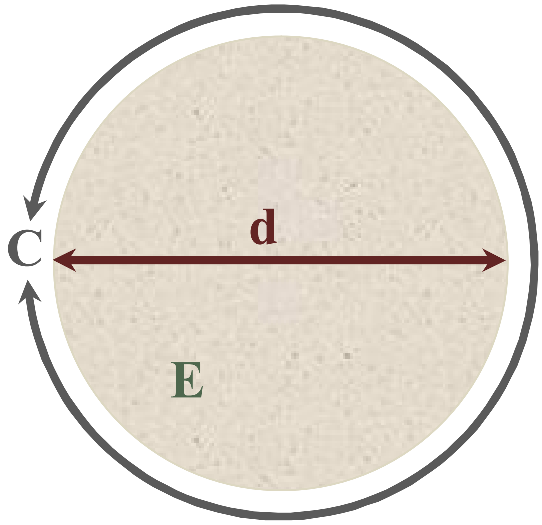
Είναι λοιπόν κατανοητό ότι η εργασία μας δεν εστιάζει στον αριθμό π, αλλά στην μέτρηση του κύκλου με την γενικότερη γεωμετρική έννοια. Ο αριθμός π ωστόσο, αποτελεί το βασικότερο στοιχείο για την μετάφραση οποιασδήποτε γνώσης για την μέτρηση του κύκλου στη σύγχρονη γλώσσα των μαθηματικών και οι συνεχείς αναφορές σ' αυτόν είναι αναγκαίες και θα γίνονται με ιδιαίτερη προσοχή. Θα τον συναντήσουμε ως κλάσμα μίας ποσότητας, ως γεωμετρική σταθερά, ως λόγο μεγεθών και θα δούμε πως επιδιώχθηκαν καλύτερες προσεγγίσεις της τιμής του.

Στα κεφάλαια 2 και 3, που αποτελούν το πρώτο μέρος αυτής της εργασίας, αναφερόμαστε στους κανόνες υπολογισμού «γενικής ισχύος» που διατυπώθηκαν κατά καιρούς και στις γεωμετρικές κατασκευές αναφορικά με τον κύκλο, έξω από το αποδεικτικό πλαίσιο που θεμελιώθηκε στην αρχαία Ελλάδα. Στο δεύτερο μέρος που αποτελείται από τα κεφάλαια 4 και 5 γίνεται αναφορά στον ελλαδικό χώρο πριν και μετά την θεμελίωση του αξιωματικού συστήματος, στην ενασχόληση με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, που έχει ήδη απασχολήσει την γεωμετρία άλλων πολιτισμών αλλά αδυνατεί να ενταχθεί στο θεωρητικό πλαίσιο της ευκλείδειας γεωμετρίας, στο έργο του Ευδόξου, του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη. Το έργο αυτό φαίνεται ότι θα αποτελέσει, μετά από μία σχετική παύση, τον οδηγό των περεταίρω εξελίξεων. Προσπαθώντας να διατηρήσουμε μία στοιχειώδη χρονική ακολουθία, στα επόμενα δύο κεφάλαια, 6 και 7, παρακολουθούμε την μέτρηση του κύκλου όπως αυτή καταγράφεται σε ορισμένα από τα σημαντικότερα έργα της Ινδίας και της Κίνας αντίστοιχα. Το νήμα όλων των προηγουμένων θα δούμε να πιάνει στο κεφάλαιο 8 ο ισλαμικός χώρος, που αξιοποιεί, αναπτύσσει και μεταδίδει το έργο του Αρχιμήδη, εφοδιασμένο με πιο δυνατά υπολογιστικά εργαλεία από την ανατολική παράδοση, στον δυτικό πολιτισμό. Κλείνουμε παρακολουθώντας την διαδρομή των έργων του Αρχιμήδη μέσω των μεταφράσεων και σχολιασμών της πραγματείας «Κύκλου Μέτρησις» στους μεσαιωνικούς χρόνους καθώς και της επιρροής που αυτή είχε στην μετέπειτα μαθηματική ανάπτυξη του δυτικού πολιτισμού.

Σημαντικό τμήμα της εργασίας αυτής περιλαμβάνει μεταφράσεις αρχαίων κειμένων και στοιχεία από την έρευνα της ιστορίας των μαθηματικών της σύγχρονης αλλά και προγενέστερων περιόδων. Το θέμα που πραγματευόμαστε και η περίοδος που εξετάζουμε παρουσιάζει μία ανομοιογένεια που σε μεταγνωστικό επίπεδο εκτιμούμε ότι είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική. Μία συλλογή ιδεών που αν και διαφέρουν σε πολλά σημεία, φαίνεται να συνδέονται σε μία πορεία παράλληλη με αυτή της ιστορίας των μαθηματικών.

2. Αρχαιες Υπολογιστικες Μεθοδοι για τα Στοιχεια του κυκλου

Σε ένα πρώτο επίπεδο της μέτρησης του κύκλου οι άνθρωποι αναζητούσαν όπως ακριβώς συμβαίνει και στα δικά μας πρώτα στάδια της εκπαίδευσης, τρόπους, μεθόδους σύμφωνα με τις οποίες θα ήταν δυνατόν να υπολογίσουν τα επιμέρους στοιχεία του, όταν ήταν δεδομένα κάποια άλλα. Να μετρήσουν για παράδειγμα την περιφέρεια όταν δίνεται η διάμετρος, το εμβαδόν όταν δίνεται η περιφέρεια κτλ.



Στους αρχαιότερους πολιτισμούς, αυτούς της Μεσοποταμίας, της Αιγύπτου και της Κίνας, μέσα από τα κείμενα που σώθηκαν και ανεξάρτητα από τις επιρροές που δέχτηκαν οι πολιτισμοί μεταξύ τους, συναντάμε συλλογές προβλημάτων μεταξύ των οποίων και γεωμετρικά προβλήματα, που εξυπηρετούσαν διδακτικούς σκοπούς και συνοδεύονται από λύσεις στις οποίες παρουσιάζονται κυρίως οι μέθοδοι επίλυσης, χωρίς την δικαιολόγηση ή την επεξήγηση της προέλευσής τους.

Πριν λοιπόν εδραιωθεί η έννοια και η αναγκαιότητα της αποδείξεως, σχέσεις «γενικής ισχύος» διατυπώνονταν μέσω παραδειγμάτων, διδάσκονταν, βελτιώνονταν και περνούσαν από περιόδους και περιοχές σε νέες, λύνοντας προβλήματα πρακτικά και βάζοντας τα πρώτα θεμέλια σε αυτό που αργότερα εξελίχθηκε σε επιστήμη.

Στις παραγράφους αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους υπολογισμού που προηγούνται της αποδεικτικής διαδικασίας, είτε αυτές συναντώνται σε πολιτισμούς, προγενέστερους του ελληνικού, είτε πρόκειται για σύγχρονες ή και μεταγενέστερες περιπτώσεις στις οποίες δεν φαίνεται να έχει επιδράσει ακόμα[1]. Θα παρουσιάσουμε τα αντίστοιχα κείμενα που σώζονται από τον εκάστοτε πολιτισμό και θα αναφέρουμε συνοπτικά κάποια επιπλέον ιστορικά στοιχεία που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε το εκάστοτε διαφορετικό πλαίσιο. Τέλος θα αναφερθούμε σε μερικές από τις ερμηνείες που έχει δώσει η ιστορία των μαθηματικών μέχρι σήμερα στα ευρήματα αυτά.

Προκειμένου να αποφευχθούν γενικεύσεις που έχουν γίνει κατά καιρούς στο παρελθόν κατά την ερμηνεία με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό θα χρειαστεί να κάνουμε μία διευκρίνιση πριν προχωρήσουμε:

Οι σύγχρονοι τύποι για την μέτρηση των στοιχείων του κύκλου:

$$\mathbf{C = 2\pi\, r} \text{ ή αλλιώς } \mathbf{C = \pi\, d} \quad \text{και} \quad \mathbf{E = \pi\, r^2} \text{ ή αλλιώς } \mathbf{E = \frac{\pi}{4}\, d^2}$$

συμπεριλαμβάνουν ως δεδομένη γνώση ότι ο λόγος $\mathbf{\frac{C}{d}}$ συμβολίζεται με $\boldsymbol{\pi}$ και ότι ισχύει η σχέση $\mathbf{E = \frac{1}{2}\, C \cdot r}$, που συνδέει γενικά το εμβαδόν, την περίμετρο και την ακτίνα ενός κύκλου. Ωστόσο και οι δύο αυτές παράμετροι πρέπει να εξετάζονται προσεκτικά πριν σπεύσουμε να χρησιμοποιήσουμε τους σύγχρονους τύπους στην απόδοση ή στην ερμηνεία των αρχαίων πηγών. Η απόδοση μίας τιμής στο π για κάθε έναν από τους υπολογισμούς που συναντάμε, οδηγεί σε παρεξηγήσεις και ελλιπή κατανόηση των μαθηματικών της εκάστοτε περιόδου, αφού ο κάθε υπολογισμός γινόταν ανεξάρτητα και για το συγκεκριμένο μέγεθος στο οποίο αναφέρεται.

Σε όσα σημεία χρειαστεί θα χρησιμοποιήσουμε δύο ξεχωριστούς συμβολισμούς για το π, όταν αυτό σχετίζεται αποκλειστικά με την περιφέρεια ή με το εμβαδόν αντίστοιχα. Όπως λοιπόν έχει προταθεί ήδη από διάφορους μελετητές[2], ορίζουμε τους δύο διαφορετικούς αυτούς συμβολισμούς, ως σταθερές $\boldsymbol{\pi_1}$ και $\boldsymbol{\pi_2}$, μέσω των σχέσεων στις οποίες συμμετέχουν:

$$C = 2\boldsymbol{\pi_1} R \qquad \text{και} \qquad E = \boldsymbol{\pi_2} R^2$$

[1] Όπως συμβαίνει με την περίπτωση της Κίνας, που το παλαιότερο σωζόμενο κείμενα τοποθετείται στις αρχές του 2ου π.Χ. αι., η την περίπτωση του πάπυρου του Καΐρου στην Αίγυπτο των Ελληνιστικών και Ρωμαϊκών χρόνων, που θα συναντήσουμε στις παραγράφους 2.3 και 2.4 αντίστοιχα.

[2] Juschkewitsch, Smeur, Seidenberg

2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΑΙΓΥΠΤΟΥ

Ο Αιγυπτιακός πολιτισμός είναι ο πρώτος αρχαίος πολιτισμός που αποτέλεσε αντικείμενο της ιστορίας των μαθηματικών από την Δύση, ως προγενέστερος του Ελληνικού, από τα τέλη ήδη του 19^{ου} μ.Χ. Τα παλαιότερα από τα ελάχιστα αλλά περιεκτικά ευρήματα που σώζονται και από τα οποία παίρνουμε μία εικόνα για τις γνώσεις των αρχαίων Αιγυπτίων στους υπολογισμούς, ανάγονται στην περίοδο του Μέσου Βασιλείου (2025-1773 π.Χ). Ωστόσο ο πολιτισμός αυτός γνωρίζουμε ότι άκμαζε τουλάχιστον από το 3000 π.Χ. Ενδεικτικά να αναφέρουμε ότι τα πρώτα δείγματα ιερογλυφικής γραφής στην Αίγυπτο χρονολογούνται από πρόσφατες έρευνες στις αρχές τις τρίτης χιλιετίας ενώ τα μνημειώδη έργα με τα οποία οι περισσότεροι έχουμε συνδέσει τον αρχαίο αιγυπτιακό πολιτισμό, δηλαδή οι μεγάλες πυραμίδες στην νεκρόπολη της Γκίζας, δημιουργήθηκαν την περίοδο του Παλαιού Βασιλείου (2686-2160 π.Χ.) Η περιοχή στην οποία αναφερόμαστε είναι κυρίως οι όχθες του ποταμού Νείλου, στο βορειοδυτικό τμήμα της Αφρικής, ενώ ανά περιόδους η επικράτεια εκτεινόταν από την Φοινίκη, στα δυτικά παράλια της μεσογείου, μέχρι και νοτιότερα της αρχαίας Νουβίας στο σύγχρονο βόρειο Σουδάν.

Γνωστές πόλεις τις αρχαίας Αιγύπτου
(όχι όλες από την ίδια χρονική περίοδο)

Εμείς θα περιοριστούμε σε εκείνη την περίοδο του αιγυπτιακού πολιτισμού από την οποία προέρχονται και οι σωζόμενες πηγές, οι οποίες στην πλειοψηφία τους αποτελούν **μαθηματικά εγχειρίδια** για σχολές γραφέων της περιόδου του Μέσου Βασιλείου (2025-1773 π.Χ.). Ας αναφέρουμε σύντομα τα κείμενα που σώζονται με τα ονόματα που συνήθως τους αποδίδονται:

- **Πάπυρος Rhind**, μια συλλογή 84 προβλημάτων που αντιγράφτηκε περίπου το 1650 π.Χ. από ένα πρωτότυπο του 1850 π.Χ. και φέρει το όνομα του πρώτου κατόχου της, ενώ σήμερα βρίσκεται στο Βρετανικό μουσείο (BM10057-8)
- Ο **δερμάτινος κύλινδρος**, που γράφτηκε γύρω στο 1650 π.Χ. και περιέχει 26 αθροίσματα μοναδιαίων κλασμάτων και το όνομά του περιγράφει το υλικό με το οποίο είχε κατασκευαστεί. Βρίσκεται και αυτός στο Βρετανικό μουσείο (BM10250)
- **Πάπυρος της Μόσχας**, γράφτηκε γύρω στο 1850 π.Χ. Είναι μια συλλογή 25 προβλημάτων και φέρει το όνομα της περιοχής στην οποία βρίσκεται πλέον (ή το όνομα του πρώτου κατόχου της **πάπυρος Golenischev**)
- **Παπύρου Lahun**, χρονολογείται γύρω στα 1800 π.Χ. και το όνομά του προέρχεται από το σύγχρονο όνομα της περιοχής στην οποία βρέθηκε. Συγκεκριμένα σώζονται μερικά μόνο αποσπάσματα με μαθηματικό περιεχόμενο. (UC 32118B, 32134A-B, 32159-62)
- **Πάπυρος του Βερολίνου**, φέρει το όνομα της περιοχής στην οποία βρίσκεται σήμερα. Είναι του 1850 π.Χ. περίπου και περιέχει μαθηματικά προβλήματα από την μία του πλευρά, ενώ από την άλλη είναι καταγεγραμμένος ένας κώδικας νόμων της ίδιας περιόδου (Κώδικας της Ερμούπολης). (pBerlin 6619)
- **Ξύλινη πινακίδα του Akhmim (ή του Καΐρου)**

Από τις παραπάνω πηγές θα κάνουμε αναφορά σε εκείνα τα γεωμετρικά προβλήματα που σχετίζονται με την μέτρηση του κύκλου και ειδικότερα στον τρόπο με τον οποίο υπολογιζόταν το εμβαδό του κύκλου όταν είναι γνωστή η διάμετρός του (Πάπυρος Rhind, πάπυρος Lahun) καθώς και σε ένα πρόβλημα από τον πάπυρο της Μόσχας που δεν έχει κοινώς αποδεκτή ερμηνεία αλλά φαίνεται να σχετίζεται με τους υπολογισμούς που μας αφορούν.

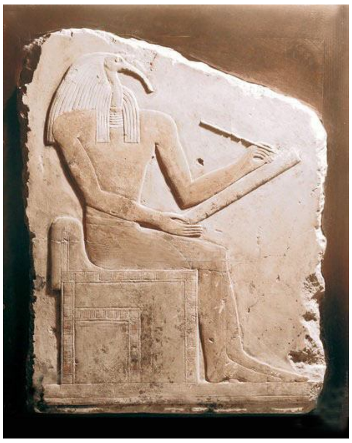
Ωστόσο, όπως ήδη αναφέραμε τα προβλήματα αυτά αποτελούν τμήμα διδακτικών εγχειριδίων για αυτούς που έμελε να γνωρίζουν τέτοιου είδους μαθηματικούς υπολογισμούς. Οι Αιγύπτιοι αυτοί ήταν οι ίδιοι που γνώριζαν την τέχνη της γραφής γενικότερα και ο ρόλος τους στην διαχείριση, την οργάνωση αλλά και την γενικότερη ανάπτυξη αυτού του πολιτισμού ήταν θεμελιώδης. Σ’ αυτούς, τους οποίους αποκαλούμε **γραφείς** και στην εκπαίδευσή τους, θα αναφερθούμε σύντομα, στην επόμενη παράγραφο.

Τέλος να σημειώσουμε εδώ ότι στον αρχαίο Αιγυπτιακό πολιτισμό θα γίνει αναφορά και στο δεύτερο κεφάλαιο που πραγματεύεται τις γεωμετρικές κατασκευές που σχετίζονται με τον κύκλο, όπου και θα γίνει μνεία στους λεγόμενους «**αρπεδονάπτες**» καθώς και στις ανάλογες αναφορές των αρχαίων Ελλήνων στην «γεωμετρία» και την καταγωγή της.

ΑΡΧΑΙΟΙ ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ ΓΡΑΦΕΙΣ

Με την εισαγωγή της γραφής στην Αίγυπτο την περίοδο του Παλαιού βασιλείου, περίπου το 3000 π.Χ. δημιουργήθηκε η τάξη των Γραφέων. Ο **Γραφείς** ήταν εγγράμματοι υπάλληλοι του Βασιλιά, ικανοί να συντάξουν έγγραφα και επωμίζονταν όλα τα καθήκοντα μιας δημόσιας υπηρεσίας: τήρηση αρχείων, φορολογική λογιστική, διαχείριση των δημόσιων έργων, ακόμη και εμπλοκή σε πολεμικές δραστηριότητες μέσω της επιτήρησης των στρατιωτικών προμηθειών και των μισθοδοτικών καταστάσεων. Θεωρούνταν βασιλικοί ακόλουθοι και δεν υποχρεώνονταν να κατατάσσονται στον στρατό ή να πληρώνουν φόρους.

Καθισμένος γραφέας
από την αρχαία πόλη Σακάρα (~2000 π.Χ.)



Οι γραφείς γνωρίζουμε ότι λάτρευαν ως προστάτη τους την αιγυπτιακή θεότητα Θωθ ο οποίος περιγράφεται ως ο γραφέας των θεών και απεικονίζεται ως άνδρας με κεφάλι θρεσκιόρνιθου. Ο ίδιος θεός λατρεύτηκε και από τους Έλληνες της Αιγύπτου που τον ταύτισαν με τον ελληνικό θεό Ερμή και από αυτήν την σύνδεση προκύπτουν οι ονομασίες Ερμούπολη Μεγάλη και Ερμούπολη Μικρή για τις αντίστοιχες πόλεις.

Ο Πλάτων τον αναφέρει ως **«Θεῦθ»** και περιγράφει ότι σε αυτόν αποδίδονται μεταξύ άλλων, η ανακάλυψη της αριθμητικής, της γεωμετρίας, της αστρονομίας αλλά κυρίως της γραφής:

« αὐτῷ δὲ ὄνομα τῷ δαίμονι εἶναι Θεύθ.
τοῦτον δὴ πρῶτον ἀριθμόν τε καὶ λογισμὸν εὑρεῖν καὶ
γεωμετρίαν καὶ ἀστρονομίαν…»

Πλάτωνος, Φαίδρος, 174,b 7- d 1

Το επάγγελμα των γραφέων, ασκούταν αποκλειστικά από άνδρες και μεταφερόταν από γενιά σε γενιά. Τα παιδιά των γραφέων, ακολουθώντας την παράδοση του επαγγέλματος από την ηλικία των 9 και για τουλάχιστον για 5 χρόνια διδάσκονταν μεταξύ άλλων βασικές μαθηματικές γνώσεις, σε ειδικές σχολές για γραφείς, ακολουθώντας ιδιαίτερα αυστηρό πρόγραμμα.

Μετά την εκπαίδευσή τους αυτή κατείχαν υψηλή θέση στην κοινωνική ιεραρχία, κατέχοντας αξίωμα, θα λέγαμε, κατώτερο του κλήρου και ανώτερο του στρατού.

2.1.1 ΠΑΠΥΡΟΣ RHIND

Ο πάπυρος Rhind βρέθηκε τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, κατά την διάρκεια παράνομων εκσκαφών στην περιοχή της αρχαία πόλης Θήβες (σημερινό Λούξορ), όπου βρίσκεται ο νεκρικός ναός του Ραμσή ΙΙ και αποτελεί την πολυτιμότερη πηγή πληροφοριών που έχουμε για τα αιγυπτιακά μαθηματικά.

Στην συνέχεια αγοράστηκε σε μια αγορά του Λούξορ το 1858 από τον 25χρονο Alexander Henry Rhind, από την Σκωτία, ο οποίος πήγε στην Αίγυπτο για λόγους υγείας και ενδιαφέρθηκε για την συλλογή αρχαιοτήτων. Μετά από τον πρόωρο θάνατό του Rhind σε ηλικία 30 ετών, ο πάπυρος που φέρει πλέον το όνομά του, μαζί με τον δερμάτινο κύλινδρο που επίσης είχε στην κατοχή του, πήραν τον δρόμο τους για το βρετανικό μουσείο του Λονδίνο το 1864 όπου και παραμένουν από τότε.

Αναφέρεται συχνά ως μαθηματικός πάπυρος Rhind, ή RMP (Rhind Mathematical Papyrus), έχει διαστάσεις 33 × 565 cm και γράφτηκε γύρω στα 1600 π.Χ από τον γραφέα Ahmes που έζησε περίπου το 1650 π.Χ. Ο ίδιος ο Ahmes στην εισαγωγή του αναφέρει ότι το σύγγραμμα αυτό δεν είναι δικό του αλλά αντιγραφή από ένα πρωτότυπο που χρονολογείται από το Μέσο Βασίλειο (2000-1800 π.Χ.). Τα ιερογλυφικά στον πάπυρο αποκρυπτογραφήθηκαν στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, πριν την αποκρυπτογράφηση της σφηνοειδούς γραφής των Βαβυλωνιακών πινακίδων.

Ο πάπυρος Rhind είναι γραμμένος και στις δύο του πλευρές και περιλαμβάνει έναν πίνακα κλασμάτων της μορφής $\frac{2}{n}$ με n πρώτους αριθμούς, και 87 προβλήματα με την λύση τους.

Τα γεωμετρικά προβλήματα του κειμένου είναι προσανατολισμένα στις εφαρμογές. Πρόκειται για υπολογισμούς εμβαδών και όγκων οι λύσεις των οποίων σε ορισμένες περιπτώσεις είναι λανθασμένες, ενώ κάποιες που παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον.

Στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε στα 5 προβλήματα που έχουν ως αντικείμενο τον κύκλο και την μέτρησή του:

ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ

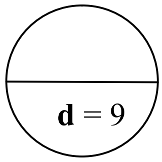
Στο 50^o πρόβλημα του πάπυρου Rhind, περιγράφεται η μέθοδος εύρεσης της επιφάνειας ενός κυκλικού χωρίου, ενώ ήδη έχουν προηγηθεί 3 προβλήματα (41^o , 42^o και 43^o) που χρησιμοποιούν την μέθοδο αυτή για τον υπολογισμό όγκου κυλίνδρων. Ας ξεκινήσουμε με το πρώτο:

<u>Πρόβλημα 50</u>:

Υπολογίζεται **εμβαδό κυκλικού οικοπέδου** με διάμετρο 9..

Ο υπολογισμός γίνεται ως εξής:

Πρώτα βρίσκεται το ένα ένατο του 9, που είναι 1.
Αυτό αφαιρείται από το 9 και γίνεται 8.
Και υπολογίζεται το γινόμενο του 8 επί 8.
Το 64 είναι το αποτέλεσμα.



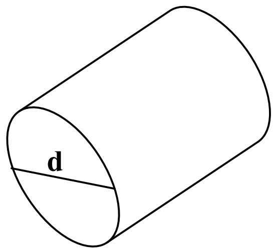
Μεταφράζοντας πιο ελεύθερα θα λέγαμε ότι για να βρούμε το εμβαδόν ενός κυκλικού χωρίου, αφαιρούμε από την διάμετρο το 1/9 αυτής, και στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον εαυτό του. Με σύγχρονο συμβολισμό όπου d η διάμετρος του κύκλου η γενική αυτή μέθοδος δίνει σε μορφή τύπου το εξής:

$$\boxed{\mathbf{E = (d - \frac{1}{9}d)^2}}$$

Ή αλλιώς: $$\boxed{\mathbf{E = (\frac{8}{9}d)^2}} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{E = \frac{64}{81}\, d^2}$$

Πριν περάσουμε στην περαιτέρω ανάλυση και στα ερωτήματα που δημιουργεί ο παραπάνω κανόνας, αναφέρουμε σύντομα το περιεχόμενο των τριών προβλημάτων που προηγούνται και κάνουν χρήση του παραπάνω κανόνα.

<u>Πρόβλημα 41</u>: Υπολογίζεται ο όγκος κυλίνδρου με διάμετρο 9 και εμβαδό βάσης, $\left(\frac{8}{9}\times 9\right)^2 = 64$, όπως στο Πρόβλημα 50.

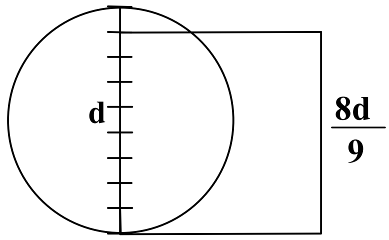


<u>Πρόβλημα 42</u>: Διαφέρει από το Πρόβλημα 41 μόνο στο ότι η διάμετρος είναι 10.

<u>Πρόβλημα 43</u>: Υπολογίζεται ο όγκος στερεού με κυκλική βάση (πιθανώς κυλίνδρου) αλλά με τρόπο τέτοιο ώστε να προκύψει το αποτέλεσμα σε άλλη μονάδα μέτρησης.

Όπως είδαμε από τους προηγούμενους υπολογισμούς για την εύρεση του εμβαδού ενός κύκλου έχουμε ένα άμεσο τετραγωνισμό, δηλαδή το αποτέλεσμα εκφράζεται ως τέλειο τετράγωνο και μπορούμε να πάρουμε την πλευρά ενός ισοδύναμου τετραγώνου. Συγκεκριμένα ένας κύκλος με διάμετρο d είναι ισοεμβαδικός με ένα τετράγωνο πλευράς $\frac{8d}{9}$.

Σχηματικά δηλαδή σε επίπεδο απλής εφαρμογής:



Ωστόσο μία τέτοια έννοια «τετραγωνισμού» δεν φαίνεται να αναφέρεται σε κάποια πηγή όπως σε αντίστοιχα μαθηματικά κείμενα του ινδικού πολιτισμού και αργότερα του ελληνικού. Για τον λόγο αυτό πρέπει να είμαστε προσεκτικοί σε γενικεύσεις του προηγούμενου τύπου και σχήματος.

Ο αιγυπτιακός υπολογισμός της κυκλικής επιφάνειας, από την άλλη πλευρά, ενώ περιλαμβάνει την έννοια μίας σταθεράς, (της $\frac{8}{9}$) δεν την χρησιμοποιεί άμεσα πολλαπλασιάζοντας την με το τετράγωνο της διαμέτρου και δεν μαθαίνεται εμφανώς, από τους γραφείς ως αναλογία, όπως θα δούμε στην συνέχεια ότι συμβαίνει στην αρχαία Μεσοποταμία όπου και καταρτίζονται πίνακες με γεωμετρικές σταθερές.

Σε κάθε περίπτωση πάντως η σταθερά $\frac{8}{9}$ αποτελεί συνειδητή ή όχι αναλογία του εμβαδού ενός κύκλου και του τετραγώνου της διαμέτρου του και πουθενά δεν φαίνεται ξεκάθαρη σύνδεση αυτής της αναλογίας με την αναλογία περιμέτρου και διαμέτρου (π_1). Το μόνο που με ασφάλεια μπορούμε να εξάγουμε, βασισμένοι στον διαχωρισμό που αναλύσαμε στην αρχή για τα π_1 και π_2, και αντιλαμβανόμενοι ότι μιλάμε εκτός πλαισίου είναι ότι $\boldsymbol{\pi_2 \cong 3{,}16}$.

Μπορούμε δηλαδή θεωρώντας τον κανόνα $\mathbf{E} = \left(1-\frac{1}{9}\right)^2 \mathbf{d^2}$ ως γενικό, αφού χρησιμοποιείται και στην επίλυση άλλων προβλημάτων με διαφορετικά νούμερα, και εκφράζοντάς τον στην παραπάνω σύγχρονη μορφή τύπου, να τον αντιπαραβάλουμε με τον σύγχρονο τύπο εύρεσης εμβαδού $\mathbf{E} = \frac{\pi_2}{4}\mathbf{d}^2$, οπότε προκύπτει ότι:

$\boldsymbol{\pi_2} = \frac{256}{81} \cong 3{,}1605...$ όπου π_2 ο λόγος εμβαδού κύκλου προς τετράγωνο της ακτίνας.

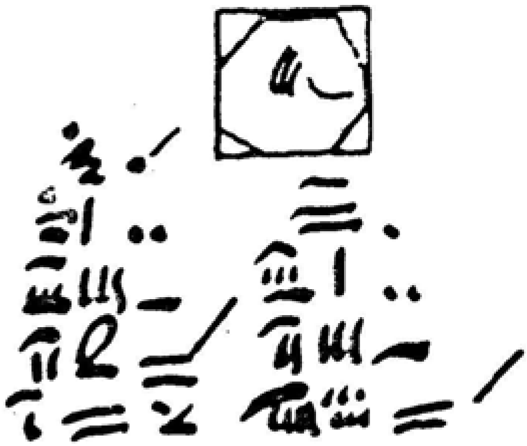
<u>Πώς προέκυψε το $\frac{8}{9}$ d;</u> Πέρα απ' όλα αυτά, εύλογο ερώτημα των μελετητών, υπήρξε ο προσδιορισμός και η προέλευση αυτής της αναλογίας ως τιμή. Πώς δηλαδή προέκυψε στους υπολογισμούς το κλάσμα 8/9;

Πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι την απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνει το πρόβλημα 48 του παπύρου που προηγείται των προηγούμενων προβλημάτων. Το ζήτημα αυτό απασχόλησε την έρευνα τις τελευταίες έξι δεκαετίες.

<u>Πρόβλημα 48</u>:

Το πρόβλημα αυτό είναι ξεχωριστό μεταξύ των 87 προβλημάτων που περιλαμβάνει ο πάπυρος, δεδομένου ότι η «εκφώνηση» που παραθέτει ο γραφέας σε κάθε πρόβλημα, εδώ αντικαθίσταται από ένα διάγραμμα, από το οποίο ο αναγνώστης αναμένεται ότι θα κατανοήσει την φύση του προβλήματος.

Στο διάγραμμα αυτό, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, παρουσιάζεται ένα τετράγωνο που περικλείει ένα άλλο σχήμα, μέσα στο οποίο σημειώνεται το νούμερο 9. Στην συνέχεια ακολουθούν δύο υπολογισμοί που έχουν την τυπική μορφή πολλαπλασιασμού των αιγυπτιακών μαθηματικών, οι πολλαπλασιασμοί 8×8 και 9×9.



Όλοι συμφωνούν στο ότι ο αριθμός 9 συμπίπτει με το μήκος της πλευράς του τετραγώνου και στο ότι το εγγεγραμμένο σχήμα παραπέμπει στον κύκλο. Οι δε πολλαπλασιασμοί υπολογίζουν το εμβαδόν του τετραγώνου (9×9) και το εμβαδό του κύκλου (όπου 8×8 είναι το τρίτο βήμα του αλγορίθμου που περιγράφεται αναλυτικά στο πρόβλημα 50.)

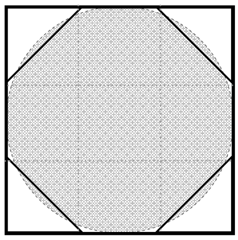
Αρχικά η μετάφραση που έδωσε ο **A. B. Chace** το **1947** είναι η ακόλουθη:

«Σύγκρινε το εμβαδό ενός κύκλου και του περιγεγραμμένου του τετραγώνου.»

Κύκλος διαμέτρου 9		**Τετράγωνο πλευράς 9**	
1	8 setat	\ 1	9 setat
2	16 setat	2	18 setat
4	32 setat	4	36 setat
\ 8	64 setat	\ 8	72 setat
		Σύνολο	81 sesat

Ωστόσο παρατηρώντας το εγγεγραμμένο σχήμα το οποίο δεν μοιάζει με τέλειο κύκλο, σε αντίθεση με άλλους κύκλους που έχει σχεδιάσει στον πάπυρο ο ίδιος γραφέας, αρκετοί ερευνητές υποστήριξαν στο παρελθόν, ότι πρόκειται για ένα οκτάγωνο και ότι το ίδιο το πρόβλημα, δεν είναι μία απλή σύγκριση εμβαδών αλλά μία προσέγγιση του εμβαδού ενός κύκλου με βάση τον υπολογισμό του εμβαδού ενός οκταγώνου που τον προσεγγίζει. Προσπάθησαν κατ' αυτόν τον τρόπο να δικαιολογήσουν την χρήση της σχέσης $(\frac{8}{9}d)^2$.

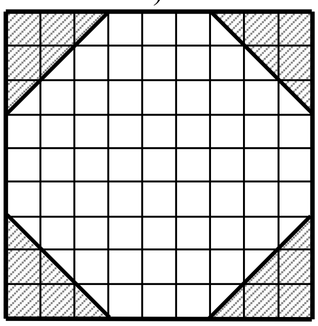
Συγκεκριμένα ο **K. Vogel** to **1958**, θέλοντας να προτείνει μία πιθανή προέλευση της σχέσης $(8/9\ d)^2$ παρατηρεί ότι μέσα στο τετράγωνο είναι ένα οκτάγωνο που προκύπτει αν τριχοτομηθούν οι πλευρές του τετραγώνου και ενωθούν τα σημεία τομής.



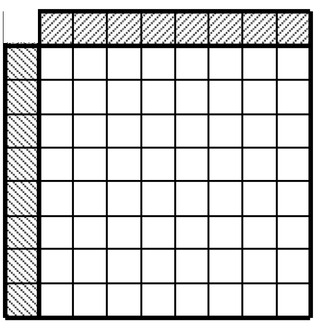
Το εμβαδό του οκταγώνου αυτού προσεγγίζει το εμβαδό του αντίστοιχου εγγεγραμμένου κύκλου και εύκολα υπολογίζεται από το διπλανό σχήμα ότι ισούται με τα $\frac{7}{9}$ του τετραγώνου στο οποίο περιέχεται. Δηλαδή έχει εμβαδό 7/9 του d^2 .

Από τα παραπάνω εκτιμήθηκε ότι πιθανώς η σταθερά $(8/9)^2$ είναι προσέγγιση του κλάσματος $\frac{7}{9}$, αφού $\frac{7}{9} = \frac{63}{81} \cong \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$.

Μία δεκαετία αργότερα οι **R. G. Gillings** και **W. J. A. Riggs** το **1969** συμφωνώντας με την προσέγγιση του Vogel, θεώρησαν ως δεδομένο ότι ο κύκλος προσεγγίζεται από το προαναφερόμενο οκτάγωνο. Πρότειναν λοιπόν μία αντίστοιχη κατασκευή που ακολουθεί τον κανόνα $\mathbf{(d - \frac{1}{9}d)^2}$. Συγκεκριμένα πρότειναν ότι οι Αιγύπτιοι, είναι πιθανό να σχεδίασαν ένα τετράγωνο πλευράς 9 knet και αφού τριχοτόμησαν κάθε πλευρά του και ένωσαν τα διαδοχικά σημεία, έφεραν τις κατάλληλες γραμμές για να βλέπουν το κάθε τετραγωνικό knet, (δηλαδή το κάθε setat).



Κατ' αυτόν τον τρόπο είναι φανερό ότι το εμβαδό του οκταγώνου είναι μικρότερο αυτού του τετραγώνου κατά τέσσερα τρίγωνα, το καθένα από τα οποία έχει εμβαδό 4 και μισό setat, όπως φαίνεται στο σχήμα στα δεξιά. Αν λοιπόν αντί για τα δύο πάνω τρίγωνα συνολικού εμβαδού 9 setat, αφαιρεθεί από το τετράγωνο η πάνω γραμμή με 9 setats και κατά τον ίδιο τρόπο αντί για τα δύο κάτω τρίγωνα αφαιρεθεί η αριστερή στήλη με 9 setats, όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα, θα έχουμε ένα τετράγωνο πλευράς 8 knet δηλαδή $(9 - \frac{1}{9}9)$ knet. Το νέο αυτό τετράγωνο προσεγγίζει το οκτάγωνο με απόκλιση ενός τετραγωνικού knet, αυτού που βρίσκεται πάνω αριστερά, που αφαιρέθηκε δύο φορές.



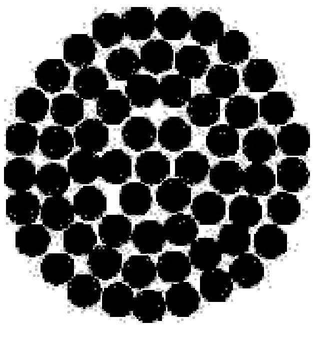
Το εμβαδό λοιπόν του οκταγώνου, που ήταν προσέγγιση του κύκλου, προσεγγίζεται από ένα τετράγωνο η πλευρά του οποίου εξαρτάται από την γνωστή διάμετρο.

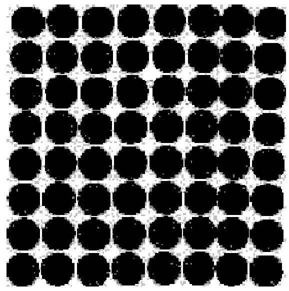
Οι Gillings και Riggs κατ' αυτόν τον τρόπο υποστηρίζουν ότι οι δύο υπολογισμοί που καταγράφονται στον πάπυρο δεν αντιστοιχούν σε κύκλο διαμέτρου 9 και τετράγωνο πλευράς 9, αλλά σε τετράγωνο πλευράς 8 και τετράγωνο πλευράς 9. Τέλος σημειώνουν:

> «Καταλήγοντας, νιώθουμε δικαιολογημένοι να συμπεράνουμε ότι το αινιγματικό και μοναδικό RMP 48, αποκάλυψε τελικά το μυστικό του, εκτός βέβαια αν κάποιος έχει να προσφέρει μία καλύτερη λύση.»
>
> (Aus. J. Sci., Vol. 32, No. 5, p.200)

Πρέπει ωστόσο να επισημάνουμε ότι οι προηγούμενες αναλύσεις, καθώς και άλλες που ακολούθησαν, παρά την ευρύτατη διάδοσή τους και την κατά τρόπο παγίωσή τους, έχουν εξ' αρχής στηριχθεί σε κάποιες υποθέσεις και ενδεχομένως έμμεσα σε κάποιους αναχρονισμούς που δεν αποδεικνύονται ασφαλώς μέσω των ελάχιστων υπαρχουσών πηγών. Η **A. Imhausen (2007)**, σε πρόσφατη εργασία σημειώνει ότι είναι δύσκολο από τις υπάρχουσες πηγές να εξάγουμε συμπεράσματα για την εξέλιξη των μαθηματικών τεχνικών, αφού τα μαθηματικά που συναντάμε στον πάπυρο Rhind παρουσιάζονται σε μία μορφή κατάλληλη για την διδασκαλία νεαρών γραφέων και δεν αποτελούν τις ερευνητικές σημειώσεις ενός έμπειρου γραφέα. Θα λέγαμε γενικότερα, ότι σήμερα, οι αναλύσεις του προηγούμενου είδους, αμφισβητούνται από τους νεότερους ερευνητές που πλέον εστιάζουν στην μελέτη των πρωτοτύπων πηγών, θεωρώντας την συνεργασία μαθηματικών και αιγυπτιολόγων απαραίτητη. Το μαθηματικό περιεχόμενο αναλύεται σε σχέση με το ευρύτερο πολιτισμικό περιβάλλον και τις εφαρμογές που διακρίνονται σε μη μαθηματικές πηγές τις περιόδου ή σε νεότερες μαθηματικές πηγές της περιοχής.

Μία διαφορετική τελείως προσέγγιση, διατύπωσε σχετικά πρόσφατα ο **P. Gerdes**[3] το **1985**, προτείνοντας τρεις τρόπους που μπορεί να οδήγησαν τους Αιγυπτίους σε αυτό το αποτέλεσμα. Οι τρεις αυτοί τρόποι είναι καθαρά εμπειρικοί και συνοδεύονται από μία επιχειρηματολογία για το ότι ενδέχεται να αποτέλεσαν τη βάση για τον γνωστό τύπο υπολογισμού του εμβαδού. Οι δύο τρόποι που προτείνονται σχετίζονται με τις τέχνες στις οποίες συχνά παρουσιάζονται σχήματα με ομόκεντρους ισαπέχοντες κύκλους και σπειροειδή «σχήματα φιδιού». Ο πρώτος συνδέεται με το σπειροειδές «κουλούριασμα» ενός σχοινιού και ο δεύτερος με το πόσα μοτίβα μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας ομόκεντρους δακτυλίους. Η τρίτη υπόθεση αφορά ένα αρχαίο επιτραπέζιο παιχνίδι, το "mancala" που υπήρξε δημοφιλές τόσο στην αρχαία Αίγυπτο όσο και σε άλλες περιοχές της Αφρικής. Η τελευταία του αυτή υπόθεση περιλαμβάνει τη σύγκριση κυκλικών ψηφίων ή κυλίνδρων με μεγαλύτερους κύκλους και την μορφοποίηση τους σε τετράγωνο σχηματισμό





[3] Gerdes, Paulus (1985b): Three alternate methods of obtaining the Ancient Egyptian formula for the area of the circle, in: Historia Mathematica, New York, Vol.12, p.261-268

2.1.2 ΠΑΠΥΡΟΣ ΜΟΣΧΑΣ

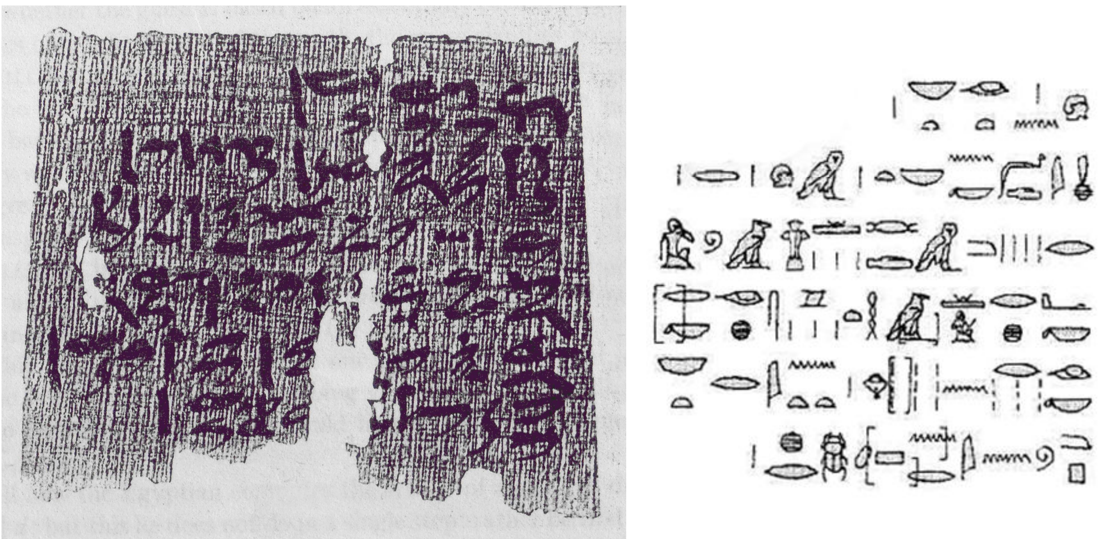
Ένα επίσης πρόβλημα που έχει διατηρήσει την προσοχή των ερευνητών για πολλά χρόνια και στο οποίο έχουν εστιάσει πολλές δημοσιεύσεις από τις αρχές του 20ου αιώνα είναι το πρόβλημα 10 του παπύρου της Μόσχας.

Ο πάπυρος της Μόσχας βρέθηκε στην νεκρόπολη της αρχαίας πόλης Θήβες (σήμερα Λούξορ) και πουλήθηκε το 1893 στον Ρώσο V. S. Golenischev, ο οποίος το παραχώρησε στο μουσείο «Poushkin» της Μόσχας. Οι διαστάσεις του είναι 8 × 540 cm και περιέχει 25 προβλήματα και τις λύσεις τους, ενώ χρονολογείται ότι γράφηκε περίπου το 1800 π.Χ.

Τα δύο πιο ενδιαφέροντα γεωμετρικά προβλήματα που συναντάμε στον πάπυρο αυτό είναι το πρόβλημα 14 όπου υπολογίζεται ο όγκος κόλουρης πυραμίδας με σωστό αποτέλεσμα και το **πρόβλημα 10**, το οποίο δεν έχει κοινώς αποδεκτή ερμηνεία αλλά φαίνεται να σχετίζεται με τον κύκλο. Εμείς εδώ παρουσιάσουμε το πρόβλημα 10, όπως αρχικά μεταφράστηκε από τον **Sturve**, καθώς και τις μετέπειτα διαφοροποιήσεις που προτάθηκαν από ερευνητές τόσο στην μετάφραση όσο και στην ερμηνεία του προβλήματος.

Η μετάφραση που ακολουθεί είναι αυτή που εξέδωσε αρχικά ο Sturve, με την διαφορά ότι στην τρίτη γραμμή η μετάφρασή του έχει αντικατασταθεί με αυτήν που πρότεινε λίγο αργότερα ο Βρετανός αιγυπτιολόγος **T. Peet**. Τα αποσιωπητικά δηλώνουν σημεία του πρωτότυπου κειμένου που έχουν υποστεί φθορές και η ανάγνωσή τους καθίσταται αδύνατη. Η σημασία των λέξεων *nb.t* και *ꜥḏ* δεν έχει ταυτοποιηθεί. Η πρώτη συνήθως μεταφράζεται ως καλάθι ενώ η δεύτερη είναι ένα από τα δεδομένα που το πρόβλημα θεωρεί γνωστά χωρίς ωστόσο να αναφέρει ρητά την τιμή του.

Πρόβλημα 10:



Η φωτογραφία αυτή δείχνει τις πρώτες έξι γραμμές του προβλήματος, που είναι γραμμένο στην ιερατική γλώσσα, ενώ δεξιά φαίνεται η απόδοση του κειμένου με ιερογλυφική γραφή. [Στήλη 18, γραμμές 1-6, κατά Sturve (1930)]

Μετάφραση:

Τρόπος υπολογισμού ενός καλαθιού (*nb.t*) (**1**) (Στήλη 18)
αν κάποιος σου πει για ένα καλάθι με στόμιο (**2**)
(μία τιμή που εννοείται) και με *ꜥd* $4\frac{1}{2}$. Ω (**3**)
πες μου ποια είναι η επιφάνειά του. Πάρε (**4**)
το $\frac{1}{9}$ του 9 **[…]** αφού το καλάθι (**5**)
είναι το μισό ενός **[…]** Αυτό είναι 1. (**6**)
Υπολόγισε το υπόλοιπο που είναι 8 (**1**) (Στήλη 19)
Υπολόγισε το $\frac{1}{9}$ του 8· (**2**)
το αποτέλεσμα είναι $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Υπολόγισε (**3**)
το υπόλοιπο αν από το 8 αφαιρέσεις (**4**)
το $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Το αποτέλεσμα είναι $7\frac{1}{9}$. (**5**)
Μέτρα με το $7\frac{1}{9}$, $4\frac{1}{2}$ φορές. (**1**) **(**Στήλη 20**)**
Το αποτέλεσμα είναι 32. Κοίτα: αυτή είναι η επιφάνειά του. (**2**)
Αυτό που βρήκες είναι σωστό. (**3**)

Σύγχρονη απόδοση:

Ανεξάρτητα από τα δεδομένα του προβλήματος οι υπολογισμοί που περιγράφονται στο κείμενο είναι οι εξής:

$\left(2 \times 4\frac{1}{2} = 9\right)$ δεν αναφέρεται
αλλά πιθανώς εννοείται

$$\frac{1}{9} \times 9 = 1$$

$$9 - 1 = 8$$

$$\frac{1}{9} \times 8 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

$$8 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) = 7\frac{1}{9}$$

$$7\frac{1}{9} \times 4\frac{1}{2} = 32$$

Παρατηρήσεις:

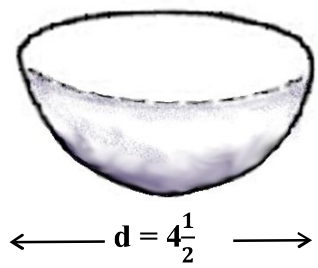
1. Το σχήμα που υπολογίζεται είναι όπως είπαμε ένα *nb.t* που συνήθως μεταφράζεται ως «**καλάθι**». Ωστόσο πολύ πιθανόν, ο όρος αυτός να αποτελεί το όνομα κάποιου γνωστού σχήματος που όμως δεν συναντάμε πουθενά αλλού ως ορολογία. Έχει κατά καιρούς μεταφραστεί, όπως θα δούμε από διάφορους ερευνητές, ως μισή σφαίρα, μισός κύλινδρος ή ως λόφος ή αποθήκη (παραβολοειδούς σχήματος).

2. Στην γραμμή 3 της στήλης 18, δίνονται τα αριθμητικά δεδομένα της άσκησης. Αρχικά είχε διατυπωθεί[4] ότι θεωρείται δεδομένη μόνο μία αριθμητική τιμή, αυτή της διαμέτρου, του «στομίου» (x = $4\frac{1}{2}$). Στην συνέχεια ωστόσο, μετά από μία συντακτική παρατήρηση του Peet[5], οι γραμμές 2, 3 μεταφράζονται με τρόπο που φανερώνει ότι στην ουσία δίνονται δύο δεδομένα.

3. Στην γραμμή 6 της ίδιας στήλης διαβάζουμε ότι το «καλάθι» είναι το μισό ενός άλλου σχήματος, αλλά στο σημείο αυτό υπάρχει μεγάλη αλλοίωση του παπύρου, και λείπει το όνομα του σχήματος που θα βοηθούσε την απόδοση της έννοιας «καλάθι».

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε κάποια βασικά σημεία της έρευνας που έχει γίνει από το 1930 για την απόδοση αυτού του προβλήματος.

Ο **Sturve** στο έργο του το **1930**, όπου και εκδίδεται αρχικά το πρόβλημα, θεωρώντας όπως είπαμε ότι δίνεται ως δεδομένο μόνο η διάμετρος, υποστήριξε ότι στο πρόβλημα αυτό υπολογίζεται επιτυχώς η **επιφάνεια ενός ημισφαιρίου** με διάμετρο βάσης d = $4\frac{1}{2}$.



Δηλαδή θεώρησε ότι οι γραμμές 5,6 (Στ.18, 5-6) συμπληρώνονται ως εξής: «…το καλάθι είναι το μισό μίας σφαίρας». Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, έδωσε τον υπολογισμό που περιγράφει το πρόβλημα με τον εξής τύπο:

$$\mathbf{E = (1 - \tfrac{1}{9}) \cdot (1 - \tfrac{1}{9}) \cdot 2d \cdot d}$$

Επειδή όμως το $(\mathbf{1-\frac{1}{9}})^2$ με τον συνήθη αναχρονισμό, θεωρήθηκε ότι αντιστοιχεί με $\frac{\pi}{4}$ όπως περιγράψαμε πιο πάνω συμπέρανε ότι: $\boldsymbol{E = \frac{\pi\, d^2}{2}}$ και άρα υπολογίζεται η επιφάνεια ενός ημισφαιρίου.

Ένα χρόνο αργότερα ο **T. Peet** το **1931**, δημοσίευσε εργασία σε απάντηση της γερμανικής έκδοσης του Sturve και σημείωσε την δική του διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα 10.

Ο Peet όπως είπαμε θεώρησε ότι τα δεδομένα του προβλήματος δίνονται ως εξής:

“ένα καλάθι με $\boldsymbol{x}$ στόμιο και $\mathbf{4\frac{1}{2}}$ y”

Το **y** ό,τι και να σημαίνει είναι η δεύτερη ποσότητα που δίνεται ως δεδομένο και ισούται με $4\frac{1}{2}$, ενώ η τιμή **x** της πρώτης ποσότητας (του στομίου-διαμέτρου) δεν δίνεται αλλά υπονοείται ως προφανής. Με την διόρθωση αυτή έχει συμφωνήσει η πλειοψηφία των ερευνητών μέχρι και σήμερα αποκλείοντας την περίπτωση του ημισφαιρίου

[4] V. Struve, B. Turaev. (1930). *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schönen Künste in Moskau.* Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik; Abteilung A: Quellen 1. Berlin: J. Springe

[5] T. Peet, (1931). *A problem in Egyptian geometry.* Journal of Egyptian Archaeology 17: 100-106.

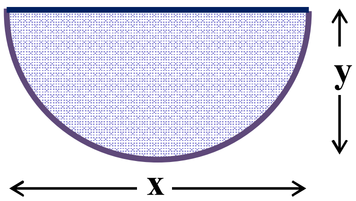
Στην συνέχεια ο Peet αντιπροτείνει δύο πιθανούς υπολογισμούς

(α) υπολογισμός **επιφάνειας ημικυκλίου** (με **x-διαμέτρο** = 9, **y-ακτίνα** = $4\frac{1}{2}$)

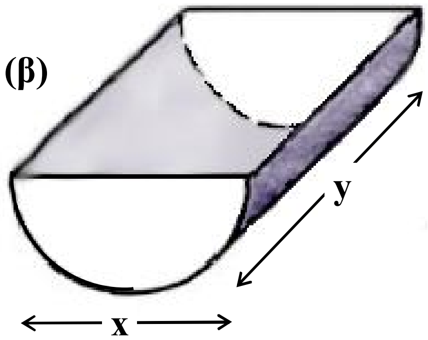
(β) υπολογισμός **εμβαδού παράπλευρης επιφάνειας ημικυλίνδρου**

(με **x-διαμέτρο** = $4\frac{1}{2}$, **y –ύψος** = $4\frac{1}{2}$)

(α)



(β)



Κρίνοντας ότι η περίπτωση (α) είναι λιγότερο πιθανή, διότι αυτό θα σήμαινε ότι δίνονται οι δύο διαστάσεις, διάμετρος και ακτίνα, μία από της οποίες είναι περιττή, εστίασε στην δεύτερη.

Ο υπολογισμός της παράπλευρης επιφάνειας του ημικυλίνδρου στην συνέχεια κατά τον Peet εκφράζεται στην μορφή:

$$\mathbf{E = 2y\,(1 - \tfrac{1}{9})^2 \cdot x}$$

Με τον ίδιο αναχρονισμό, θεωρώντας δηλαδή ότι $(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}})^2 = \frac{\pi}{4}$

$$\mathbf{E = 2y\,\tfrac{\pi}{4} \cdot x}$$

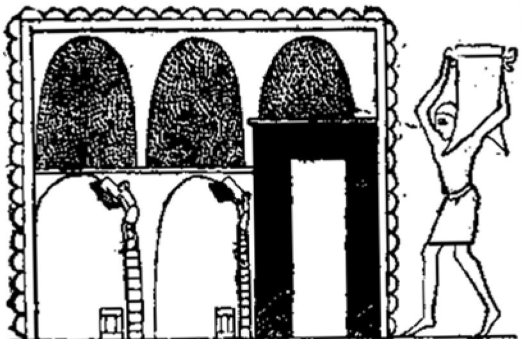
και το x είναι διάμετρος (x = d) και y είναι το ύψος του κυλίνδρου:

$$\mathbf{E = \tfrac{1}{2}\,y \cdot \pi \cdot d}$$

Οπότε: $\mathbf{E = \frac{1}{2}\,y \cdot}$ (**περιφέρεια κυκλικής βάσης**)

Δηλαδή το μισό της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου.

Ο **Neugebauer**[6] το **1934** επανεξετάζοντας το πρόβλημα πρότεινε κάτι εντελώς διαφορετικό. Υποστήριξε ότι πιθανώς η επιφάνεια που υπολογίζεται να αντιστοιχεί σε ένα **παραβολοειδές** σχήμα, αντίστοιχο με αυτό που φαίνεται να είχαν οι αιγυπτιακές σιταποθήκες, όπως αυτές που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπως τις



Η αναπαράσταση μίας αποθήκης για καλαμπόκι.
Εικόνα από εγχειρίδιο αιγυπτιακής αρχαιολογίας (1894)

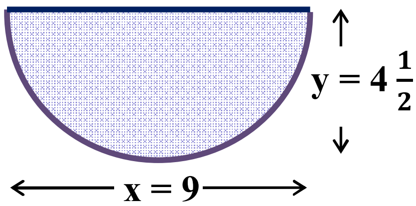
Τόσο ο Neugebauer όσο και ο **Van der Waerden**[7], αναφερόμενοι στην πρόταση που έκανε ο Peet για το εμβαδό που υπολογίζει αυτό το πρόβλημα, αναφέρουν μόνο την περίπτωση του ημικυλίνδρου και παραλείπουν αυτή του ημικυκλίου. Την ξεχασμένη αυτή υπόθεση του Peet θα αναδείξει ο

[6]O. Neugebauer,(1934), «*Vorgriechische Mathematik*», Springer, Berlin.

[7] Van der Waerden, (1963). «*Science Awakening*», Translated by Arnold Dresden. New York: John Wiley.

A. J. E. M . Smeur[8] το **1970** σε μία συνδυαστική προσέγγισή του σχετικά με το ημικύκλιο.

Το εμβαδόν του προβλήματος, σύμφωνα με αυτήν την θεωρία, υπολογίζεται με τον εξής τρόπο:



$$\mathbf{E = x \cdot (1 - \tfrac{1}{9})^2 \cdot y}$$

Με τον ίδιο αναχρονισμό, θεωρώντας δηλαδή ότι $(\mathbf{1}-\frac{1}{9})^2 = \frac{\pi}{4}$,

$$\mathbf{E = x \cdot \tfrac{\pi}{4} \cdot y}$$

$$\mathbf{E = \tfrac{1}{2}\, x \cdot \tfrac{\pi}{4} \cdot 2y}$$

Το x είναι διάμετρος (x = d) και 2y είναι επίσης η διάμετρος (2y = d), οπότε:

$$\mathbf{E = \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{\pi}{4}\, d^2)}$$

Οπότε: $\mathbf{E = \frac{1}{2}}$ **(Εμβαδόν κύκλου)**

Το **1972**, ο **Seidenberg**[9], επιστρέφει και επιχειρηματολογεί, υποστηρίζοντας ότι αυτό που υπολογίζεται είναι το εμβαδό ενός ημικυκλίου και μάλιστα, ότι βασίζεται στην σχέση «ημικύκλιον ίσον με ημιπεριφέρεια επί ακτίνα». Θεωρεί ότι το να δίνεται και η ακτίνα και η διάμετρος δεν είναι ταυτολογία, αφού αυτό που δίνεται στην ουσία είναι η βάση και το ύψος ενός κυκλικού τμήματος. Η τελευταία αυτή παρατήρησή του, δεν απέχει πολύ από την αλήθεια αφού όπως θα παρατηρήσουμε στην παράγραφο 2.4, σε πολλά προβλήματα που συναντάμε σε αρχαίους πολιτισμούς, το εμβαδό κυκλικού τμήματος υπολογίζεται συναρτήσει της «βάσης» και του «ύψους» του. Τέλος στην πρόσφατη έκδοση του V. J. Katz (**2007**) για τα μαθηματικά των υπολογισμών, η **Annette Imhausen**[10] αναφέρει την περίπτωση του ημικυκλίου ως εξίσου πιθανή.

2.1.3 ΠΑΠΥΡΟΣ LAHUN (ή KAHUN)

Στην στενή λωρίδα ερήμου που χωρίζει την όαση Fayum από τις όχθες του ποταμού Νείλου, στην πόλη που σήμερα φέρει το όνομα **el-Lahun**, στα τέλη του 19ου αι. (μεταξύ 1889 and 1899) ήρθε στο φως[11] η μεγαλύτερη συλλογή από παπύρους του Μέσου Βασιλείου που σώζεται σήμερα. Οι πάπυροι αυτοί συχνά φέρουν το όνομα **Kahun** από το υποτιθέμενο όνομα της αρχαίας πόλης. Σώζονται αποσπασματικά και όχι πάντα σε καλή κατάσταση. Μεταξύ αυτών, έχει πλέον διαπιστωθεί ότι 7 τμήματα

[8] Smeur, A., J., E., M., (1970), «*On the value equivalent to π in ancient mathematical texts. A new interpretation*», Archive for History of Exact Sciences, Vol. 6, No 4, pp. 249-270

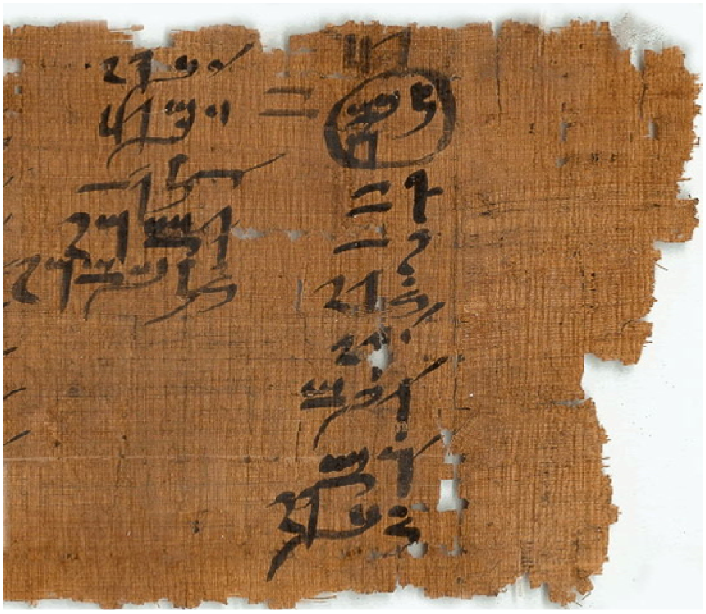
[9] A Seidenberg,. (1972). *On the area of the semicircle*. Archive for History of Exact Sciences 9: 171-211.

[10] «*The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A sourcebook*». Princeton: Princeton University Press.

[11] Ανασκαφές έκανε στην περιοχή ο Βρετανός αιγυπτιολόγος **W. M. Flinders Petrie** (1853 - 1942) και τα εν λόγο μαθηματικά αποσπάσματα φυλάσσονται στο πανεπιστημιακό μουσείο που φέρει το όνομά του [Petrie Museum του University College London (UCL)]

παπύρου έχουν μαθηματικό περιεχόμενο (προβλήματα και πίνακες) και συνάδουν σε αρκετά σημεία με τις δύο βασικές πηγές (πάπυροι Rhind και Μόσχας), ενώ συμπληρώνουν επίσης στοιχεία που δεν βρίσκονται σε άλλα κείμενα. Τα 7 αυτά αποσπάσματα έχουν αποκατασταθεί και μερικώς μεταφραστεί από τον **F.L. Griffith**[12], Εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε ένα πρόβλημα που αφορά στον υπολογισμό του όγκου ενός κυλίνδρου (Griffith, Petrie Paryri IV.3, στήλες 13-14)

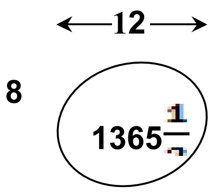
Το πρόβλημα, μαζί με ένα ακόμα, βρίσκονται σε ένα ξεχωριστό τμήμα παπύρου (**UC 32160**) και φαίνεται στην παρακάτω φωτογραφία. Η εκφώνηση του προβλήματος δεν σώζεται, ενώ η λύση παρουσιάζεται σε δύο στήλες με υπολογισμούς. Πάνω από την πρώτη στήλη (πάντα από τα δεξιά προς τα αριστερά) φαίνεται ένα κυκλικό σχήμα πάνω στο οποίο σημειώνονται τρείς αριθμοί. Το σχήμα αυτό φαίνεται ότι περιγράφει την κυκλική βάση του κυλίνδρου



Στη φωτογραφία φαίνεται το ένα από τα δύο προβλήματα
του τμηματος UC 32160 του πάπυρου Lahun

Συγκεκριμένα, σ' αυτόν τον όχι τόσο καλά σχηματισμένο κύκλο σημειώνεται εσωτερικά ο αριθμός $1365\frac{1}{3}$, από πάνω από το σχήμα σημειώνεται ο αριθμός 12 και στο πλάι αριστερά ο αριθμός 8.

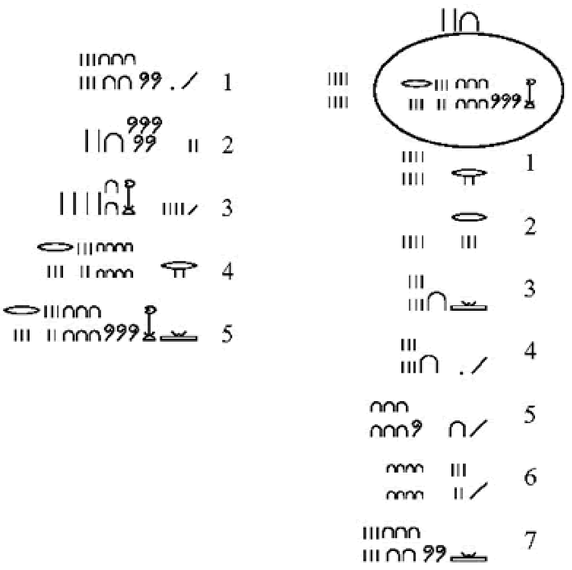
Αυτό που φαίνεται να συμβολίζει ο κάθε αριθμός είναι ο ζητούμενος όγκος ($V = 1365\frac{1}{3}$), η διάμετρος ($d = 12$) και το ύψος ($h = 8$) του κυλίνδρου.



Το κείμενο είναι γραμμένο στην ιερατική γλώσσα και με ιερογλυφική γραφή, αποδίδεται ως εξής:

[12] Francis Ll. Griffith, (1898) The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gurob, 2 vol., London: B. Quaritch,

2η στήλη **1η στήλη**

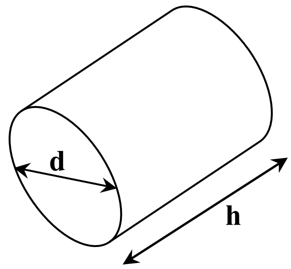


Σύγχρονη απόδοση:

$1\frac{1}{3} \cdot 12 = 16$ (1η στήλη, 1-3)

$16 \cdot 16 = 256$ (1η στήλη, 4-5)

$5\frac{1}{3} \cdot 256 = 1365\frac{1}{3}$ (2η στήλη, 1-5)



Σε πρώτη ανάγνωση οι υπολογισμοί δεν φαίνεται να χρησιμοποιούν το δεδομένο ύψος (h = 8). Ωστόσο το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με το πρόβλημα 43 του πάπυρου Rhind στο οποίο η εύρεση του όγκου ενός κυλίνδρου για τον οποίον δίνονται η διατομή και το ύψος σε cubits, δεν γίνεται σε κυβικά cubits αλλά κατευθείαν σε μία μεγαλύτερη μονάδα όγκου, τα khar. Σύμφωνα με την εξήγηση που έδωσε ο Gillings ο υπολογισμός γίνεται ως εξής: Στην διατομή, ή αλλιώς στην διάμετρο της κυκλικής βάσης προστίθεται εξ' αρχής το ένα τρίτο της. Στην συνέχεια το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του και τελικά πολλαπλασιάζεται με το του ύψους του κυλίνδρου.

Δηλαδή: **Αν d και h δίνονται σε cubit, τότε ο όγκος σε khar είναι:**

$$\boxed{\mathbf{V} = \left(\tfrac{4}{3}\boldsymbol{d}\right)^2 \cdot \tfrac{2}{3}\boldsymbol{h}}$$

Ο αλγόριθμος λοιπόν σε σύγχρονη μορφή είναι της μορφής:

$\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{d}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\boldsymbol{h} = 1\frac{1}{3} \cdot \mathrm{d} = 1\frac{1}{3} \cdot 12 = 16$

$\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{d}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\boldsymbol{h} = 16 \cdot 16 = 256$

$\left[\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{d}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\boldsymbol{h} = \left(\frac{4}{3}\boldsymbol{d}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\boldsymbol{h} \cdot 8 = 5\frac{1}{3} \cdot\right]$ που δεν περιλαμβάνεται στο κείμενο

$\left(\frac{4}{3}\boldsymbol{d}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}\boldsymbol{h} = 5\frac{1}{3} \cdot 256 = 1365\frac{1}{3}$

Παρατηρήσεις:

Από τον παραπάνω υπολογισμό παρατηρούμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση που η μετατροπή των μονάδων εμπεριέχεται στους υπολογισμούς, το εμβαδόν του κύκλου δίνεται πάλι σε μορφή τέλειου τετραγώνου.

2.2 Υπολογισμοι που σχετιζονται με τον κυκλο στα Μαθηματικα της Αρχαιας Μεσοποταμιας

Με τους όρους Μεσοποταμία, Βαβυλωνία[13], Ασσυρία[14], Αρχαίο Ιράκ, συχνά στην βιβλιογραφία προσδιορίζεται, άλλοτε εύστοχα και άλλοτε παραπλανητικά, η ευρύτερη περιοχή που περιβάλει τους ποταμούς Τίγρη και Ευφράτη. Τους ίδιους όρους δανείζεται και η ιστορία των μαθηματικών στην οποία ανά περιόδους έχουν επικρατήσει κυρίως οι φράσεις «Βαβυλωνιακά μαθηματικά» και «Μαθηματικά της Μεσοποταμίας».

Γνωστές πόλεις τις αρχαίας Μεσοποταμίας
(όχι όλες από την ίδια χρονική περίοδο)

Χαρακτηριστικά δείγματα των «μαθηματικών» αυτών είναι το θεσιακό εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης, μία πρώιμη μορφή αλγεβρικών χειρισμών, η γνώση του πυθαγόρειου θεωρήματος αλλά και η εξαιρετική αριθμητική προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2 που στο σύνολό τους τοποθετούνται στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ.

Όσο αφορά δε τα μαθηματικά που σχετίζονται με την αστρονομία, στα οποία δεν θα αναφερθούμε περεταίρω, τα ευρήματα περιορίζονται στα τέλη της πρώτης χιλιετίας π.Χ. και αυτό που καθιστούν φανερό είναι ότι οι Βαβυλωνιακές αστρονομικές παρατηρήσεις, οι υπολογισμοί τετραγωνικών ριζών και η χρήση του εξηκονταδικού συστήματος έχουν στην συνέχεια βαθύ αντίκτυπο στην εξέλιξη της αστρονομίας του αρχαίου κόσμου.

[13] Από την αρχαία πόλη Βαβυλώνα (Babylon)
[14] Από την ομώνυμη αρχαία πόλη (Asur)

Εμείς στη παρούσα εργασία εστιάζουμε στην Παλαιο-Βαβυλωνιακή περίοδο (2000-1600 π.Χ.), στην γεωμετρία και ειδικότερα στις γνώσεις που προκύπτει από τις πηγές ότι είχαν οι Βαβυλώνιοι για την μέτρηση του κύκλου. Πληροφορίες για τις γνώσεις αυτές αντλούμε τόσο από τα γεωμετρικά προβλήματα όσο και από τους πίνακες με γεωμετρικές σταθερές καταδεικνύοντας τις υπολογιστικές μεθόδους για την μέτρηση των επιμέρους στοιχείων του κύκλου αλλά και του ημικυκλίου. Ωστόσο το ημικύκλιο θα το εξετάσουμε σε ξεχωριστή παράγραφο (2.4).

Οι δύο βασικές γλώσσες στις οποίες είναι γραμμένα τα κείμενα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι η Ακκαδική, που θεωρείται συγγενική με την Εβραϊκή και την Αραβική γλώσσα και η Σουμεριακή που δεν έχει κάποιο σύγχρονο συγγενικό γλωσσικό ιδίωμα. Η γραφή τους δε, χαρακτηρίζεται ως **σφηνοειδής**, από τους αντίστοιχου σχήματος (τριγωνικούς) χαρακτήρες που αποτυπώνονταν στον μαλακό πηλό με γραφίδες από καλάμι ή ξύλο.

Η γνώση μας για τα εν λόγω μαθηματικά, ξεκινάει από τις πρώτες ανασκαφές που έλαβαν χώρα στις περιοχές αυτές στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, από Ευρωπαίους και διαδόθηκε ευρύτερα στις αρχές του 20^{ου} με τις δημοσιεύσεις των **Francois Thureau-Dangin**[15], **Otto Neugebauer** και **Abraham Sachs**[16].

Τα ευρήματα που σήμερα έχουμε στην διάθεση μας από την περιοχή της Μεσοποταμίας είναι περισσότερα από κάθε άλλου πολιτισμού και διατηρούν την έρευνα ενεργή.

2.1.1 ΠΙΝΑΚΙΔΕΣ ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Το μισό περίπου εκατομμύριο πήλινες πινακίδες, με δείγματα γραφής διαφόρων περιόδων από τις εν λόγω περιοχές, σήμερα φυλάσσονται σε πανεπιστημιακές βιβλιοθήκες και μουσεία αλλά και σε άλλες δημόσιες και ιδιωτικές συλλογές ανά τον κόσμο. Δεν είναι αποκλειστικό προϊόν επίσημων αρχαιολογικών ανασκαφών, αλλά προέρχονται εξίσου, από μεμονωμένες ομάδες ανασκαφών και συλλογές εμπόρων αρχαιοτήτων, ενώ συχνά υπήρξαν ευρήματα αρχαιοκαπήλων και απλών κατοίκων των περιοχών. Με τέτοιο ανεπίσημο τρόπο χιλιάδες πλάκες από τον 19^{ο} αιώνα και έπειτα, βρέθηκαν χωρίς να φωτογραφηθούν και να καταγραφούν σε καταλόγους, υπέστησαν φθορές και δεν είναι γνωστή η ακριβής θέση στην οποία βρέθηκαν.

[15] Thureau-Dangin, F. (1938). *Textes mathématiques babyloniens* (Ex Oriente Lux 1), Leiden.

[16] Otto Neugebauer &Abraham Sachs (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series, vol. 29, New Haven, CT: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research

Από το σύνολο των πήλινων πινακίδων που έχουν έρθει στο φως μέχρι σήμερα περισσότερες από 400 έχουν μαθηματικό περιεχόμενο. Οι περισσότερες από αυτές προέρχονται από την Νιππούρ (πιθανότατα στο σημείο που βρέθηκαν να υπήρχε βιβλιοθήκη της πόλης), από τη αρχαία πόλη Λάρσα και την Σιππάρ.[17]

Ράφια βιβλιοθήκης όπου βρέθηκαν πινακίδες με σφηνοειδή γραφή σε ανασκαφή στην πόλη Σιππάρ στη νότια Μεσοποταμία.

Το μέγεθός τους κυμαίνεται, από πολύ μικρές, που χωρούσαν μέσα στην παλάμη του γραφέα, μέχρι το μέγεθος βιβλίου και έχουν πάχος κάτι λιγότερο από 4 εκατοστά του μέτρου. Οι περισσότερες είναι τεμαχισμένες και μάλιστα σε αρκετές περιπτώσεις τμήματά τους φυλάσσονται σε διαφορετικές συλλογές. Μερικές είναι γραμμένες μόνο από την μία όψη, άλλες και από τις δύο, ενώ αρκετές είναι γραμμένες και στις πλαϊνές πλευρές τους.

Οι μαθηματικές πινακίδες είναι σαφώς σχολικά εγχειρίδια γραμμένα από γραφείς-εκπαιδευτές ή από μαθητευόμενους γραφείς και χωρίζονται σε δύο γενικές κατηγορίες: πινακίδες με μαθηματικά προβλήματα και πινακίδες με πίνακες τιμών. Οι πινακίδες με πίνακες τιμών περιλαμβάνουν πίνακες πολλαπλασιασμού, αντιστροφής αριθμών, πίνακες μονάδων μέτρησης, οικονομικών υπολογισμών αλλά και πίνακες με αριθμητικές ή γεωμετρικές σταθερές (συντελεστές) στους οποίους θα αναφερθούμε στη συνέχεια εκτενέστερα. Οι πινακίδες δε, με προβλήματα περιλαμβάνουν μεγάλη ποικιλία αριθμητικών και γεωμετρικών προβλημάτων. Υπάρχουν πινακίδες που περιέχουν ένα πρόβλημα με εκφώνηση και λεπτομερή λύση μέχρι πινακίδες που περιέχουν μέχρι και 200 προβλήματα, χωρίς μεν τις λύσεις, αλλά με σειρά αυξανόμενης δυσκολίας.

[17] Θ. Ε. Εξαρχάκος, «Βαβυλωνιακά Μαθηματικά: Ανακάλυψη, αποκρυπτογράφηση, χρονολόγηση και τρόποι ερμηνείας των βαβυλωνιακών μαθηματικών κειμένων.» 13^{o} Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

Τα γεωμετρικά όπως και όλα τα προβλήματα των Βαβυλωνίων είναι κυρίως προβλήματα υπολογισμών που εξυπηρετούσαν πρακτικούς σκοπούς και ανάγκες της γεωργίας, της μηχανικής και της αρχιτεκτονικής. Τα περισσότερα από αυτά εξετάζουν τρίγωνα και τραπεζοειδή καθώς και τις υποδιαιρέσεις τους υπό δεδομένες συνθήκες. Ο Neugebauer υποστήριξε παλαιότερα ότι η όλη αντιμετώπιση των γεωμετρικών προβλημάτων, παρά το γεγονός ότι κάποια από αυτά συνοδεύονται από σχήμα, είναι «αλγεβρική». Η γεωμετρία χρησιμοποιείται κατά την άποψη αυτή, προκειμένου να δώσει τις βασικές σχέσεις μεταξύ δοσμένων ποσοτήτων και στην συνέχεια η επίλυση γίνεται αλγεβρικό τρόπο.

Όπως ήδη αναφέραμε οι διάφορες πινακίδες με προβλήματα περιλαμβάνουν και την λύση και άλλες όχι. Εκείνο που φαίνεται να προσφέρουν όσες λύσεις δίνονται σε προβλήματα, είναι η μέθοδος με την οποία λύνεται το πρόβλημα και όχι το γιατί το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με τη μία ή την άλλη διαδικασία. Τέλος να σημειώσουμε ότι άλλοτε το πρόβλημα συνοδεύεται από σχήμα και άλλοτε όχι. Κάποια από τα σχήματα που συναντάμε σ’ αυτά τα προβλήματα παρουσιάζουν ενδιαφέρον και θα τα εξετάσουμε στο κεφάλαιο που αναφέρεται στις γεωμετρικές κατασκευές.

Στις πινακίδες που περιλαμβάνουν γεωμετρικά προβλήματα με μετρήσεις κύκλου, φαίνεται πώς οι Βαβυλώνιοι υπολόγιζαν τη περιφέρεια του κύκλου όταν γνώριζαν τη διάμετρό του (και το αντίστροφο) και πώς υπολόγιζαν το εμβαδό όταν γνώριζαν την περίμετρο. Συναντάμε επίσης διάφορες μεθόδους υπολογισμού για το εμβαδό ημικυκλίου, που φαίνονται ανεξάρτητες από το εμβαδό του κύκλου, κάτι που θα παρατηρήσουμε σε επόμενη παράγραφο, ότι συμβαίνει και σε άλλους πολιτισμούς.

ΛΙΣΤΕΣ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Εκτός από τα γεωμετρικά προβλήματα ή καλύτερα θα λέμε σε συνδυασμό με αυτά σημαντικότατες πληροφορίες αντλούνται από τις πινακίδες που περιλαμβάνουν πίνακες τιμών. Αυτές που αφορούν τη γεωμετρία και το θέμα μας ειδικότερα είναι πινακίδες με λίστες γεωμετρικών σταθερών-συντελεστών.

Στην συνέχεια τόσο οι μέθοδοι υπολογισμού του κύκλου, του ημικυκλίου και των κυκλικών τμημάτων, όσο και οι γνώσεις που εκτιμάται ότι είχαν για τα εγγράψιμα πολύγωνα οι γραφείς της αρχαίας Μεσοποταμίας, θα δούμε ότι προκύπτουν κυρίως από πινακίδες που περιέχουν ανάλογες λίστες.

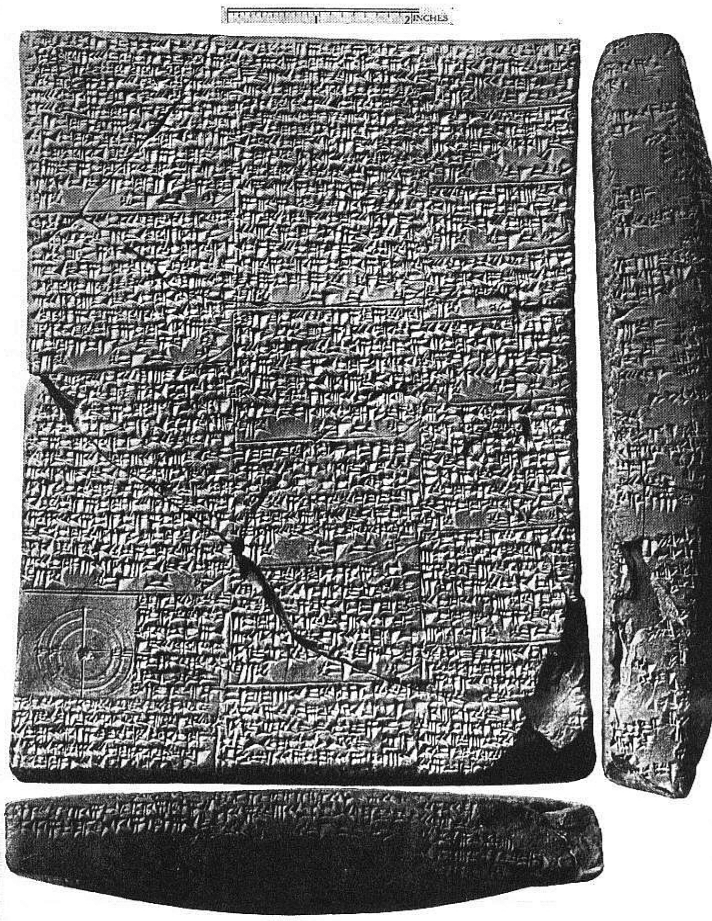
Στις περισσότερες από αυτές υπάρχει συνήθως μία αριθμητική τιμή που συνοδεύεται από μία φράση στην μορφή: « 3 – η σταθερά του κύκλου». Φυσικά δεν είναι σε όλες τις περιπτώσεις ευδιάκριτο το νόημα, όμως οι πινακίδες που περιλαμβάνουν κείμενο συνοδευόμενο από σχήματα, βοήθησαν ιδιαίτερα στην απόδοση του νοήματος αρκετών όρων.

Δύο χιλιάδες τεχνικές σταθερές ή αλλιώς συντελεστές για υπολογισμούς, βρέθηκαν από τις αρχές της δεύτερης χιλιετίας. Τα ονόματά τους και η μαθηματική τους λειτουργία μελετήθηκαν και συνεχίζουν να μελετώνται μεταξύ άλλων από τους Vaiman (1959; 1962; 1963) Friberg (1982; 1987-90) Kilmer (1990) Eleanor Robson (1999) βελτιώνοντας κατά πολύ την ερμηνεία σε διάφορους μαθηματικούς τομείς αλλά και σε ζητήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης των γραφέων.

2.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Η περιφέρεια ενός κύκλου όπως θα δούμε άμεσα υπολογίζεται λαμβάνοντας τρεις φορές την διάμετρο. Αντίστροφα η διάμετρος υπολογίζεται ως το 1/3 της περιφέρειας. Ας δούμε όμως πριν σχολιάσουμε την μέθοδο αυτή μερικά από τα πολλά παραδείγματα που συναντάμε σε μία από τις πιο γνωστές πινακίδες:

Η πρώτη πινακίδα με μαθηματικό περιεχόμενο, δημοσιεύτηκε[18] το 1900, ανήκει στη συλλογή του Βρετανικού μουσείου και φέρει την αρίθμηση **BM 85194**[19]. Χρονολογείται στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. και περιλαμβάνει 45 προβλήματα με την εκφώνηση και την λύση τους. Προσπάθειες για την μετάφρασή τους έγιναν τόσο από τον Thueu-Dangin όσο και από τον Otto Neugebauer. Άλλα από αυτά έχουν ερμηνευτεί ικανοποιητικά και άλλα όχι.



BM 85194.

Τα προβλήματα των οποίων το νόημα έχει αποδοθεί ικανοποιητικά, αφορούν μεταξύ άλλων υπολογισμούς όγκων και εμβαδών, περιλαμβάνουν την έννοια της κλίσης και της μέσης τιμής, ενώ συναντάμε επίσης υπολογισμούς που αφορούν κλεψύδρες. Σε πολλές περιπτώσεις είναι συνδυαστικά και κάνουν χρήση κάποιων αριθμητικών τιμών που από το σύνολο των ευρημάτων θεωρούνται πλέον ως ευρύτερης χρήσεως σταθερές.

Όσο αφορά τον κύκλο στην BM 85194, όπως και σε άλλες πινακίδες της περιόδου, συναντάμε τις σταθερές **3** και **0, 20** ($= 0\times 60^0 + 20\times 60^{-1}$) σε εξηκονταδική αναπαράσταση[20] ή αλλιώς σε σύγχρονη μορφή τους αριθμούς **3** και $\frac{20}{60} = \mathbf{\frac{1}{3}}$.

---

[18] King L W, Cuneiform texts from Babylonian tablets in the British Museum; Part XXI, London, 1900

[19] BM: British Museum

[20] Σε αντιστοιχία με την δική μας δεκαδική αναπαράσταση που το δεκαδικό μέρος χωρίζεται από το ακέραιο με υποδιαστολή: π.χ.

$\mathbf{10234{,}56789 = 1\times 10^4 + 0\times 10^3 + 2\times 10^2 + 3\times 10^1 + 4\times 10^0 + 5\times 10^{-1} + 6\times 10^{-2} + 7\times 10^{-3} + 8\times 10^{-4} + 9\times 10^{-5}}$

Σύγχρονη απόδοση: $\boxed{\mathbf{C = 3\ d \qquad \& \qquad d = \frac{1}{3}\ C}}$

Όπου **C** η περιφέρεια του κύκλου και **d** η διάμετρός

Στον παρακάτω πίνακα[21] φαίνονται μερικά παραδείγματα τέτοιων υπολογισμών από την **BM 85194**:

Με δεδομένο:	**Υπολογίζεται:**			
Πρόβλημα 4:				
Περιφέρεια 1	Διάμετρος:	**0, 20**	φορές το 1	= 0, 20
Διάμετρος: 3	Περιφέρεια:	**3**	φορές το 0, 30	= 1, 30
Πρόβλημα 16:				
Διάμετρος: 0, 13 20	Περιφέρεια:	**3**	φορές το 0, 13 20	= 0, 40
Διάμετρος: 0, 20	Περιφέρεια:	**3**	φορές το 0, 20	= 0, 10
Πρόβλημα 19:				
Περιφέρεια 0, 40	Διάμετρος:	**0, 20**	φορές το 0, 40	=0; 13 20

Από το σύνολο των πηγών φαίνεται η καθιερωμένη και γενικευμένη χρήση της **σταθεράς 3** για αυτόν τον υπολογισμό και με την χρήση του σύγχρονου τύπου για τον υπολογισμό της περιφέρειας (C = π d), προκύπτει αυτό που πολλοί ιστορικοί και μελετητές συνοψίζουν στην δήλωση «οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν την τιμή π=3». Ωστόσο, βάσει της ανάλυσης που έχει προηγηθεί οφείλουμε να περιοριστούμε στο ότι $\boldsymbol{\pi_1=3}$.

Στην συνέχεια:

- μελετώντας τους υπολογισμούς των εμβαδών κύκλου και ημικυκλίου **θα εξετάσουμε την σταθερά π_2 και την σχέση που φαίνεται να έχει για τους Βαβυλώνιους με την τιμή π_1**
- και τέλος **θα εξετάσουμε την προέλευση της τιμής π_1=3 και το ενδεχόμενο καλύτερων προσεγγιστικών τιμών**

έτσι και στην σύγχρονου τύπου εξηκονταδική αναπαράσταση οι αριθμοί παρουσιάζονται με υποδιαστολή που χωρίζει το ακέραιο μέρος από το «εξηκονταδικό», με την διαφορά ότι τα ψηφία του κάθε πολλαπλάσιου ή υποδιαίρεσης του 60, μπορεί να είναι από το 0 μέχρι το 59 (και όχι από το 0 έως το 9) όποτε έχουμε για παράδειγμα:

$$\mathbf{20\ 59\ 10\ 08,\ 01\ 38\ 00\ 04 = 20\times 60^3 + 59\times 60^2 + 10\times 60^1 + 8\times 60^0 + 1\times 60^{-1} + 38\times 60^{-2} + 0\times 60^{-3} + 4\times 60^{-4}}$$

[21] Τον πίνακα αυτόν παρουσιάζει και ο Smeur στο άρθρο του "**On the value equivalent to π in ancient mathematical texts**", Arch. Hist. Exact Sci. 6 (1970).

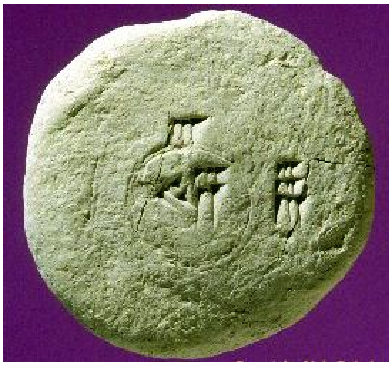
2.2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Το εμβαδόν ενός κύκλου βρίσκεται πάντα, λαμβάνοντας 0,05 (= $0\times 60^1 + 5\times 60^{-1}$) φορές το τετράγωνο της περιφέρειας, δηλαδή λαμβάνοντας το $\frac{5}{60}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$ του τετραγώνου της περιφέρειας)

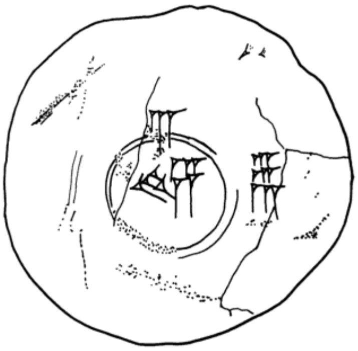
Σύγχρονη απόδοση: $\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\mathbf{C}^2}$

Πριν περάσουμε στον σχολιασμό αυτής της μεθόδου ας δούμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Μία από τις πλέον γνωστές πινακίδες που σώζονται είναι η **YBC 7302**. Η πινακίδα αυτή όπως φαίνεται στην φωτογραφία είναι κυκλικού σχήματος με διάμετρο



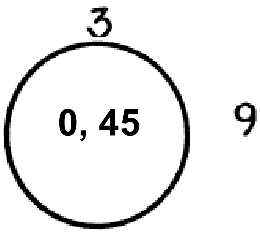
YBC 7302



Σχέδιο της YC 7302 [Robson (2008), Mathematics in Ancient Iraq, σελ.66]

περίπου 6 cm. Πρόκειται δηλαδή για μία πινακίδα που εύκολα κρατάει ένας μαθητευόμενος γραφέας στην παλάμη του προκειμένου να λύσει ένα δοσμένο πρόβλημα. Η Robson έχει προτείνει ότι αυτού του είδους οι πινακίδες με άλλοτε σωστές και άλλοτε λανθασμένες λύσεις συγκεκριμένων προβλημάτων χρησίμευαν ως **«πρόχειρο»** για τους μαθητευόμενους γραφείς, προτείνοντας έτσι μία νέα κατηγοριοποίηση.

Παρατηρούμε ότι επάνω της είναι σχηματισμένος ένας κύκλος και στο πάνω μέρος του, σχεδόν απάνω στην περιφέρεια είναι χαραγμένος ο αριθμός 3. Δεξιά από τον κύκλο και λίγο πιο απόμερα είναι χαραγμένος ο αριθμός 9, ενώ εντός του κύκλου είναι χαραγμένος ο αριθμός 45 που όπως θα διαπιστώσουμε αναφέρεται στον εξηκονταδικό αριθμό 0, 45 (= $0\times 60^0 + 45\times 60^{-1}$)



Το πρόβλημα λοιπόν που απεικονίζεται στην πινακίδα είναι η εύρεση του εμβαδού ενός κύκλου δεδομένου ότι η περιφέρεια είναι ίση με 3. Πρώτα υπολογίζεται το τετράγωνο της περιφέρειας, και αναγράφεται δίπλα το αποτέλεσμα **9** και στην συνέχεια το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με την **σταθερά 0, 05** (δηλαδή με $\frac{1}{12}$), δίνοντας **0, 45** (δηλαδή $\frac{45}{60}=\frac{9}{12}$).

Σύγχρονη απόδοση: Αν C = 3, τότε $E = \frac{1}{12}C^2 = \frac{1}{12}3^2 = \frac{9}{12}$

Η σταθερά **0, 05** συναντάται σε πληθώρα πινακίδων και αναφέρεται ως συντελεστής **«του κύκλου»**. Στον παρακάτω πίνακα[22] υπάρχουν μερικές από αυτές της αναφορές:

	Με δεδομένο:	Υπολογίζεται:		
BM 85194:				
Πρόβλημα 4:	Περιφέρεια: 1 30	Εμβαδό:	**5′** × $(1\ 30)^2$	= 11 15
Πρόβλημα 14:	Περιφέρεια: 4	Εμβαδό:	**5′** × $(4)^2$	= 1, 20
BM 85196:				
Πρόβλημα 2:	Περιφέρεια: 4	Εμβαδό:	**5′** × $(4)^2$	= 1, 20
Πρόβλημα 16:	Περιφέρεια: 0, 30	Εμβαδό:	**5′** × $(\ 0,\ 30\ )^2$	= 0, 01 15
VAT 7848(4):	Περιφ.: 1 00 00	Εμβαδό:	**5′** × $(1\ 00\ 00)^2$	= 5 00 00 00
YBC 11120:	Περιφέρ.: 1, 30	Εμβαδό:	**5′** × $(1\ 30)^2$	= 0, 11 15
YBC 7997:	Περιφέρ.: 1, 30	Εμβαδό:	**5′** × $(1\ 30)^2$	= 0, 11 15

Τέλος προκειμένου να πάρουμε μία καλύτερη ιδέα του πως οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι της περιόδου αυτής χρησιμοποιούσαν τις λεγόμενες σταθερές, παρουσιάζουμε αποσπάσματα από το μεταφρασμένο κείμενο άλλης πινακίδας της ίδιας περιόδου που επίσης περιλαμβάνει συλλογή προβλημάτων, της **Haddad 104**[23], η οποία έχει ερμηνευτεί στο σύνολό της ικανοποιητικά. Στην πινακίδα αυτή τα έξι πρώτα προβλήματα αφορούν τον υπολογισμό όγκων δοχείων κυλινδρικού σχήματος αλλά και δοχείων σε σχήμα κόλουρου κώνου (προβλήματα παρόμοια με αυτά που συναντάμε στην BM 85194). Προβλήματα τέτοιου είδους συναντάμε συχνά και σε άλλες πινακίδες και για την επίλυσή τους απαιτείται ο υπολογισμός εμβαδού κύκλου ο οποίος όπως θα δούμε στην συνέχεια υπολογίζεται μέσω της περιμέτρου. Συγκεκριμένα δίνεται ως δεδομένο μία (στην περίπτωση του κυλίνδρου) ή δύο διατομές του δοχείου και τριπλασιάζοντας τες βρίσκονται οι αντίστοιχες περιφέρειες. Εντός παρενθέσεων οι λέξεις είναι επεξηγήσεις που δεν περιέχονται στο πρωτότυπο κείμενο, ενώ τα αποσιωπητικά δηλώνουν απλώς ότι παραλείπουμε τμήματα του πρωτότυπου κειμένου.

Haddad 104, Πρόβλημα 1:

Μετάφραση:

Η μέθοδος του κορμού (*κυλίνδρου*)

Η «διαχωριστική γραμμή» (διατομή του στερεού) είναι 0, 05 cubit. Πόση ποσότητα είναι ικανός να αποθηκεύσει;

[22] Όπως και ο προηγούμενος, αυτός ο πίνακας παρουσιάζεται και από τον Smeur.

[23] Al-Rawi, F. and Roaf, M. 'Ten Old Babylonian mathematical problems from Tell Haddad'. *Sumer* 43, 175-218 (1984)

Όταν προχωρήσεις: Βάλε το βάθος ίσο με την διαχωριστική γραμμή. Κάνε 0, 05 το βάθος έτσι ώστε το 1 να εμφανιστεί. **Τριπλασίασε** το 0, 05, **την διαχωριστική γραμμή**, έτσι θα εμφανιστεί το 0, 15. Ο κύκλος (περιφέρεια) του κορμού είναι 0, 15. Συνδύασε (ύψωσε δηλαδή στο τετράγωνο) το 0, 15, έτσι το 0, 03 45 θα εμφανιστεί. **Πολλαπλασίασε** το 0, 03 45 **με το 0, 05, την σταθερά του κύκλου**, έτσι το 0, 00 18 45, **η επιφάνεια, θα εμφανιστεί**. Πολλαπλασίασε το 0, 00 18 45 με 1, το βάθος, έτσι το 0, 00 18 45, ο όγκος, θα εμφανιστεί. (…στην συνέχεια γίνεται μετατροπή των μονάδων πολλαπλασιάζοντας πάλι με γνωστές αριθμητικές σταθερές …) Αυτή είναι η μέθοδος.

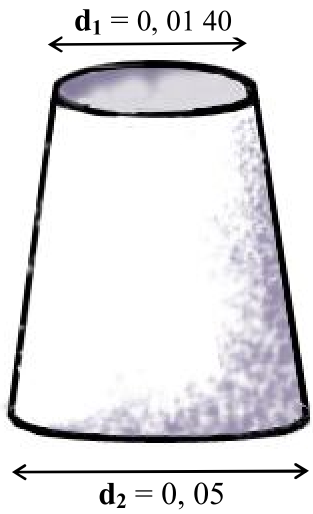
Σύγχρονη απόδοση:
Αν **υ** το βάθος και **d** η διατομή, δηλαδή η διάμετρος της βάσης, **C** η περιφέρεια της κυκλικής βάσης, **E** το εμβαδόν της βάσης και **V** ο όγκος του κυλίνδρου,
με γνωστά το d και το υ και υπολογίζουμε με την εξής μέθοδο:

$$\mathbf{C = 3\,d\,,\ \ E = \frac{1}{12}C^2\ \text{και}\ V = E\,\upsilon}$$

Haddad 104, Πρόβλημα 2:

Μετάφραση:
(Η μέθοδος του κορμού – *κόλουρου κώνου*)

Αν ένας κορμός, έχει πυθμένα (κάτω διατομή) 0, 05 και κορυφή (άνω διατομή) 0, 01 40 καλάμια (μονάδα μήκους), Πόσους κόκκους περιέχει (πόσος είναι ο όγκος);



Όταν προχωρήσεις: Βάλε 0, 30 καλάμια (μονάδα μήκους) το μήκος του κορμού σε βάθος έτσι ώστε το 6 να εμφανιστεί. Επιστροφή (στη μέθοδο υπολογισμού): Πρόσθεσε και τμήσε (δια δύο), τον πυθμένα (κάτω διατομή) 0, 05 και την κορυφή (άνω διατομή) 0, 01 40, έτσι θα εμφανιστεί το 0, 03 20 (μέση διατομή). **Τριπλασίασε** το 0, 03 20, έτσι το 0, 10, **ο κύκλος του κορμού θα εμφανιστεί**. Συνδύασε (ύψωσε στο τετράγωνο δηλαδή) το 0, 10, έτσι το 0, 01 40 θα εμφανιστεί. **Πολλαπλασίασε** το 0, 01 40 **με το 0, 05, την σταθερά**, έτσι το 0, 00 08 20, **η επιφάνεια, θα εμφανιστεί**. Πολλαπλασίασε το 0, 00 08 20 με 6, το μήκος (βάθος) του κορμού, έτσι το 0, 00 50, ο όγκος, θα εμφανιστεί. (…στην συνέχεια γίνεται μετατροπή των μονάδων πολλαπλασιάζοντας πάλι με γνωστές αριθμητικές σταθερές …)

Σύγχρονη απόδοση:
Αν **υ** το βάθος, $\mathbf{d_1}$ η άνω διατομή, δηλαδή η διάμετρος της μικρής εδώ βάσης, $\mathbf{d_2}$ η κάτω διατομή, δηλαδή η διάμετρος της μεγάλης εδώ βάσης, **d** η μέση τιμή για την διατομή, **C** η περιφέρεια του μέσου αντίστοιχα κύκλου, **E** το εμβαδόν του μέσου αυτού κύκλου και **V** ο όγκος του κυλίνδρου,
με γνωστά τα d_1, d_2 και υ, υπολογίζουμε με την εξής μέθοδο:

$$\mathbf{d = \frac{d_1 + d_2}{2},\ \ C = 3\,d\,,\ \ E = \frac{1}{12}C^2\ \text{και}\ V = E\,\upsilon}$$

Παρατηρήσεις:

- **σχετικά με τον τετραγωνισμό:**

Να παρατηρήσουμε γενικά ότι το εμβαδόν υπολογίζεται πάντα μέσω της περιμέτρου και δεν παρατηρείται κάποιος άμεσος συσχετισμός με το τετράγωνο σχήμα, όπως θα λέγαμε ότι συμβαίνει ίσως με τα αντίστοιχα παραδείγματα του αιγυπτιακού πολιτισμού.

- **που σχετίζονται με το π_2:**

Αρχικά οι ιστορικοί των μαθηματικών περιορίζονταν στο να παρατηρούν ότι «για τους αρχαίους Βαβυλωνίους το π λαμβάνεται ως 3» [Neugebauer & Sachs, (1945), Van der Waerden(1950)]. Το πλέον σωστό, ωστόσο, είναι να παρατηρήσουμε ότι **θεωρούσαν στους υπολογισμούς τους την περιφέρεια** ή αλλιώς τον κύκλο (αφού αυτά τα δύο εκφράζονται στα κείμενα με την ίδια λέξη) **ως τριπλάσια της διαμέτρου**. Ενώ αρκετοί ερευνητές θεωρούν ότι ήταν γνωστή η ανακρίβεια της τιμής 3, η τιμή αυτή συνεχίστηκε να χρησιμοποιείται και σε μεταγενέστερες περιόδους για ευκολία στους υπολογισμούς. Στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε μία ειδική περίπτωση, όπου έμμεσα έστω, προκύπτει μία καλύτερη προσέγγιση.

Η φράση «ο λόγος της περιμέτρου προς την διάμετρο» είναι τρία, είναι καταχρηστική αφού η έννοια του λόγου, όπως αυτή ορίστηκε αργότερα από τους αρχαίους Έλληνες δεν ήταν γνωστή στους Βαβυλωνίους. Αντιθέτως, χρησιμοποιούσαν με αλγεβρικό τρόπο την έννοια του «σταθερού συντελεστή». Ωστόσο επειδή στην γλώσσα μας είναι δύσκολο μερικές φορές να αποδώσουμε την σχέση δύο μεγεθών με διαφορετικό τρόπο, δεν θα καταφέρουμε να αποφύγουμε την χρήση της σε ορισμένα σημεία, αφού έχουμε ήδη κάνει την διευκρίνιση.

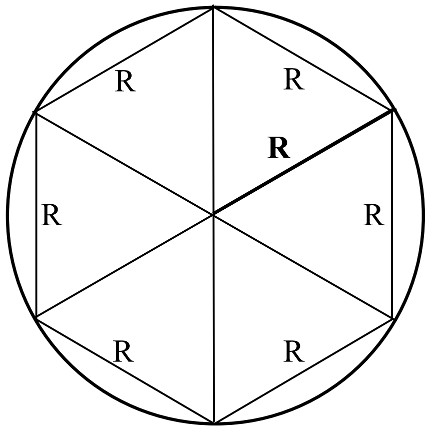
Με την εξέλιξη της έρευνας, επισημανθηκε ο διαχωρισμός των τιμών π_1 και π_2, με αποτέλεσμα να ελέγχεται για τους διάφορους πολιτισμούς η γνώση ή όχι της ισότητας των δύο τιμών. Τα συμπεράσματα στην περίπτωση των μαθηματικών της αρχαίας Μεσοποταμίας ήταν ότι «οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν ότι $\pi_1 = \pi_2$». Παρ' όλα αυτά οι συλλογισμοί των ερευνητών περιείχαν συχνά αναχρονισμούς, ενώ ο στόχος ήταν ακριβώς να τους αποφύγουν.

Να κλείσουμε παρατηρώντας ότι όσο αφορά τον κύκλο, το σύνολο των πηγών μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός του βασίζεται πάντα στην περιφέρεια και όχι στην διάμετρο ή την ακτίνα. Αν δεχθούμε ότι έμμεσα εμπλέκεται η διάμετρος, η σχέση που συνδέει το εμβαδό με αυτήν δεν σχετίζεται με τον αριθμό 3 αλλά με το ¾ (= 0, 45) μία σταθερά που δεν συναντάμε πουθενά στις υπάρχουσες πηγές. Αντιθέτως το εμβαδόν του ημικυκλίου που φαίνεται στην πλειοψηφία των πηγών να υπολογίζεται ανεξάρτητα από αυτό του κύκλου εμπλέκει άμεσα την ακτίνα (ως ύψος!). Πιθανώς είναι αυτοί οι υπολογισμοί που οδήγησαν στην τιμή 1/12 που συναντάμε ως «σταθερά του κύκλου» για το εμβαδόν. Αλλά στο συγκεκριμένο ζήτημα θα αναφερθούμε αφού πάρουμε μία εικόνα και από τον κινέζικο πολιτισμό, σε ξεχωριστή παράγραφο που θα πραγματεύεται το εμβαδόν κυκλικών τμημάτων σε διάφορους πολιτισμούς.

- **που σχετίζονται με το π_1:**

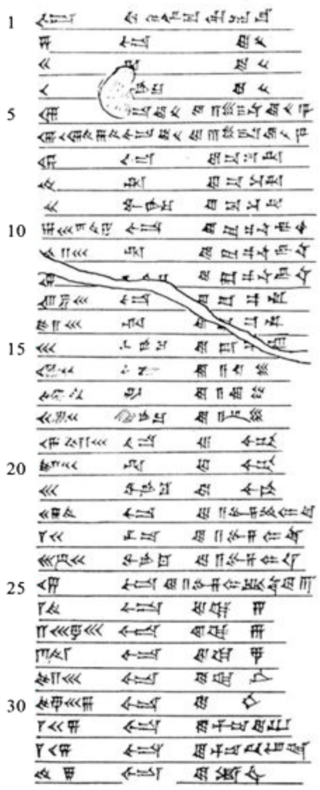
Ενδεχομένως η τιμή 3 να έχει προκύψει από μετρήσεις των δύο μεγεθών, περιφέρειας και διαμέτρου, σε διάφορους κύκλους. Ωστόσο, επειδή σχέση C=3d είναι σημαντική όχι μόνο όσο αφορά τον υπολογισμό της σταθεράς 3 αλλά και όσο αφορά την γενίκευση της ισχύος της σε όλους του κύκλους, πολύ ερευνητές ωθήθηκαν στο να θεωρήσουν ότι οι συλλογισμοί που κατέληξαν σε αυτήν την πρώτη έστω προσεγγιστική τιμή 3, βασίστηκαν σε μία γεωμετρική αντίληψη.

Συχνά συναντάμε στην βιβλιογραφία την συσχέτιση του τύπου C=3d για τον κύκλο με τον υπολογισμό της περιφέρειας ενός κανονικού εξαγώνου. Υποτίθεται εύλογα ότι θεωρώντας ένα εγγεγραμμένο εξάγωνο στον κύκλο και παρατηρώντας ότι αυτό αποτελείται από 6 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά μήκους ίδιου με την ακτίνα του κύκλου, διαπίστωσαν κάποια στιγμή ότι η περίμετρος του εξαγώνου, είναι 6R. Αν οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι λοιπόν, θεωρούσαν το εξάγωνο προσέγγιση του κύκλου, θεώρησαν κατ' αυτόν τον τρόπο το μήκος 6R ως προσέγγιση της περιφέρειας του κύκλου, οπότε C = 3d.



Η παρατήρηση αυτή ωστόσο:
(A) προϋποθέτει ότι η έννοια των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων ήταν γνωστή στους γραφείς της Μεσοποταμίας και
(B) ότι αμέσως μετά από έναν τέτοιο συλλογισμό προκύπτει το συμπέρασμα ότι η τιμή 3 για τον κύκλο είναι μικρότερη από την πραγματική.

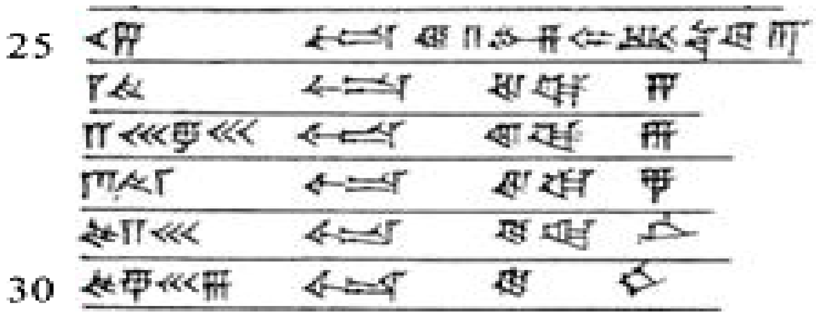
Την τελευταία παρατήρηση είχε κάνει τουλάχιστον από το 1945 ο Neugebauer[24], την οποία φάνηκε να επιβεβαιώνει μία σημαντική δημοσίευση των **Bruins και Rutten**[25] το **1961**, που παρουσίαζε μία συλλογή πινακίδων που ανακαλύφθηκαν στην περιοχή της Σούσα από γάλλους αρχαιολόγους το 1936. Η συλλογή αυτή έμεινε με την επωνυμία «**μαθηματικά κείμενα από την Σούσα**» και συμβολικά (**TMS**), από τον αντίστοιχο γαλλικό τίτλο της δημοσίευσης. Σε κάποιες από αυτές περιέχονταν παρατηρήσεις σχετικά με την μέτρηση κανονικών πολυγώνων και σε ορισμένες περιπτώσεις συμπεριλαμβάνονταν σχήματα, ενώ ήταν φανερό ότι αυτά τα πολύγωνα θεωρούνταν εγγεγραμμένα σε κύκλους. Αυτό που παρουσίασε μεγάλο ενδιαφέρον ωστόσο, είναι το γεγονός ότι οι συγγραφείς αυτής της πρώτης ερμηνείας των πινακίδων της Σούσα υποστήριξαν ότι σε έναν κατάλογο με γεωμετρικές σταθερές (Κείμενο III, TMS 3), συμπεριλαμβάνεται μια «βελτιωτική» σταθερά για τον κύκλο, που μεταφραζόταν ως γνώση μίας καλύτερης προσέγγισης του π από την τιμή 3.


TMS 3

Μεγάλη παραφιλολογία αναπτύχθηκε από την στιγμή εκείνη κι έπειτα για το θέμα, χωρίς ωστόσο οι

[24] *Mathematical Cuneiform Texts,* σελ. 59 σημείωση 152k
[25] Bruins, E. M. and Rutten, M. (1961). *Textes mathématiques de Suse*, Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV, Paul Geuthner, Paris.

περισσότεροι ερευνητές να έχουν στην διάθεσή τους το πρωτότυπο κείμενο. Οι ερμηνείες που δόθηκαν είναι πολλές[26] και εδώ θα αρκεστούμε στην παρουσίαση που κάνει ο ίδιος ο Neugebauer, σε σχετική αναφορά του στην δημοσίευση των Bruins και Rutten[27], καθώς και στην πιο σύγχρονη και συγκρατημένη αναφορά της E. Robson[28].



Στις γραμμές 26, 27 και 28 του τρίτου κειμένου (TMS 3) από αυτά που συμπεριλαμβάνει η προαναφερόμενη συλλογή συναντάμε όπως φαίνεται και στο παραπάνω αντίγραφο του πρωτοτύπου, τις σταθερές: 1,40 ($= 1\times 60^{0}+ 40\times 60^{-1}$),
2, 37 30 ($=2\times 60^{0}+ 37\times 60^{-1}+ 30\times 60^{-2}$), και 3, 41($=3\times 60^{0}+ 41\times 60^{-1}$), οι οποίες σχετίζονται αντίστοιχα με κανονικά πεντάγωνα, εξάγωνα και επτάγωνα και επιδέχονται την εξής ερμηνεία:

$$\mathbf{A_5 = 1{,}40 \cdot s_5^2}$$
$$\mathbf{A_6 = 2,\ 37\ 30 \cdot s_6^2}$$
$$\mathbf{A_7 = 3,\ 41 \cdot s_7^2}$$

όπου A_n είναι η επιφάνεια και s_n η πλευρά του κανονικού n-γώνου[29].

Η Robson συμπληρώνει[30] ότι στο δεύτερο κείμενο (TMS 2) στα σχήματα που παριστάνουν αντίστοιχα ένα κανονικό πεντάγωνο, ένα εξάγωνο και ένα επτάγωνο, οι αριθμοί που σημειώνονται επιβεβαιώνουν την χρήση αυτών των σταθερών για την εύρεση του αντίστοιχου εμβαδού σε κάθε περίπτωση.

Για να κλείσουμε όσο αφορά την προϋπόθεση (Α) να αναφέρουμε πάλι σύμφωνα με την Robson ότι τα κανονικά πολύγωνα, εκτός του ισόπλευρου τριγώνου, εμφανίζονται μόνο στα κείμενα της Σούσα, (ανατολική Μεσοποταμία), ενώ αρχιτεκτονικές κατασκευές με κίονες τοποθετημένους στις κορυφές κανονικών εξαγώνων και οκταγώνων συναντάμε στην βόρεια Μεσοποταμία από τα τέλη της τρίτης χιλιετίας π.Χ. και μετά, πράγμα που σημαίνει ότι οι αντίστοιχες γεωμετρικές έννοιες ήταν ίσως γνωστές και σε εκείνες τις περιοχές.

Τώρα όσο αφορά το (Β), δηλαδή ότι ο συσχετισμός του κανονικού εξαγώνου, όπως είχε αρχικά υποθέσει και ο Neugebauer, πιθανώς να οδήγησε σε καλύτερες προσεγγίσεις για την σχέση της διαμέτρου με της περίμετρο, κάποια στοιχεία μπορούμε να πάρουμε από την γραμμή 30 του προηγούμενου αποσπάσματος του τρίτου κειμένου (TMS 3), όπου συναντάμε την σταθερά **0, 57 36**

---

[26] Π.χ. η εργασία των Muroi, Kazuo (1992). *'Reexamination of Susa mathematical text no. 3: alleged value pi=3 1/8'*. Historia Scientiarum (2) 2, 45-49, στην οποία προτείνεται ότι η σταθερά δεν σχετίζεται με τον κύκλο αλλά με ορθογώνιο τρίγωνο.

[27] O. Neugebauer (1969), The Exact Sciences in Antiquity, Dover,. New York,. (επανέκδοση της 2η έκδοσης που αρχικά δημοσιεύτηκε το 1957 από το Brown Univ. Press)

[28] Robson, E. (1999) *Mesopotamian mathematics, 2100-1600 BC : technical constants in bureaucracy and education,* Oxford University Press

[29] O. Neugebauer (1969), σελ. 47

[30] Robson, E. (1999) σελ. 48-50

Γραμμή 30 της πινακίδας TMS 3,
βάσει της αντίστοιχης έκδοσης των Bruins και Rutten.

Για την γραμμή αυτή δεν έχει δοθεί κοινώς αποδεχτή ερμηνεία, τόσο για την ανάγνωση του αριθμού που σημειώνεται αριστερά όσο και για την σημασία της τελευταίας λέξης στα δεξιά.

Ο Neugebauer αναφερόμενος[31] σε μία προκαταρκτική δημοσίευση των Bruins και Rutten, σημειώνει ότι αν θεωρήσουμε C_6 την περίμετρο του κανονικού εξαγώνου, C την περιφέρεια του κύκλου, η ερμηνεία του κειμένου είναι η εξής:

$$\mathbf{C_6 = 0,\ 57\ 36 \cdot C^2}$$

Συμπληρώνει δε ότι αφού $\mathbf{C_6 = \frac{3}{\pi} \cdot C}$, η σταθερά αυτή υποδηλώνει την προσέγγιση: $\boldsymbol{\pi \approx 3,\ 7\ 30 = 3\frac{1}{8}}$.

Οι ίδιοι οι Bruins και Rutten κάνοντας έναν πιο αναχρονιστικό και πολύπλοκο συλλογισμό[32] κάνουν λόγο για **«cercle plus parfait»**[33], δηλαδή για βελτιωμένο κύκλο. Τον όρο αυτό δικαιολογούν με τον εξής τρόπο:

Η σταθερά **0, 57 36** = $0\times 60^0 + 57\times 60^{-1} + 36\times 60^{-2} = \frac{57}{60} + \frac{36}{3600} = \mathbf{\frac{24}{25}}$ πολλαπλασιαζόμενη με την σταθερά του κύκλου **0, 05** $= \mathbf{\frac{1}{12}}$ δίνει την «βελτιωμένη σταθερά $\mathbf{\frac{24}{25} \times \frac{1}{12} = \frac{2}{25}}$, δηλαδή την τιμή **0, 04 48**.

<u>Συνοψίζοντας</u>:

Η σταθερά που εμφανίζεται στο κείμενο αν θεωρήσουμε ότι σχετίζεται με κάποιου είδους βελτίωση των ήδη γνωστών και συνηθισμένων σταθερών 3 και 1/12 που χρησιμοποιούνται στους τύπους C=3d και $E=1/12C^2$ για τους υπολογισμούς της περιφέρειας και του εμβαδού αντίστοιχα, τότε αυτή θα είναι της εξής μορφής:

$$\mathbf{C = 3 \times d \quad \rightarrow \quad C = 3,\ 7\ 30 \times d}$$
$$\mathbf{E = 0,\ 05 \times C^2 \quad \rightarrow \quad E = 0,\ 04\ 48 \times C^2}$$

Η τιμή 3, 7 30 που στην βιβλιογραφία συναντάμε ως $\pi_1 = 3\frac{1}{8}$ ή $\pi_1 = 1{,}125$ και χαρακτηρίζεται ως «καλύτερη προσέγγιση του π γνωστή στους Βαβυλώνιους», δεν απαντάται πουθενά στις υπάρχουσες πηγές.

Η τιμή ωστόσο 0, 04 48 ή αλλιώς $\frac{2}{25}$ συναντάται όπως σημειώνει η Robson[34] σε πέντε λίστες με σταθερές αλλά ποτέ μεταξύ γεωμετρικών σταθερών και έτσι δεν φαίνεται καθαρά κάπου ότι αφορά στον κύκλο.

---

31 O. **Neugebauer** (1954), Στην επανέκδοση (1969) σελ 47
32 Bruins, E. M. and Rutten, M. (1961), σελ. 33
33 Bruins, E. M. and Rutten, M. (1961), σελ. 26
34 Robson, E. (1999) σελ. 37

2.3 Υπολογισμοι που σχετιζονται με τον κυκλο στα Μαθηματικα της Αρχαιας Κινας

Ο πολιτισμός της Κίνας θεωρείται αδιαμφισβήτητα ένας από τους αρχαιότερους πολιτισμούς. Η τέχνη των αριθμών και των υπολογισμών υπήρξε χαρακτηριστική από τα πρώτα δείγματα της κινέζικης παράδοσης, τόσο για την αστρονομία όσο και για το εμπόριο που αποτελούσαν για ξεχωριστούς λόγους το βασικό εφαλτήριο της μαθηματικής ανάπτυξης.

Η λέξη **Shu (術)** εκτός από την γενική σημασία της «τέχνης» χρησιμοποιείται επίσης για να εκφράσει την διαδικασία, την μέθοδο, το επινόημα ή αλλιώς το τέχνασμα. Με αυτή την λέξη που συχνά εμφανίζεται σε τίτλους κλασικών μαθηματικών κειμένων, να δίνεται μία εικόνα για την αντίληψη της αρχαίας αυτής παράδοσης όσο αφορά την μαθηματική γνώση.

Δυστυχώς «η καταστροφή των βιβλίων»[35] τον 2^{ο} αι. π.Χ., λίγο πριν την εδραίωση της Δυναστείας των Han, έχει συντελέσει στην έλλειψη πρώιμων πηγών. Μέχρι πρόσφατα το αρχαιότερο κείμενο με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο ήταν μία έκδοση του 3^{ο} αιώνα μ.Χ., εποχή στην οποία τοποθετούνται τα σημαντικότατα σχόλια τα οποία συμπεριλάμβανε. Το έργο στο οποίο αναφερόμαστε έχει τίτλο *Jiu Zhang Suan Shu* και στο εξής για συντομία θα το αναφέρουμε ως Εννέα Κεφάλαια, ενώ ο σχολιαστής του 3^{ου} αι. μ.Χ., που συνέδεσε το όνομά του άρρηκτα με το έργο αυτό είναι ο Liu Hui (το 263 μ.Χ.). Ο μελετητής αυτός αναφέρει στο εισαγωγικό σημείωμα των σχολίων του (Κεφάλαιο 7) ότι το περιεχόμενο του βιβλίου αυτού περιλαμβάνει και γνώσεις που είχαν προηγηθεί της καταστροφής των συγγραμμάτων.

Πρόσφατη αρχαιολογική ανακάλυψη, μόλις το 1984, έφερε στο φώς το μαθηματικό κείμενο με τίτλο «Suan shu shu», που χρονολογείται ότι είχε συγγραφεί περίπου τον 2^{ο} αι π.Χ. και που ενισχύει την άποψη της προγενέστερης προέλευσης. Παρά το γεγονός ότι το επίπεδο των γνώσεων δεν είναι αντίστοιχο, και το ότι οι μέθοδοι πολλές φορές παρουσιάζουν διαφορές, παρατηρούνται ομοιότητες σε λεκτικές εκφράσεις ή αριθμητικά παραδείγματα που δεν μπορούν παρά να οδηγήσουν στο συμπέρασμα μίας κοινής προέλευσης.

2.3.1 «Η τέχνη των αριθμητικών μεθόδων»

算數書 **(Suan shu shu)**

Στην αρχαία Κίνα συνηθιζόταν η κατακόρυφη γραφή από πάνω προς τα κάτω και συχνά χρησιμοποιούνταν λωρίδες από καλάμια μπαμπού, που στην συνέχεια δένονταν και τυλίγονταν σε κυλινδρικό σχήμα. Σε μεταγενέστερους χρόνους η επεξεργασία του ίδιου φυτού, οδήγησε στην ανακάλυψη του χαρτιού στην Κίνα, υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε ευρέος, διαδόθηκε και επικράτησε. Τόσο η ευαισθησία των υλικών αυτών στην φθορά του χρόνου, όσο και η μεγάλη πολιτισμική καταστροφή του «καψίματος των βιβλίων» από τον αυτοκράτορα της Δυναστείας Qin, είχε ως αποτέλεσμα

[35] το έτος 213 π.Χ. υπό την διαταγή του τότε αυτοκράτορα Shi Huang (246-210 BC) της δυναστείας Qin τα περισσότερα γραπτά έργα καταδικάστηκαν σε αφανισμό μαζί με τους συγγραφείς τους και όσους τα έκρυβαν.

την έλλειψη πηγών από προηγούμενους αιώνες. Τα ελάχιστα δείγματα γραφής τέτοιου είδους που σώθηκαν, δεν ήταν κείμενα με μαθηματικό περιεχόμενο.

Μερικές από τις λωρίδες bamboo πάνω στις όποιες είναι γραμμένο το Suan shu shu. Η δεξιά με το μαύρο σημάδι, αναγράφει τον τίτλο του έργου και είναι το πίσω μέρος της λωρίδας No 6, που θα πρέπει να φαινόταν εξωτερικά όταν ο κύλινδρος ήταν διπλωμένος.

Μέχρι πρόσφατα λοιπόν, δεν υπήρχαν δείγματα γραφής που να προηγούνται από τα «Εννέα Κεφάλαια» και να σχετίζονται ικανοποιητικά με αυτά, έτσι ώστε να μπορεί κάποιος να υποστηρίξει το βάθος χρόνου, που αποδίδεται στο έργο από την κινέζικη παράδοση[36]. Ωστόσο αυτό έχει ανατραπεί το τελευταίο διάστημα, μετά από αρχαιολογική ανακάλυψη, το 1983, που έφερε στο φως μία πλούσια συλλογή κειμένων γραμμένων σε λωρίδες από καλάμια μπαμπού, μεταξύ των οποίων και ένα έργο που φέρει τον τίτλο: **Suan shu shu**

Το **Suan shu shu** που μεταφράζεται ως «Η τέχνη των αριθμητικών μεθόδων» αποτελείται από περίπου 7000 κινέζικους χαρακτήρες, γραμμένους σε 190 λωρίδες μπαμπού. Βρέθηκε μαζί με άλλα κείμενα σε έναν τάφο στο Zhangjiashan της περιοχής Hubei, που αποδείχτηκε ότι ήταν κλειστός το 186 π.Χ., την περίοδο της Δυναστείας Han. Παρά το γεγονός ότι η συσχέτισή του με τα «Εννέα Κεφάλαια» μελετάται ακόμα από τους ερευνητές, έχουν παρατηρηθεί σημαντικές αντίστοιχες μεταξύ των δύο έργων. Το κείμενο του Suan shu shu ωστόσο είναι πολύ λιγότερο συστηματοποιημένο και φαίνεται ότι αποτελεί μία συλλογή από λίγο ή πολύ ανεξάρτητες ενότητες που προέρχονται από διαφορετικές πηγές.

Όπως και τα «Εννέα Κεφάλαια» είναι ένα σύνολο προβλημάτων πρακτικού χαρακτήρα, στα οποία δίνονται κάποια στοιχεία ως εκφώνηση και η απάντηση με μία ή

---

[36] Στην εισαγωγή των σχολίων του, ο Liu Hui, αναφέρει ότι μετά την καταστροφή των συγγραμμάτων, οι Zhang Cang (250-152 π.Χ) και Geng Shouchang (1ο αι. π.Χ) επί τη βάσει παλαιών συγγραμμάτων που σώθηκαν σε μη ολοκληρωμένη μορφή, ανασκεύασαν και συμπλήρωσαν, ο καθένας με τον τρόπο του το περιεχόμενο των «Εννέα κεφαλαίων». Οι τίτλοι των έργων τους διέφεραν λίγο από τους παλαιότερους και η ορολογία που χρησιμοποίησαν ήταν πιο πρόσφατη. Τα έργα ωστόσο αυτά δεν σώζονται σήμερα

περισσότερες μεθόδους που δεν δικαιολογείται πως προέκυψαν. Συνολικά τα προβλήματα είναι 69 και μεταξύ αυτών υπάρχουν 6 προβλήματα (55-61) υπολογισμού όγκου για διάφορα στερεά.

Οι υπολογισμοί που αφορούν την κυκλική επιφάνεια θεωρούν ότι ο λόγος περιμέτρου προς διάμετρο είναι 3:1 και αυτό απαντάται στα προβλήματα 58 και 59, όπου υπολογίζεται ο όγκος κώνου με διαφορετική μέθοδο στην κάθε μία, στο πρόβλημα 60, όπου υπολογίζεται ο όγκος κόλουρου κώνου και στο πρόβλημα 61, όπου υπολογίζεται ο όγκος κυλίνδρου.

Εδώ θα αναφερθούμε στο τελευταίο, που έχει τον τίτλο «Κορμός δέντρου ή πηγάδι»:

Πρόβλημα 61 (Λωρίδες 150-151):

井材
圜材穽若它物周二丈四尺深丈五尺積七百廿尺术曰耤[91]周自乘以深乘之十二成一一曰以

乘之卅六成〔一〕 今二千五十五尺分廿

Μετάφραση:

Ένας κορμός - ένα πηγάδι

Ένας κυκλικός κορμός, ένα πηγάδι ή άλλο όμοιο αντικείμενο: Η περιφέρεια είναι 2 *zhāng* και 4 *chí*, το βάθος είναι 1 *zhāng* και 5 *chí* , (τότε) ο όγκος είναι 720 *chí*.
Μέθοδος: Λάβε την περιφέρεια και πολλαπλασίασέ την με τον εαυτό της, πολλαπλασίασε επί το βάθος, σχημάτισε το 1 προς 12.
Ένας (άλλος τρόπος) λέει: Πολλαπλασίασε την περιφέρεια με την διάμετρο και σχημάτισε το 1 προς 4. (…)

Περιεχόμενο:

Υπολογισμός όγκου κυλινδρικού σχήματος

Ο ζητούμενος όγκος προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του βάθους με το εμβαδό της κυκλικής βάσης.

Το εμβαδό του κύκλου φαίνεται ότι υπολογίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους που επιβιώνουν 2 αιώνες αργότερα στο γνωστό μαθηματικό έργο «Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης».

Εμβαδόν κύκλου: $\boxed{\mathbf{E = \frac{C^2}{12}}}$

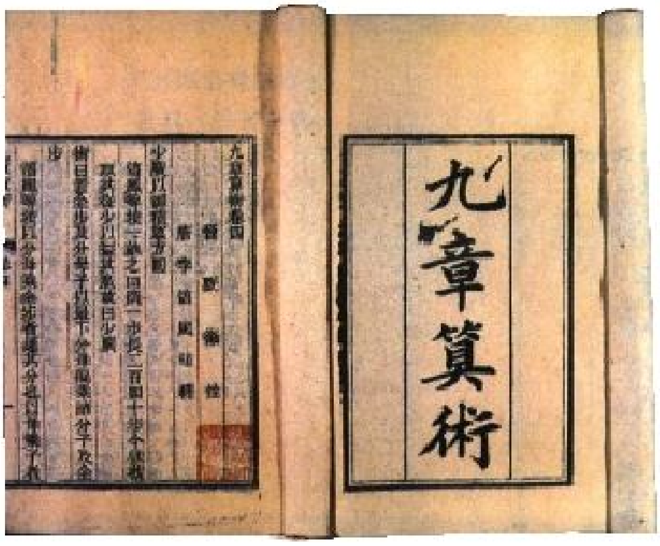
ή $\boxed{\mathbf{E = \frac{1}{4} C \times d}}$

Σχετικά με τις μεθόδους αυτές περισσότερα θα αναφέρουμε αφού παρουσιάσουμε τη μεταγενέστερη αλλά πλέον βασική πηγή μας για τα κινέζικα μαθηματικά

2.3.2 «Τα Εννέα κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης»

九章算術 **(Jiu Zhang Suan Shu)**

Το κυρίαρχο έργο στην ιστορία των μαθηματικών της Κίνας είναι γνωστό με τον τίτλο **Jiu Zhang Suan Shu** (九章算術 **)** που όπως ήδη αναφέραμε μεταφράζεται ως **«Τα εννέα κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης»** και για συντομία από δω και στο εξής θα αναφερόμαστε σ' αυτό ως «**Εννέα Κεφάλαια**». Το έργο αυτό διαμορφώθηκε σε μία πορεία άγνωστου χρονικού διαστήματος και πήρε την τελική του μορφή γύρω στον 1^{o} αι. π.Χ. και στον 1^{o} αιώνα μ.Χ. Είναι ανώνυμο όπως πολλά άλλα κλασικά κείμενα και η αρχική του μορφή μας είναι άγνωστη καθώς επίσης και η εποχή από την οποία προέρχεται.



Μελετήθηκε, συμπληρώθηκε, σχολιάστηκε και αποτέλεσε εγχειρίδιο διδασκαλίας μαθηματικών για αιώνες, τόσο στην Κίνα όσο και σε γειτονικές χώρες και περιοχές μέχρι την επίσημη είσοδο των δυτικών μαθηματικών στην αυτοκρατορία πολύ αργότερα, τον 16^{o} αι. μ.Χ.

Καθοριστικό ρόλο στην ιστορία του έργου αυτού έπαιξαν οι αναλυτικοί σχολιασμοί του **Liu Hui** (劉徽) τον 3^{o} αι. μ.Χ., που στην συνέχεια συμπληρώθηκαν από μεταγενέστερους μαθηματικούς, όπως ο **Zu Chongzhi** (祖沖之) τον 5^{o} αι. μ.Χ. και ο **Li Chunfeng** (李淳風) τον 7^{o} αι. μ.Χ. Περισσότερα για τον σχολιασμό του πρώτου, όσο αφορά την μέτρηση του κύκλου, την χαμένη ανακάλυψη του δεύτερου και τις ιστορικές και συμπληρωματικές σημειώσεις του τελευταίου θα δούμε σε διαφορετικό κεφάλαιο.

Τα «Εννέα Κεφάλαια αποτελούνται από 246 προβλήματα οργανωμένα σε 9 ενότητες και αποτελούν τυπικό παράδειγμα πρώιμων μαθηματικών κειμένων, ανατολικών παραδόσεων: Λίγα προβλήματα ενός συγκεκριμένου τύπου μαζί με τις απαντήσεις, ακολουθούμενες από μία περιγραφή της μεθόδου επίλυσης, χωρίς όμως δικαιολόγηση της μεθόδου αυτής.

Η μέτρηση του κύκλου, παρουσιάζεται στην πρώτη ενότητα του έργου αυτού που έχει τίτλο ***Fang tian*** (方田) και αφορά υπολογισμούς επιφανειών. Αυτή αποτελείται από 38 προβλήματα που αναφέρονται σε χωράφια διαφόρων σχημάτων για τα οποία δίνονται ορισμένα δεδομένα και ζητείται ο υπολογισμός της επιφάνειάς, ενώ μεταξύ αυτών συμπεριλαμβάνονται «ασκήσεις» πάνω στις πράξεις με κλάσματα.

Εμείς ωστόσο θα εστιάσουμε στο πρόβλημα 32 του πρώτου κεφαλαίου, στο οποίο δίνονται τέσσερεις μέθοδοι για τον υπολογισμό κυκλικού χωρίου:

<u>Πρόβλημα 32</u> (1ου κεφαλαίου):

<u>Δεδομένα</u>: 又 有 圓 田， 周 一 百 八 十 一 **步**，
徑 六 十 **步** 、 三分 **步** 之 一 。

<u>Ερώτηση</u>: 問 為 田 幾 何 ？

<u>Απάντηση</u>: 荅 曰 ： 十 一 畝 九 十 **步** 、 十 二 分 **步** 之 一。

<u>1η *μέθοδος*</u>: 術 曰 : 半 周 半 徑 相 乘 得 積 **步** 。

<u>2η *μέθοδος*</u>: 又 術 曰 ： 周 徑 相 乘， 四 而 一 。

<u>3η *μέθοδος*</u>: 又 術 曰 ： 徑 自 相 乘， 三 之， 四 而 一 。

<u>4η *μέθοδος*</u>: 又 術 曰 ： 周 自 相 乘， 十 二 而 一 。

<u>Μετάφραση</u>:

<u>Δεδομένα</u>: Δίνεται ένα κυκλικό χωράφι, με περιφέρεια 181 bu
και διάμετρο 60 1/3 bu

<u>Ερώτηση</u>: Πες: Ποια είναι η επιφάνεια;

<u>Απάντηση</u>: Κάποιος είπε: 11mu 90 1/12 (τετραγωνικά) bu

<u>1η *μέθοδος*</u>: Η μέθοδος λέει: Πολλαπλασιάζοντας το μισό της περιφέρειας με την ακτίνα προκύπτει (το εμβαδόν του κύκλου σε τετραγωνικά) bu.

(Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό: $\boxed{\mathbf{E = \frac{C}{2} \times r}}$)

<u>2η *μέθοδος*</u>: Άλλη μέθοδος λέει: Το ένα τέταρτο του γινομένου της περιφέρειας επί την διάμετρο.

(Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό: $\boxed{\mathbf{E = \frac{1}{4} \times C \times d}}$)

<u>3η *μέθοδος*</u>: Άλλη μέθοδος λέει: Το ένα τέταρτο του τριπλάσιου τετραγώνου της διαμέτρου.

(Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό: $\boxed{\mathbf{E = \frac{1}{4} \times 3\, d^2}}$)

<u>4η *μέθοδος*</u>: Άλλη μέθοδος λέει: Η περιφέρεια στο τετράγωνο διαιρεμένη με δώδεκα.

(Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό: $\boxed{\mathbf{E = \frac{C^2}{12}}}$)

<u>**Παρατηρήσεις**</u>:

1. Όπως ήδη σημειώθηκε στην μετάφραση του προηγούμενου χωρίου, αν C είναι η περιφέρεια του κύκλου και d η διάμετρος αυτού, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}\times\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{d}}{\mathbf{4}} \qquad (1^{\eta} \text{ και } 2^{\eta} \ \textit{μέθοδος})$$

Και αφού ισχύει C = 3d

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{d}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{3d}\times\mathbf{d}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{3d^2}}{\mathbf{4}} \qquad (3^{\eta} \ \textit{μέθοδος})$$

Και αφού ισχύει $d=\frac{C}{3}$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{d}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}{\mathbf{4}\times\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{C^2}}{\mathbf{12}} \qquad (4^{\eta} \ \textit{μέθοδος})$$

2. Η δεύτερη μέθοδος είδαμε ότι ήταν γνωστή τουλάχιστο από τον 2 αι. π.Χ και περιλαμβάνεται με τη ίδια διατύπωση στο Suan Shu Shu. Μας θυμίζει τη σχέση που απέδειξε ο Αρχιμήδης στο έργο του «Κύκλου Μέτρησις». Όπως θα δούμε όμως και στην επόμενη παράγραφο, ο ίδιος τύπος χρησιμοποιείτο για την εύρεση του εμβαδού ημικυκλίου στην αρχαία Μεσοποταμία ($E_{ημ} = \frac{1}{4}C\times R$), πολλούς αιώνες νωρίτερα.

3. Αν και η έννοια του λόγου στα αρχαία κινέζικα μαθηματικά κείμενα διαφέρει κατά πολύ από την αρχαία ελληνική παράδοση που επικράτησε στην δύση το αντίστοιχο διάστημα, είναι κατανοητό από τις πηγές που έχουμε στη διάθεσή μας ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές που μπορεί να πάρουν η περιφέρεια και η διάμετρος ενός κύκλου, ήταν γνωστό ότι είναι σταθερή. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι μέχρι την το διάστημα που το έργο «**Εννέα Κεφάλαια**», πήρε την τελική του μορφή γύρω στον 1^{o} αιώνα π.Χ. και τον 1^{o} αιώνα μ.Χ. οι αρχαίοι Κινέζοι μετρούσαν την περιφέρεια σε σχέση με τον διάμετρο ως 3:1., ή όπως αναχρονιστικά θα λέγαμε, η τιμή του π θεωρείτο ίση με 3.

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε Κινέζους μαθηματικούς που επιχείρησαν ο καθένας με διαφορετικά αποτελέσματα να βελτιώσουν την προσέγγιση 3:1, όπως αυτοί αναφέρονται στα «Αρχεία της Δυναστείας Sui», ενώ θα σταθούμε ιδιαίτερα στους σχολιασμούς που έγιναν στο πρόβλημα 32, που αναφέραμε, σχετικά με την μέτρηση του κύκλου.

2.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

2.4.1 ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ (~1800 Π.Χ.)

Όπως είδαμε στην δεύτερη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου στην Μεσοποταμία στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ. το εμβαδόν του κύκλου υπολογιζόταν ως το ένα δωδέκατο του τετραγώνου της περιφέρειας. Ίσχυε δηλαδή η σχέση $E = \frac{1}{12}C^2$. Στην συνέχεια στην τρίτη παράγραφο συναντήσαμε την ίδια ακριβώς μέθοδο, στα Εννέα Κεφάλαια, που όπως είδαμε θεωρείται ότι βασίζονται σε προγενέστερες πηγές. Τώρα και σε συνδυασμό με τα ευρήματα που έχουμε από τον πολιτισμό της αρχαίας Μεσοποταμίας σχετικά με τον υπολογισμό του ημικυκλίου, θα επιστρέψουμε για να συμπληρώσουμε τα παραπάνω, ενώ στην συνέχεια θα προεκταθούμε στους υπολογισμούς κυκλικών τμημάτων γενικότερα, στους οποίους το ημικύκλιο είναι μία ειδική περίπτωση.

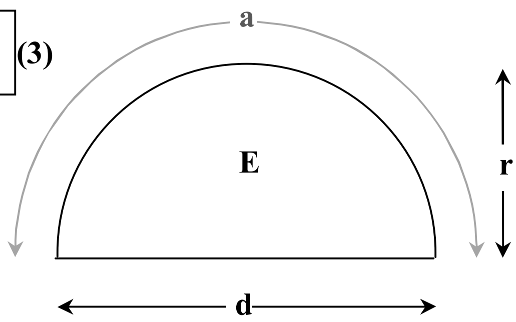
Ας δούμε λοιπόν σε πρώτη φάση πως υπολογιζόταν το εμβαδό ημικυκλίου, το οποίο αναφέρεται στις πηγές ως «μισό φεγγάρι»[37]. Σε λίστες με γεωμετρικούς συντελεστές συναντάμε τους εξής συντελεστές που σχετίζονται με το ημικύκλιο:

Συντελεστής	**Περιγραφή που δίνεται**	**Πηγή**
0.15 ($=\frac{1}{4}$)	ο συντελεστής του ημικυκλίου	YBC 7243
	της επιφάνειας (του ημικυκλίου)	TMS 3
0.10 ($=\frac{1}{6}$)	της επιφάνειας (του ημικυκλίου 2^η)	YBC 7243
0.45 ($=\frac{3}{4}$)	της επιφάνειας του ημικυκλίου 3^η	YBC 5022
0.40 ($=\frac{2}{3}$)	η διάμετρος του ημικυκλίου	TMS 3
0.20 ($=\frac{1}{3}$)	η εγκάρσια γραμμή (ακτίνα) του ημικυκλίου	TMS 3

Η αντίστοιχη χρήση σε προβλήματα και ερμηνεία που τους έχει δοθεί σε σύγχρονο συμβολισμό είναι η εξής:

Η επιφάνεια του ημικυκλίου υπολογίζεται με τους εξής 3 τρόπους:

$\boxed{\mathbf{E = \frac{1}{4}\,a\,d}}$ **(1)** $\boxed{\mathbf{E = \frac{1}{6}\,a^2}}$ **(2)** $\boxed{\mathbf{E = \frac{3}{4}\,d\,r}}$ **(3)**



ενώ η διάμετρος και η ακτίνα αντίστοιχα:

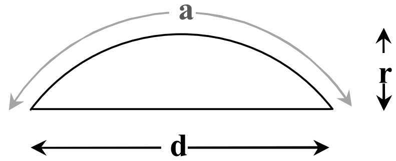
$\boxed{\mathbf{d = \frac{2}{3}\,a}}$ **(4)** $\boxed{\mathbf{r = \frac{1}{3}\,a}}$ **(5)**

όπου:
E επιφάνεια, **a** μήκος τόξου (ημικύκλιο), **r** ακτίνα και **d** διάμετρος.

Η σχέση που δεν σημειώνεται αλλά προκύπτει από ένα δυσανάγνωστο πρόβλημα της πινακίδας BM 85194, είναι η εξής:

$\boxed{\mathbf{a = r + d}}$ **(6)**

Προφανώς η τελευταία σχέση είναι «λάθος» αφού ισχύει μόνο για π = 3, το σημαντικό ωστόσο είναι ότι εφαρμόζεται στο



[37] Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι ο αρχαίος ελληνικός «μηνίσκος» θεωρείτο επίσης «κυκλικό τμήμα» αφού προκύπτει από τον κύκλο και την τομή του από μία γραμμή. Το κυκλικό τμήμα με την σημερινή έννοια προκύπτει από τον κύκλο και την τομή του από μία <u>ευθεία</u> γραμμή. Στην παράγραφο αυτή το κυκλικό τμήμα έχει την δεύτερη έννοια.

συγκεκριμένο πρόβλημα για κυκλικό τμήμα μικρότερο του ημικυκλίου!

Συγκεκριμένα στο πρόβλημα 29 της BM 85194, δίνεται κυκλικό τμήμα με a = 60 και d = 50 και ο γραφέας φαίνεται να υπολογίζει ότι το ύψος ισούται με r = a – d = 60 – 50 = 10.

Πριν περάσουμε ωστόσο στα κυκλικά τμήματα, να παρατηρήσουμε κάτι για τις παραπάνω σχέσεις για το ημικύκλιο:

- Από τις παραπάνω σχέσεις η μόνη που θεωρείται σωστή με τις σύγχρονες γνώσεις είναι η σχέση (1), ακριβώς επειδή δεν περιλαμβάνει το π, που εδώ λαμβάνεται ως 3, ή πιο σωστά δεν χρησιμοποιεί την σχέση (6). Η σχέση αυτή, αποδείχτηκε όπως γνωρίζουμε από τον Αρχιμήδη στα μέσα του 3^{ου} αιώνα π.Χ. με την μέθοδο της εξάντλησης.

- Με γνωστή την σχέση (1) είναι πολύ εύκολο να καταλάβουμε τώρα την προέλευση του συντελεστή $\frac{1}{12}$, της σταθεράς του κύκλου.

Θυμίζουμε ότι στα «Εννέα κεφάλαια» (**Jiu Zhang Suan Shu**) συναντάμε την μέθοδο $\mathbf{E = \frac{3}{4}\, d^2}$ αλλά και τις δύο αρχαιότερες μεθόδους $\mathbf{E = \frac{C^2}{12}\, d^2}$ και $\mathbf{E = \frac{1}{4}\, C \times d}$ που περιέχονται και στο προγενέστερο έργο «**Suan shu shu**». Ίσως λοιπόν να μας βοηθούσε αν βλέπαμε πώς υπολόγιζαν στην Κίνα, το κυκλικό τμήμα στα «Εννέα κεφάλαια» αφού το ημικύκλιο δεν είναι παρά ένα τμήμα του κύκλου.

2.4.2 ΚΙΝΑ (; – 186 Π.Χ)

Στην Κίνα όπως είδαμε, για την εύρεση του εμβαδού του κύκλου, μέχρι και τις αρχές του 2^{ου} αι. π.Χ. που μπορούμε να γνωρίζουμε, χρησιμοποιείτο η **μέθοδος (1)** για μήκος τόξου ίσο με ολόκληρο τον κύκλο δηλαδή για a = C.

Στην Κίνα Στα προβλήματα 35 και 36 του 1^{ου} κεφαλαίου στο **Jiu Zhang Suan Shu** συναντάμε την μέθοδο υπολογισμού κυκλικού τμήματος:

Πρόβλημα 35:

__Δεδομένα__: 今 有 弧 田 ， 弦 三 十 **步** ， 矢 十 五 **步** 。

__Ερώτηση__: 問 為 田 幾 何 ？

__Απάντηση__: 荅 曰 ： 一 畝 九 十 七 **步** 半 。

Πρόβλημα 36:

__Δεδομένα__: 又 有 弧 田 ， 弦 七 十 八 **步** 、 二 分 **步** 之 一 ，
矢 十 三 **步** 、 九 分 **步** 之 七 。

__Ερώτηση__: 問 為 田 幾 何 ？

__Απάντηση__: 荅 曰 ： 二 畝 一 百 五 十 五 **步** 、
八 十 一 分 **步** 之 五 十 六 。

__Μέθοδος__: 術 曰 ： 以 弦 乘 矢 ， 矢 又 自 乘 ， 并 之 ， 二 而 一

<u>Μετάφραση</u>:

(35) *<u>Δεδομένα</u>*: Δοσμένου τώρα ενός κυκλικού τμήματος, του οποίου η χορδή είναι 30 bu και και ύψους[38] 15 bu

<u>Ερώτηση</u>: Πες: Ποια είναι η επιφάνεια;

<u>Απάντηση</u>: Κάποιος είπε: 1 mu 97 $\frac{1}{2}$ (τετραγωνικά) bu

(36) *<u>Δεδομένα</u>*: Δοσμένου ενός άλλου κυκλικού τμήματος, του οποίου η χορδή είναι 78 $\frac{1}{2}$ bu και ύψους 13 $\frac{7}{9}$ bu

<u>Ερώτηση</u>: Πες: Ποια είναι η επιφάνεια;

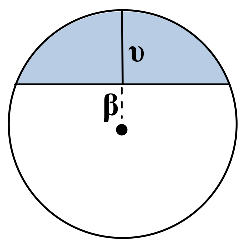
<u>Απάντηση</u>: Κάποιος είπε: 2 mu 155 $\frac{56}{81}$ (τετραγωνικά) bu

<u>Μέθοδος:</u> Πάρε την χορδή, πολλαπλασίασέ την με το ύψος, (ύψωσε) στο τετράγωνο το ύψος, πρόσθεσε, διαίρεσε στα δύο.

<u>Σύγχρονη απόδοση</u> :

$$\boxed{E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}^2)\,\frac{1}{2}} \quad \textbf{(7)}$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\upsilon})\cdot\boldsymbol{\upsilon}$$



Όπου, **β**: η χορδή και
υ: το ύψος του κυκλικού τμήματος
όπως φαίνονται στο σχήμα.

Την μέθοδο αυτή σχολιάζει ο **Liu Hui** το 263 μ.Χ. και τα σχόλια του μαζί με εκείνα που κάνει για την μέτρηση του κύκλου θα τα δούμε αναλυτικά σε ειδικό κεφάλαιο. Εδώ θα αρκεστούμε στο να αναφέρουμε ότι οι παρατηρήσεις του έχουν αρκετά κοινά σημεία με τα αντίστοιχα σχόλια του **Ήρωνα του Αλεξανδρινού** στο έργο του Μετρικά του τον 1^{o} αι. μ.Χ. Ο τελευταίος αναφέρει στο έργο του τον ίδιο τύπο για την εύρεση του εμβαδού κυκλικού τμήματος, αποδίδοντάς τον στους «αρχαίους». Βασική παρατήρηση και των δύο είναι ότι ο παραπάνω τύπος ισχύει μόνο αν λάβουμε το π_1=3. Ας δούμε όμως ποιο αναλυτικά τι παρατήρησε ο Ήρων και σε ποιους «αρχαίους» αναφέρεται.

2.4.3 ΑΙΓΥΠΤΟΣ (300 π.Χ. – 100μ.Χ.)

Στην Αίγυπτο του Μέσου βασιλείου (2025-1773 π.Χ.), μεταξύ των παπύρων που σώζονται μέχρι σήμερα δεν έχουμε κάποιο δείγμα υπολογισμού για κυκλικά τμήματα. Ωστόσο ο **Ήρων ο Αλεξανδρινός** έζησε στην Αίγυπτο τον 1^{o} αι. μ.Χ., όταν η περιοχή είχε ήδη υπάρξει για δύο φορές κατάκτηση των Περσών (525-404 π.Χ. και 343-332 π.χ.) και πιθανότατα όπως προκύπτει από τις πηγές είχε δεχτεί επιρροές από τα μαθηματικά των Μεσοποτάμιων. Επίσης από το 630 περίπου, Έλληνες γνωρίζουμε ότι είχαν ήδη

[38]Σε μία πιο πιστή απόδοση του κειμένου, το ύψος που αναφέρουμε εδώ, μεταφράζεται ως «βέλος», κατ' αναλογία με τους όρους «τόξο» και «χορδή».

μόνιμα εγκατασταθεί στην Αίγυπτο, ενώ από το 332, στους λεγόμενους ελληνιστικούς χρόνους, η Αίγυπτος και ειδικότερα η πόλη της Αλεξάνδρειας, γνώρισε ιδιαίτερη ακμή. Την εποχή που ο Ήρων έγραφε τα «Μετρικά» η Αίγυπτος είχε περάσει στα χέρια των Ρωμαίων. Ο ίδιος ο Ήρων θεωρείται ότι έζησε τόσο στην Αλεξάνδρεια όσο και στην πόλη της Ρώμης. Άφησε έργα θεωρητικά, και μηχανικά, που περιέχουν πλήθος ιστορικών πληροφοριών και κατασκευές πρωτοτύπων μηχανημάτων.

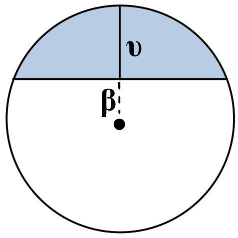
Ήρων ο Αλεξανδρινός Χαρακτικό του 1688.

Στο πρώτο βιβλίο των «**Μετρικών**» (Ι. 26) διαβάζουμε:

«Τὸ δὲ τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ ἔλαττον ἡμικυκλίου οἱ μὲν ἀρχαῖοι ἀμελέστερον ἐμέτρουν. συντιθέντες γὰρ αὐτοῦ τὴν βάσιν καὶ τὴν κάθετον καὶ τούτων τὸ ἥμισυ λαμβάνοντες ἐπὶ τὴν κάθετον ἐποίουν καὶ το(σο)ύτου τὸ ἐμβαδὸν (τοῦ) τμήματος ἀπεφαίνοντο. δοκοῦσι δὲ οὗτοι ἠκολουθηκέναι τοῖς τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου τριπλασίονα ὑπολαμβάνουσιν τῆς διαμέτρου.» (Ι, 30, 1-8)

Δηλαδή μας πληροφορεί ότι οι «ἀρχαῖοι» υπολόγιζαν τα κυκλικά τμήματα, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου με όχι με όχι τόση ακρίβεια, προσθέτοντας την «βάσιν» του κυκλικού τμήματος με την «κάθετον», εννοώντας το «ύψος», και πολλαπλασιάζοντας το μισό αυτού του αθροίσματος με την ίδια «κάθετον». Στην συνέχεια ο Ήρων παρατηρεί, σωστά, ότι η μέθοδος αυτή υπολογισμού ακολουθείται θεωρώντας ότι $\boldsymbol{\pi_1 = 3}$.

<ins>Σύγχρονη απόδοση</ins>:



$$\boxed{\mathrm{E}_{\textbf{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\upsilon}) \cdot \boldsymbol{\upsilon}} \quad \textbf{(8)}$$

Όπου, **β**: «βάση» κυκλικού τμήματος
υ: «ύψος» κυκλικού τμήματος, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Με σύγχρονη ορολογία «βάση» θεωρείται η χορδή του κυκλικού τμήματος και «ύψος» είναι εκείνο το τμήμα της κάθετης, στην χορδή, ακτίνας που βρίσκεται εντός του κυκλικού τμήματος.

Η μέθοδος (8) είναι όπως φαίνεται μία πιο συμπτυγμένη έκφραση της μεθόδου (7) των «Εννέα Κεφαλαίων».

Εξάλλου, όταν το κυκλικό τμήμα που υπολογίζεται κατά τον παραπάνω τρόπο είναι το ημικύκλιο, δηλαδή στην περίπτωση που η «βάση»-χορδή του κυκλικού τμήματος είναι η διάμετρος, το «ύψος» θα αντιστοιχεί στην ακτίνα. Με σύγχρονο συμβολισμό θα έχουμε $\upsilon = \frac{\beta}{2} = R$ και ο προηγούμενος τύπος δίνει:

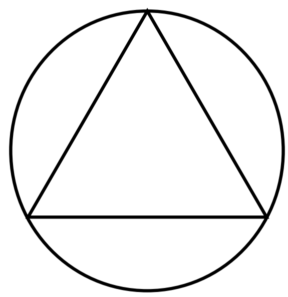
$$\mathrm{E}_{\textbf{ημικυκλίου}} = \frac{1}{2}(\mathbf{2}\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}) \cdot \boldsymbol{\upsilon} = \frac{1}{2}\ \mathbf{3}\boldsymbol{\upsilon}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{3}\ \mathbf{R}^2$$

Δηλαδή όπως σωστά παρατηρεί ο Ήρων οι «αρχαίοι» θεώρησαν στον υπολογισμό τους ότι $\boldsymbol{\pi_1 = 3}$.

Ας δούμε λοιπόν κείμενα εκείνης της περιόδου στην Αίγυπτο: ένα κείμενο γραμμένο στα αιγυπτιακά, όχι πλέον με την ιερατική αλλά την λεγόμενη πλέον δημοτική γραφή (p.Cairo JE 89127-30, 89137-43) και ένα κείμενο στη συνέχεια γραμμένο στα ελληνικά (p.Vindobonensis, G 26740).

<u>Πάπυρος του Καΐρου</u> JE 89127-30, 89137-43

Ο μαθηματικός **πάπυρος του Καΐρου**, όπως συνήθως αποκαλείται, από την περιοχή στην οποία φυλάσσεται, είναι γραμμένος στη δημοτική γραφή και από τις δύο πλευρές. Από την μία του πλευρά είναι γραμμένη μία σειρά νόμων που είναι γνωστή ως **Κώδικας της Ερμούπολης**, ενώ από την άλλη υπάρχει μία συλλογή μαθηματικών προβλημάτων. Και τα δύο κείμενα γράφηκαν την ίδια εποχή και χρονολογούνται στον 3^{ο} αι. π.Χ. Ο πάπυρος βρέθηκε στην νεκρόπολη της αρχαίας πόλης Khmun, που στα ελληνικά είναι γνωστή ως Ερμούπολη η μεγάλη. Τα μαθηματικά προβλήματα, εξέδωσε πρώτος ο **R. A. Parker** [39]και η αρίθμησή που αναφέρουμε εδώ είναι δική του[40].
Εδώ θα αναφερθούμε σύντομα σε δύο από αυτά τα προβλήματα, το **36** και το **37** στα οποία συναντάμε την ίδια μέθοδο για τα κυκλικά τμήματα που αναφέραμε και που αναφέρει και ο Ήρων στα Μετρικά του. Συγκεκριμένα η μέθοδος εφαρμόζεται για κυκλικά τμήματα με τόξο ίσο με το ένα τρίτο και το ένα τέταρτο του κύκλου αντίστοιχα. Τα δύο αυτά είδη κυκλικών τμημάτων συναντώνται, να σημειώσουμε, σε πολλά γεωμετρικά προβλήματα και διακοσμητικά μοτίβα στην αρχαία Μεσοποταμία.



Το πρώτο από αυτά (**DMP #36**) παρουσιάζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι κορυφές του οποίου χωρίζουν τον κύκλο σε τρία τμήματα. Τα αντίστοιχα κυκλικά τμήματα υπολογίζονται με την μέθοδο (8) και αθροίζονται με το εμβαδόν του τριγώνου, για να φανεί στην συνέχεια ότι το συνολικό εμβαδόν είναι σχεδόν ίσο με το εμβαδό του κύκλου που επίσης υπολογίζεται για τον λόγο αυτό με την μέθοδο $\mathbf{E = \frac{3}{4} d^2}$. Να σημειώσουμε ότι δίνεται το μήκος των πλευρών του τριγώνου και για να υπολογιστεί το ύψος του, χρησιμοποιείται το πυθαγόρειο θεώρημα που δεν συναντάται σε προγενέστερες πηγές και το οποίο συναντάμε και σε άλλα προβλήματα του παπύρου. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης των δύο εμβαδών φαίνεται επιβεβαιώνει την σωστή χρήση της μεθόδου (8).

Λεπτομέρεια του DMP #37

Αντίστοιχα το πρόβλημα **DMP #37** παρουσιάζει ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι κορυφές του οποίου χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τμήματα. Τώρα το εμβαδό του κύκλου δίνεται και δίνεται επίσης και η διάμετρος του κύκλου. Το εμβαδό του τετραγώνου, που υπολογίζεται ως το μισό του τετραγώνου της διαμέτρου, αθροίζεται με τα τέσσερα κυκλικά τμήματα που επίσης υπολογίζονται με την μέθοδο (8). Το αποτέλεσμα συγκρίνεται με το δοσμένο εμβαδό του κύκλου και «επιβεβαιώνει και σε αυτήν την περίπτωση την χρήση της μεθόδου (8).

Όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει η ίδια μέθοδος βρίσκει εφαρμογή και στην περίπτωση του ημικυκλίου πάντα λαμβάνοντας το π = 3). Ένα τέτοιο παράδειγμα εφαρμογής συναντάμε σε έναν πάπυρο της ελληνιστικής περιόδου, γραμμένο στην ελληνική γλώσσα (Vindobonensis, G 26740)

[39] R.A., Parker, (1972). *Demotic Mathematical Papyri.* , Brown Univ. Press, Providence, RI
[40] DMP 36 και DMP 37

Πάπυρος Vindobonensis, G 26740

Ο πάπυρος αυτός περιέχει πέντε γεωμετρικές ασκήσεις και ένα απόσπασμα από Ομηρικό έπος και εκτιμάται, τόσο από το περιεχόμενο όσο και από την χρήση των ελληνικών (αρκετά λάθη), ότι αποτελούσε σχολικό σύγγραμμα μαθητή. Παρά το γεγονός ότι είναι γραμμένο στα ελληνικά και χρονολογείται στην Πτολεμαϊκή περίοδο (332 π.Χ. – 30 μ.Χ.), δεν φαίνεται να σχετίζεται ιδιαίτερα με την Ευκλείδεια γεωμετρία, ενώ οι μονάδες[41] που αναφέρονται είναι αιγυπτιακές μονάδες που χρησιμοποιούσαν τόσο οι έλληνες όσο και οι Ρωμαίοι αργότερα, τις συναντάμε δε και στο έργο του Ήρωνος του Αλεξανδρινού. Η πρώτη ολοκληρωμένη δημοσίευση για τα προβλήματα αυτά έγινε από τους **Worp, Bruins και Sijpesteijn**[42].

Πρόβλημα 2

Ἔστ[ω] κύκλος, οὗ ἡ μὲν πε[ρί]μετρος σχοι-
νίων [λ]. Πόσων ἀρουρῶν ἐστ[ιν;] Ὡς δεῖ ποιῆ-
σαί, ποίησον τὰ σ(χοινία) λ ἐφ' ἑαυτὰ, γείνεται Τ.
Τούτων λαβὲ τὸ ιβ', γείνονται [οε]. Τοσούτων
ἀρουρῶν ἐστιν ὁ κύκλος, ὡς ὑπόκειται.

Μετάφραση: Έστω κύκλος, του οποίου η περίμετρος είναι 30 σχοινία. Πόσες άρουρες είναι; Όπως πρέπει κάποιος να κάνει, πολλαπλασιάζω τα 30 σχοινία με τον εαυτό τους, προκύπτει 900. Παίρνοντας το ένα δωδέκατο αυτών, προκύπτει 75. Τόσες αρούρες είναι ο κύκλος, όπως ζητείται.

Εν ολίγοις εφαρμόζεται ο γνωστός τύπος $\mathbf{E} = \frac{1}{12} C^2$

Πρόβλημα 5

Ἔστω [ἡμικύκ]λιον, οὗ ἡ μὲν κάθετος σχοινίων ε, .
ἡ δὲ διάμετρος σχοινίων ι. Δυσὶν οὖν πόσων ἀρου-
ρῶν ἐστ[ιν;] Ὡς δεῖ ποιῆσαί, σύνθες τὰ σ(χοινία) τῆς καθέτου
καὶ τὰ σ(χοινία) τῆς διαμέτρου γείνεται ιε. Τούτων λαβὲ τὸ (ἥμισυ)
γείνεται (ξL). Ταύτα τὰ σ(χοινία) ποίησον ἐπὶ τὰ ε τῆς καθέτου,
ποιήσοντα λξL. Τοσούτων ἀρουρῶν ἐστιν τὸ ἡμικύ-
κλιον, ὡς ὑπόκειται.

Μετάφραση: Έστω ημικύκλιο, του οποίου η κάθετος (ύψος) είναι 5 σχοινία και η διάμετρος είναι 10 σχοινία. Με αυτά τα δύο πόσες άρουρες είναι; Όπως πρέπει κάποιος να κάνει, προσθέτοντας τα σχοινία της καθέτου και τα σχοινία της διαμέτρου, προκύπτει 15. Αυτών παίρνοντας το μισό προκύπτει $7\frac{1}{2}$. Αυτά τα σχοινία πολλαπλασιάζω με τα 5 της καθέτου, που κάνουν $37\frac{1}{2}$. Τόσες αρούρες είναι το ημικύκλιο , όπως ζητείται.

Δηλαδή όπως είχαμε πει εξ αρχής εφαρμόζεται η μέθοδος (8) για το ημικύκλιο.

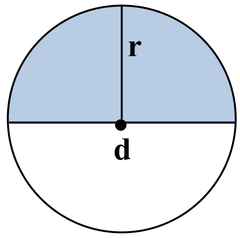
[41] Το «**σχοίνιον**» είναι βασική μονάδα μήκους και η «**άρουρα**» (= καλλιεργήσιμη γη) είναι αντίστοιχα τετραγωνική μονάδα.
[42] K.A. Worp, E.M. Bruins, P.J. Sijpesteijn, (1974), *A Greek Mathematical Papyrus*. Janus. Revue internationale de l'histoire des sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique 61, 291 – 312, Amsterdam

$E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\beta + \upsilon)\cdot\upsilon$ που όμως εδώ έχουμε ως βάση την διάμετρο και ως κάθετο ή ύψος την ακτίνα. Οπότε υπολογίζεται στην ουσία ως

$$E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{1}{2}(d + r)\cdot r$$

που με δεδομένο ότι d = 2r δίνει αντίστοιχα τις σχέσεις

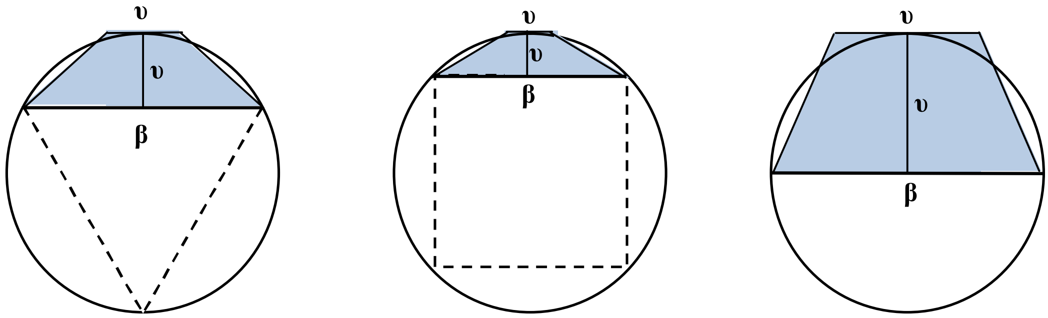
$$\mathbf{E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}d^2} \quad \text{και} \quad \mathbf{E_{\text{ημικυκλίου}} = \frac{1}{2}\,3r^2}$$



<u>Παρατηρήσεις</u>:

Δεν θα επιχειρήσουμε να βγάλουμε κάποιο γενικό συμπέρασμα για την γενικευμένη χρήση αυτής της μεθόδου και θα αρκεστούμε στο δώσουμε μία πιθανή εξήγηση για την προέλευσή της. Η μέθοδος αυτή εξάλλου θυμίζει την μέθοδο υπολογισμού ενός τραπεζίου, που συναντάμε τόσο στα αρχαία αιγυπτιακά όσο και στα μαθηματικά της αρχαίας Μεσοποταμίας.

Και στις τρεις περιπτώσεις το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζεται από ένα τραπέζιο με μεγάλη βάση την βάση του κυκλικού τμήματος και μικρή βάση ίση με το ύψος του.



2.4.4 ΚΑΛΥΤΕΡΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ (50 Μ.Χ. – 1500 Μ.Χ.)

Ο Ήρων, μετά την αναφορά του στους αρχαίους ωστόσο συμπληρώνει τα εξής:

«Οἱ δὲ ἀκριβέστερον ἐζητηκότες
προστιθέασι τῷ εἰρημένῳ ἐμβαδῷ τοῦ τμήματος
τὸ ιδ μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως.
οὗτοι δὴ τῇ ἑτέρᾳ φαίνονται ἠκολουθηκότες ἐφόδῳ,
καθ' ἣν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τριπλασία ἐστὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου
καὶ τῷ ζ μέρει μείζων·» (I, 31, 1-6)

Δηλαδή, αυτοί που έχουν ερευνήσει με περισσότερη ακρίβεια το εμβαδό κυκλικού τμήματος, έχουν προσθέσει $\frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2$ στον προηγούμενο τύπο εύρεσης κάνοντάς τον: $E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\beta + \upsilon)\cdot\upsilon + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2$ και αυτό φαίνεται ότι αυτοί που ακολούθησαν την μέθοδο αυτή, θεώρησαν ότι $\boldsymbol{\pi = 3\frac{1}{7}}$, αφού όταν η μέθοδος εφαρμοστεί για το ημικύκλιο, δίνει: $E = \frac{1}{2}(3r^2 + \frac{1}{7}r^2)$

Στην συνέχεια προσθέτει:

«ταύτῃ οὖν τῇ ἐφόδῳ χρήσασθαι δεῖ
ἐπὶ τῶν ἐλασσόνων τοῦ ἡμικυκλίου τμημάτων·
οὐ μέντοι ἐπὶ παντὸς τμήματος πάλιν καὶ αὕτη ἁρμόσει ἡ ἔφοδος,
ἀλλ' ὅταν ἡ βάσις τοῦ τμήματος μὴ μείζων ᾖ ἢ τριπλῆ τῆς καθέτου·» (I, 31, 15-19)

Δηλαδή, η μέθοδος αυτή θα πρέπει να εφαρμόζεται σε κυκλικά τμήματα μικρότερα του ημικυκλίου, και μάλιστα όχι σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά μόνο σε εκείνες που το β δεν είναι μεγαλύτερο από 3υ.

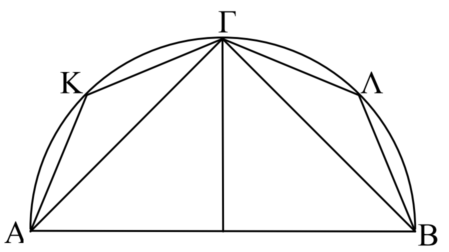
Αυτό που δηλαδή προτείνεται είναι ότι **για τμήματα μικρότερα του ημικυκλίου**:

$$\textbf{αν } \boldsymbol{β \leq 3υ} \textbf{ :} \quad \boxed{\mathbf{E}_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\,β + υ\,)\cdot υ + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}β\right)^2}$$

Ενώ, στην συνέχεια προτείνει ότι:

$$\textbf{αν } \boldsymbol{β > 3υ} \textbf{ :} \quad \boxed{\mathbf{E}_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{2}{3}\,β\cdot υ}$$

Για την περίπτωση β > 3υ, ο Ήρων προτείνει, το κυκλικό τμήμα να μετράται ως ίσο με το παραβολικό τμήμα που έχει ίδια βάση και ύψος. Αυτό το στηρίζει, επηρεασμένος από τον τετραγωνισμό παραβολικού τμήματος του Αρχιμήδη, στην εξής παρατήρηση:



Σε κάθε κυκλικό τμήμα ΑΒΓ, αν από το μέσο της βάσης του φέρουμε κάθετο που τέμνει τον κύκλο στο Γ, ενώ Κ και Λ τα μέσα των τόξων ΑΚΓ και ΓΛΒ αντίστοιχα, τότε για τα τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΚΓ και ΓΛΒ ισχύει ότι:

$$\triangle\ \mathbf{ΑΓΒ} < 4\ (\triangle\ \mathbf{ΑΚΓ} + \triangle\ \mathbf{ΓΛΒ})$$

Την οποία και έχει αποδείξει προηγουμένως (I, 27-29, 32). Αντίστοιχα, αν η αντίστοιχη κατασκευή γίνει και για τα κυκλικά τμήματα ΑΚΓ και ΓΛΒ, το καθένα από αυτά, θα είναι μικρότερο από το τετραπλάσιο του αθροίσματος των δύο μικρότερων τριγώνων που θα σχηματιστούν[43].

Τελικά θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{κυκλικού τμήματος ΑΓΒ}} &> \triangle\ \mathbf{ΑΓΒ}\cdot\{1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\} \\ &> \frac{4}{3}\triangle\ \mathbf{ΑΓΒ} \end{aligned}$$

Και το κυκλικό τμήμα σε αντιστοιχία με το αντίστοιχο παραβολικό τμήμα μπορεί να θεωρηθεί ότι προσεγγίζεται από τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου ΑΓΒ, ή αλλιώς $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\,β\cdot υ = \frac{2}{3}β\cdot υ$.

«ὥστε ἐὰν μετρήσωμεν τὸ τρίγωνον καὶ τούτου τὸ τρίτον προσθῶμεν,
ἀποφανούμεθα ὡς ἔγγιστα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος.
ἁρμόσει δὲ ἡ αὐτὴ μέθοδος, ὅταν ἡ βάσις τῆς καθέτου μείζων ᾖ ἢ τριπλασίων·»
(I, 32, 48-51)

[43] Η παρουσίαση της μεθόδου αυτής από τα μετρικά του Ήρωνος, ακολουθεί την αντίστοιχη παρουσίαση του T. L. Heath, στο έργο του «A History of Greek Mathematics» (1921), τόμος II, Oxford (Επανέκδοση: Elibron Classics series, 2006, σελ. 330)

Επίσης εκτός των προηγουμένων ο Ήρων αναφέρει δύο ακόμα μεθόδους υπολογισμού για κυκλικά τμήματα, χωρίς να αναφέρεται η προέλευσή τους:

Έναν **για τμήματα μεγαλύτερα του ημικυκλίου:**

$$\mathbf{E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\,\beta + \upsilon\,)\cdot \upsilon \cdot (1 + \frac{1}{21})}$$

και έναν **γενικό για τμήματα μικρότερα του ημικυκλίου:**

$$\mathbf{E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\,\beta + \upsilon\,)\cdot \upsilon \cdot (1 + \frac{1}{16})}$$

Οι δύο παραπάνω τύποι αποτελούν βελτιώσεις του γενικώς διαδεδομένου τύπου (8), της μορφής:

$$\boxed{E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}(\,\beta + \upsilon\,)\cdot \upsilon \cdot k}$$

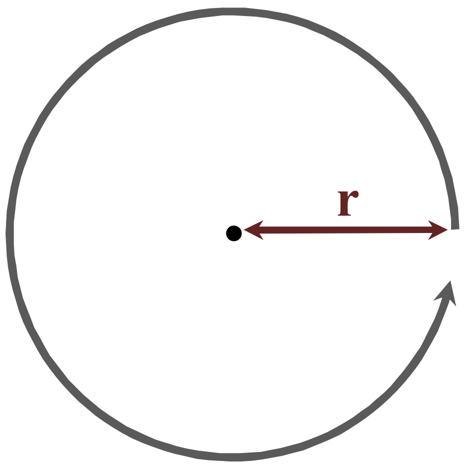
για $k = \frac{22}{21}$ και $k = \frac{17}{16}$ αντίστοιχα.

Βελτιώσεις του ίδιου είδους συναντάμε και στην Ινδία:

Ο **Shridhara** (~750 μ.Χ) στο έργο του «*Trisatika*» (κανόνας 47), ο **Thakkura Pheru** (~1300 μ.Χ.) στο έργο του «*Ganitasava*» αλλά και ο **Aryabhata II** στο γνωστό έργο του «*Mahasiddhanta*» δίνουν τον παραπάνω τύπο για $\mathbf{k = \frac{\sqrt{10}}{3}}$.

3. ΠΡΩΙΜΕΣ «ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ» ΠΟΥ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Η γεωμετρία, όπως μπορούμε να φανταστούμε, αναλύοντας απλά την ρίζα της λέξης, είχε εξ' αρχής πρακτικές εφαρμογές. Στο προηγούμενο κεφάλαιο πήραμε μία εικόνα από τους συνήθεις υπολογιστικούς αλγόριθμους που απαντούσαν σε ερωτήματα μέτρησης. Ωστόσο πέρα από την μέτρηση δεδομένων σχημάτων, η γεωμετρία χρησίμευσε πρωτίστως για κατασκευαστικές ανάγκες. Τα σύμβολα, η διακόσμηση, η αρχιτεκτονική, οι μέθοδοι μετασχηματισμού, αν και μας φαίνεται ότι αποτελούν πιο σύνθετες δραστηριότητες, απαιτούν λύσεις από τα πρώτα στάδια κάθε πολιτισμού. Εργαλεία και εμπειρικές μέθοδοι, καθιστούσαν δυνατές τις κατασκευές που θαυμάζουμε σήμερα στα σωζόμενα μνημεία κάθε πολιτισμού.



Το επόμενο βήμα, θα είναι αυτό της γενίκευσης. Η επίπεδη γεωμετρία στο στάδιο αυτό θα αποτελέσει το πεδίο στο οποίο, θα οριστεί η έννοια της απόδειξης. Σε μία παράλληλη πορεία, η γεωμετρία και η φιλοσοφία θα ορίσουν την έννοια του αξιωματικού συστήματος που θεμελιώνει τον εκάστοτε κλάδο επιστήμης. Αυτό το στάδιο στο οποίο και μπαίνουν τα θεμέλια της μαθηματικής επιστήμης, θα είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου. Πριν όμως περάσουμε στις γεωμετρικές κατασκευές όπως αυτές είναι σε μας πλέον γνωστές, όπως αυτές ορίζονται στο έργο του Ευκλείδη, στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε προγενέστερες γεωμετρικές κατασκευές και στα εργαλεία που χρησιμοποιούνταν, πάντα μέσα από τις σωζόμενες πηγές του εκάστοτε πολιτισμού.

Όπως θα διαπιστώσουμε, ζητούμενο σε πολλές περιπτώσεις είναι η σχέση ενός κύκλου με το τετράγωνο. Συγκεκριμένα αυτό που είναι ζητούμενο στην ουσία, είναι ο μετασχηματισμός του κύκλου σε ένα ισοεμβαδικό τετράγωνο, έτσι ώστε να είναι δυνατή η μέτρηση του κύκλου με τους ήδη γνωστούς όρους του πλέον απλού σχήματος, το οποίο αποτελεί και την μονάδα μέτρησης της επιφάνειας.

Όπως είναι συνηθισμένο στις περισσότερες ιστορικές εισαγωγές που αφορούν την γεωμετρία, έτσι και εμείς θα ξεκινήσουμε από τον αιγυπτιακό πολιτισμό, όπως μας υποδεικνύουν οι αρχαίες ελληνικές πηγές.

3.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΑΙΓΥΠΤΟ – ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ ΑΡΠΕΔΟΝΑΥΤΕΣ

Η συμβολή των Αιγυπτίων στον τομέα της γεωμετρίας μνημονεύεται ήδη από τον 5^{ο} αιώνα π.Χ. από αρκετούς Έλληνες συγγραφείς. Ο **Ηρόδοτος** (485 - 421/415 π.Χ.) πρώτος αναφέρει στο έργο του **«Ιστορίης απόδεξις»** ότι η γεωμετρία ανακαλύφτηκε στην Αίγυπτο:

« Δοκέει δέ μοι ἐνθεῦτεν (στην Αίγυπτο) γεωμετρίη
εὑρεθεῖσα ἐς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν.»

Ηροδότου ΙΙ, 109, 9-10

ενώ στους προηγούμενους στίχους του, περιγράφει ότι στους Αιγυπτίους μοιράζονταν **ίσα τετράγωνα** τμήματα γης για να καλλιεργούν («...κλῆρον ἴσον ἑκάστῳ τετράγωνον διδόντα...») και ότι καλούνταν να επαναπροσδιορίσουν τα σύνορα των χωραφιών τους μετά από τις πλημμύρες του Νείλου, οπότε και ανέπτυξαν της γεωμετρικές τους δεξιότητες. Η αναφορά αυτή υπήρξε πηγή ανά τους αιώνες, για πολλούς μελετητές, και φτάνει ανέπαφη μέχρι σήμερα στις περισσότερες εισαγωγικές σημειώσεις για την ιστορία της γεωμετρίας, αποδίδοντας περιγραφικά τον όρο γεωμετρία ως μέτρηση της γης.

Μία άλλη πολλή γνωστή αναφορά, που προέρχεται από την αρχαία ελληνική γραμματεία είναι μία ρήση που αποδίδεται στον Δημόκριτο, αρχικά από τον **Κλήμη τον Αλεξανδρεύ** στο έργο του «**Στρωματείς**»:

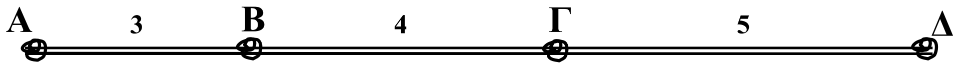
«…καὶ γραμμέων συνθέσι μετὰ ἀποδείξεως οὐδείς
κώ με παρήλλαξεν, οὐδ' οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι **Ἁρπεδονάπται**…»

Κλήμη Αλεξανδρινού «Στρωματείς» 1, 15, 69, 5

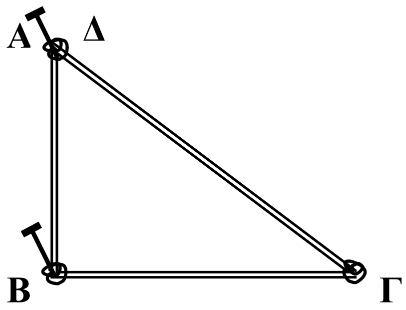
Δηλαδή ο Δημόκριτος φέρεται να δηλώνει ότι η ικανότητά του στην σύνθεση σχημάτων που ακολουθείται από απόδειξη, δεν ξεπερνιέται ούτε από τους «αρπεδονάπτες» της Αιγύπτου, δίνοντας έτσι την εικόνα ότι οι τελευταίοι υπήρξαν φημισμένοι για τις γεωμετρικές τους κατασκευές.

Ο όρος Αρπεδονάπτες προέρχεται από τις λέξεις *άρπεδος* δηλαδή σχοινί και *άπτω* δηλαδή *προσδένω*, *εφαρμόζω*, *κατανοώ*. Η πρώτη επισήμανση της αναφοράς αυτής και κατά συνέπεια η ανάδειξη του όρου «Αρπεδοναπτες» οφείλεται στον Γερμανό ιστορικό

Moritz Cantor το **1880**. Στο έργο του[44] αναφέρει ότι πιθανώς οι κατασκευές που γνώριζαν οι Αιγύπτιοι θα πρέπει να ήταν μυστικές και αυτός είναι ο λόγος που δεν αναφέρονται κάπου στις πηγές. Θεωρώντας λοιπόν ότι στους Αιγύπτιους ήταν γνωστή η πυθαγόρεια τριάδα (3, 4, 5) και οι ισοδύναμες μ’ αυτήν (επιχείρημα που στήριξε σε ένα απόσπασμα από τον πάπυρο του Βερολίνου), διατύπωσε την υπόθεση ότι η άρπεδος χρησιμοποιείτο για την κατασκευή ορθής γωνίας κάνοντας χρήση αυτής της τριάδας. Ότι δηλαδή, μ’ ένα σκοινί χωρισμένο σε τρία μέρη μήκους τριών, τεσσάρων και πέντε μονάδων, αντίστοιχα, οι Αιγύπτιοι κατασκεύαζαν ορθογώνιο τρίγωνο με τον ακόλουθο τρόπο:



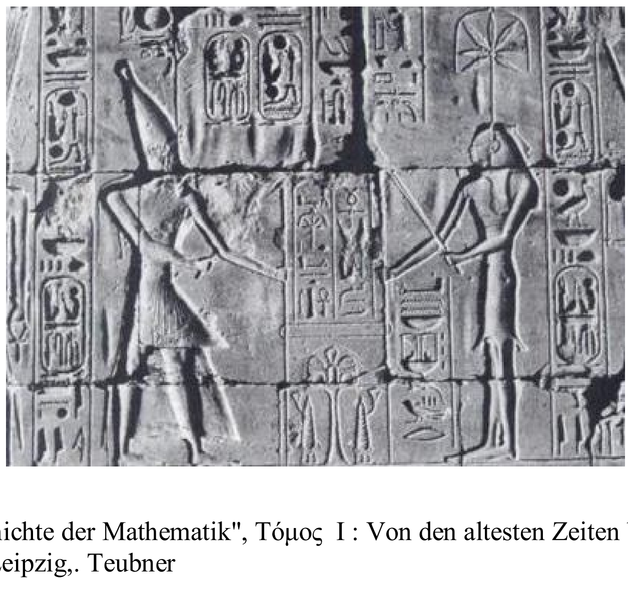
Κάρφωναν τα δύο πρώτα καρφιά στις θέσεις Α, Β, όπως δείχνει το σχήμα, ώστε το σχοινί ΑΒ να είναι τεντωμένο, τοποθετούσαν το Δ στην ίδια θέση με το Α και στη συνέχεια μετακινούσαν το Γ ώστε να τεντώσουν τα τμήματα ΒΓ, ΓΔ.



Ωστόσο η εικασία αυτή του Cantor, η οποία σύμφωνα με την σύγχρονη επικρατούσα άποψη των ερευνητών δεν στοιχειοθετείται από τις υπάρχουσες πηγές, είχε εξ’ αρχής διατυπωθεί ως υπόθεση από τον ιστορικό. Παρόλα αυτά παγιώθηκε και σήμερα απαντάται σε πληθώρα συγγραμμάτων ως ιστορική αναφορά για την αρχαία Αίγυπτο. Οι σύγχρονοι μελετητές τονίζουν ότι δεν υπάρχουν σωζόμενες πηγές της Ιερατικής περιόδου στην Αίγυπτο που να δείχνουν ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν το πυθαγόρειο θεώρημα. Στον πάπυρο του Βερολίνου (pBerlin 6619) συναντάμε δύο προβλήματα, στα οποία στηρίχτηκε το επιχείρημα του Cantor, των οποίων η απόδοση σήμερα γίνεται με διαφορετικό τρόπο.

Ο Cantor πέρα από την γνώση της πυθαγόρειας τριάδας (3, 4, 5), στηρίζει τον συλλογισμό του στην ιερή τελετή που αποκαλείτο **«Τέντωμα του σχοινιού»**. Η τελετή αυτή προηγείτο της κατασκευής ιερών ναών και μια γνωστή αναφορά σε αυτήν συναντάμε σε μία επιγραφή από τον Ναό του Edfu. Τα παρακάτω λόγια που διαβάζουμε στην ενλόγω επιγραφή, αποδίδονται στον ίδιο τον Φαραώ:

«*Κρατώ τον πάσαλο. Κρατώ γερά τη λαβή του ραβδιού και πιάνω το σκοινί μέτρησης μαζί με την Seshat. Γυρίζω τα μάτια μου στις κινήσεις των αστεριών. Στρέφω μπροστά το βλέμμα μου στον μηρό του Ταύρου (αστερισμό μεγάλης άρκτου). Μετρώ τον χρόνο που περνά, προσέχω το ρολόι, καθορίζω τις τέσσερις γωνίες του ναού*»



[44] M.Cantor (1880) "Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", Τόμος I : Von den altesten Zeiten bis zum Jahr 1200 n Ch. Τρίτη έκδοση (1907) , Leipzig,. Teubner

Ο τρόπος με τον οποίον καθορίζονται οι τέσσερεις αυτές γωνίες, δεν είναι γνωστός, ούτε γνωρίζουμε επακριβώς πως οριοθετείται ο άξονας που ορίζει κάποιος συγκεκριμένος αστερισμός. Είναι ωστόσο γνωστό ότι οι Αιγύπτιοι υπήρξαν εξαιρετικά ακριβείς στον προσανατολισμό και την οριοθέτηση των κτηρίων που κατασκεύαζαν.

Αυτό που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι την συγκεκριμένη κατασκευή για τα τέσσερα σημεία που ορίζουν ένα τετράγωνο, την συναντάμε σε κείμενα της Βεδικής περιόδου στην Ινδία[45], που αν και τοποθετούνται στο πρώτο μισό της πρώτης χιλιετίας π.Χ., φαίνεται πως έχουν τις ρίζες τους σε προηγούμενους αιώνες και τα οποία θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Όσο αφορά δε την ύπαρξη ενός «οργάνου» μέτρησης που να συνάδει με την αναφορά που αποδίδεται στον Δημόκριτο, το «σχοινί μέτρησης» που αναφέρεται και στην προηγούμενη επιγραφή, το συναντάμε σε αιγυπτιακές αναπαραστάσεις που σώζονται σε μνημεία. Σ' αυτές παριστάνονται οι γραφείς να κάνουν ή να επιβλέπουν μετρήσεις με σκοινιά.

Αρπεδονάπτες διεξάγουν μετρήσεις υπό την επίβλεψη του γραφέα Zerkereseneb
Λεπτομέρεια τοιχογραφίας από τον τάφο του γραφέα 1400-1390 π.Χ.

Δεδομένου λοιπόν ότι οι μετρήσεις γίνονταν με σχοινιά που είχαν κόμπους ανά ορισμένα διαστήματα, είναι προφανές ότι κύκλοι διαγράφονταν στο έδαφος με τη βοήθεια ενός σχοινιού επιθυμητού μήκους, με το ένα άκρο του να μένει σταθερό στο κέντρο και το άλλο να διαγράφει την περιφέρεια του κύκλου.

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πιο συγκεκριμένα παραδείγματα κατασκευών με σκοινιά, που φαίνεται ότι εντάσσονται όπως και στην περίπτωση της αιγυπτιακής τελετής που αναφέραμε παραπάνω, στο θρησκευτικό τελετουργικό ενός άλλου σπουδαίου αρχαίου πολιτισμού, αυτού της Ινδίας.

---

[45] *Baudhayana – sulbasutra* (SB) 1.5

3.2 ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΟΣ ΙΝΔΙΚΟΣ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΒΕΔΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

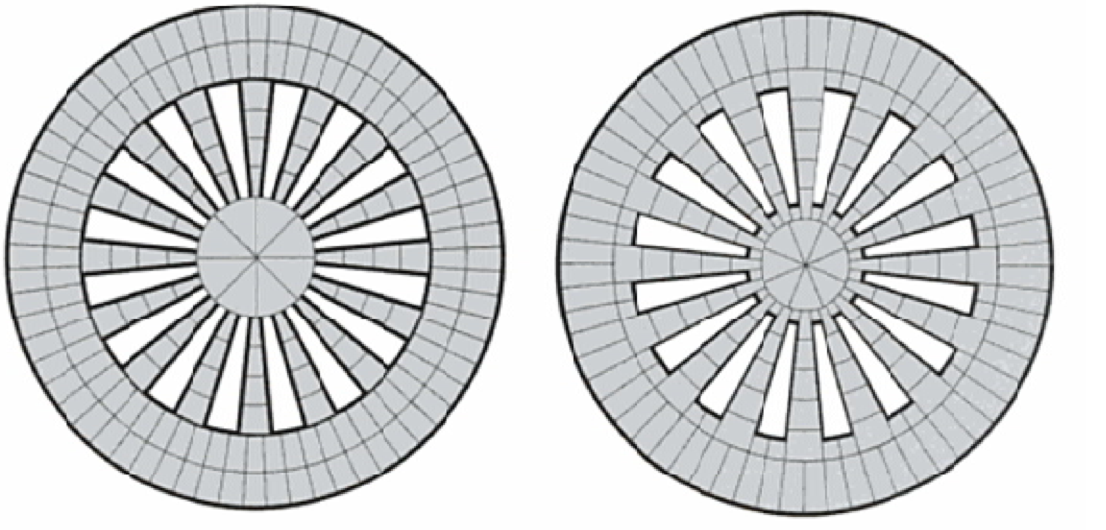
Τα αρχαιότερα κείμενα του ινδικού πολιτισμού, που σχετίζονται με τα μαθηματικά, είναι γραμμένα σε μία πρώιμη μορφή της σανσκριτικής γλώσσας και χρονολογούνται από τους ειδικούς, με αποκλίσεις στις μεταξύ τους εκτιμήσεις, στο πρώτο μισό της πρώτης χιλιετίας π.Χ. Τα αρχαία αυτά κείμενα ονομάζονται **Σουλμπασούτρας** (***Śulbasūtras)*** και αναφέρονται σε κατασκευές γεωμετρικού χαρακτήρα, με την χρήση σχοινιών (***śulba***) που στερεώνονται σε πασσάλους. Μεταξύ των κατασκευών αυτών συναντάμε τον μετασχηματισμό του τετραγώνου σε κύκλο και του κύκλου σε τετράγωνο.

Τα κείμενα αυτά, αποτελούν ειδική κατηγορία της αρχαίας θρησκευτικής γραμματείας της Ινδίας που φέρει συνολικά το όνομα **Βέδες** από την λέξη «***véda***» (वेद), της οποίας η μεταφορική σημασία είναι «γνώση». Όπως και όλα τα υπόλοιπα βεδικά κείμενα, τα Σουλμπασούτρας είναι γραμμένα σε έμμετρη μορφή. Αποτελούνται δηλαδή από στίχους ή σύντομες προτάσεις-κανόνες (***sūtra***), προκειμένου να είναι εύκολη η απομνημόνευσή τους. Τα κείμενα αυτά, που αρχικά και για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα διασώθηκαν με τον προφορικό λόγο από τους Ιερείς, χωρίζονται σε κατηγορίες ανάλογα με το περιεχόμενό τους και παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις ως προς τον χρόνο σύνθεσής τους. Ο πολιτιστικός και γεωγραφικός κόσμος τον οποίο απεικονίζουν, υποδεικνύει ότι συντέθηκαν αρχικά στο βορειοδυτικό τμήμα της Ινδικής χερσονήσου (σύγχρονο Πακιστάν) πριν την πρώτη χιλιετία π.Χ. και υπάρχουν άφθονες έμμεσες μαρτυρίες, που υποδεικνύουν ότι κάποια απ' αυτά, άρχισαν να καταγράφονται από τον 8ο με 6ο αιώνα π.Χ.

Συγκεκριμένα τα Σουλμπασούτρας ανήκουν σε εκείνη την κατηγορία βεδικών κειμένων που πραγματεύονται τους τελετουργικούς κανόνες (***Kalpa-sutras***) και συγκεκριμένα την κατασκευή θυσιαστικών βωμών. Οι βωμοί που περιγράφονται είναι διαφόρων σχημάτων, αντίστοιχων με την εκάστοτε επίκληση στους θεούς και η ακρίβεια της κατασκευής τους ήταν στοιχείο απαραίτητο για την επιτυχή έκβαση μίας θυσίας.

Πλίνθινες κατασκευές κυκλικού σχήματος στην αρχαία πόλη Χαράπα (βόρειο Πακιστάν), του προϊστορικού πολιτισμού της Κοιλάδας του Ινδού, που χρονολογείται ότι άκμασε τουλάχιστον πριν το 1500 π.Χ.

Μεταξύ άλλων στις κατασκευές που περιγράφονται σ' αυτά τα κείμενα περιλαμβάνονται μετασχηματισμοί στους οποίου να διατηρείται η επιφάνεια. Και έτσι συναντάμε τους μετασχηματισμούς του τετραγώνου σε ισοσκελές τραπέζιο, σε ισοσκελές τρίγωνο, σε ρόμβο ή σε κύκλο ίσου εμβαδού καθώς και τον αντίστοιχο μετασχηματισμό του κύκλου σε τετράγωνο. Δεν γνωρίζουμε πώς αυτές οι γεωμετρικές διαδικασίες συνέβη και συνδέθηκαν με την τελετουργία των θυσιών. Διάφορες θεωρίες για την κοινή θρησκευτική «προέλευση των μαθηματικών», υποστηρίζουν ότι τα γεωμετρικά σχήματα συμβόλιζαν θρησκευτικές έννοιες και ότι η ανάγκη να χειριστούν με τελετουργικό τρόπο ενέπνευσε την σταδιακή ανάπτυξη των σχετικών μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, αντίστοιχα εύλογο θα ήταν να υποστηρίξει κανείς ότι η ανεξάρτητη ανακάλυψη των γεωμετρικών ιδιοτήτων και η μεγάλη έκταση των εφαρμογών τους, φάνηκε μυστηριώδης και συνδέθηκε με την θρησκευτική τελετουργία ακριβώς για αυτόν τον λόγο.



Εδώ αναπαρίσταται η κάτοψη ενός πιο σύνθετου βωμού, με σχήμα «τροχού», όπως περιγράφεται στο Baudhayana Σουλμπασούτρα. Συγκεκριμένα αριστερά φαίνεται η κάτοψη των μονών στρώσεων (1^{η}, 3^{η}, 5^{η}) και δεξιά η κάτοψη των ζυγών στρώσεων (2^{η}, 4^{η}) από τις συνολικά πέντε στρώσεις που τον συνθέτουν.

Τα τέσσερα βασικά Σουλμπασούτρας, που παρουσιάζουν κάποιο μαθηματικό ενδιαφέρον, συνδέονται με τα ονόματα των συγγραφέων στους οποίους αποδίδονται, αυτά δηλαδή των **Baudhayana**, **Manava, Apastamba**, και **Katayana,** για τους οποίους γνωρίζουμε ελάχιστα. Η χρονολόγηση των κειμένων αυτών, γίνεται μέσω της γλωσσικής σύγκρισής με προηγούμενα βεδικά κείμενα καθώς και μεταγενέστερα που είναι γραμμένα στην λεγόμενη «κλασική» σανσκριτική και εκτιμάται ότι έχουν γραφεί από τον 8^{ο} μέχρι τον 2^{ο} αι. π.Χ.

Από τα τέλη του 19^{ου} αι. που μεταφράστηκαν για πρώτη φορά κάποια από αυτά, έχουν κατά καιρούς απασχολήσει αρκετούς ερευνητές μεταξύ άλλων των οποίων, οι Cantor (1905), Müller (1930), Drenckhahn (1936), Seidenberg (1960-2, 1972-3), Sen & Bag (1983), S. Kichenassamy (2006).

Οι κανόνες κατασκευής που θα αναφέρουμε αφορούν στον κύκλο αλλά και στην σχέση του με το τετράγωνο. Θα δούμε λοιπόν πως κατασκευάζεται το τετράγωνο, πώς αυτό είναι δυνατόν να μετασχηματιστεί σε κύκλο ίσης επιφάνειας, αλλά και πώς είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί το αντίστροφο, δηλαδή ο μετασχηματισμός ενός κύκλου σε τετράγωνο. Θα παρατηρήσουμε εξάλλου ότι δεν υπάρχει νόημα να γίνεται αναφορά στην σύγχρονη σταθερά π, αφού οι υπολογισμοί δεν αναφέρονται καθόλου στην περίμετρο του κύκλου ενώ οι διάφοροι κανόνες που αναφέρονται στο εμβαδό συνεπάγονται αρκετές διαφορετικές τιμές για το π_2. Αντιθέτως θα παρατηρήσουμε ότι η σχέση της ακτίνας ενός κύκλου με την πλευρά ενός ισοεμβαδικού τετραγώνου, είναι πάντα συνάρτηση της εκάστοτε προσέγγισης του μήκους της διαγωνίου του τετραγώνου. Θα αναφέρουμε λοιπόν και τον κανόνα που εκτιμάει το μήκος της διαγωνίου του τετραγώνου

Στις φωτογραφίες διακρίνουμε τον παραδοσικό τρόπο με τον οποίον καταγράφονταν αρχικά τα περισσότερα βεδικά κείμενα. Με βελόνη πάνω σε φύλλα από φόινικα, που συνδέονταν με νήμα απαρτίζοντας ένα είδος βιβλίου.

Αν και αντίστοιχοι κανόνες συναντώνται σε όλα τα αντίστοιχα βεδικά κείμενα οι ερευνητές φαίνεται να εστιάζουν την μελέτη του συγκεκριμένου θέματος στο παλαιότερο από τα τέσσερα Σουλμπασούτρας, αυτό δηλαδή που φέρει το όνομα **Baudhayana**, που χρονολογείται ότι καταγράφηκε αρχικά, στο διάστημα μεταξύ $8^{ου}$ και $6^{ου}$ αιώνα π.Χ.

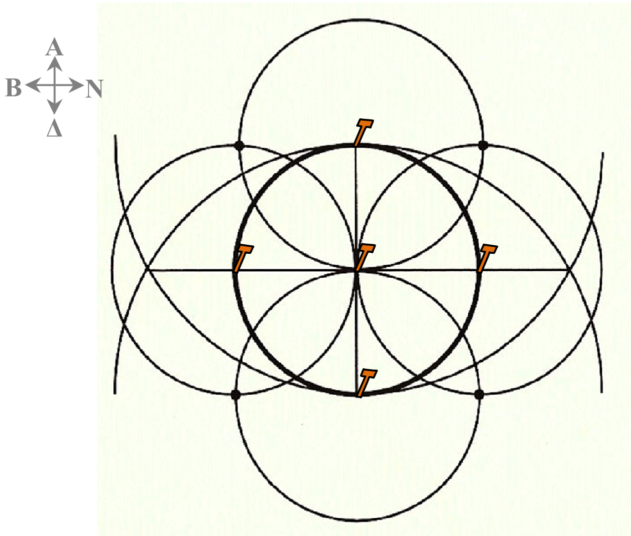
Το κείμενο αυτό αρχικά μεταφράστηκε και σχολιάστηκε από τον γερμανό ειδικό στην σανσκριτική, **G. F. Thibaut** το 1875. Η μετάφραση αυτή αν και ήταν περιφραστική σε πολλά σημεία, περιελάμβανε αρκετές επεξηγήσεις και γενικότερα δεν θεωρείται παραπλανητική, ενώ σε αυτήν και στην επανέκδοσή[46] της το 1984, βασίστηκε μία σειρά μεταγενέστερων μελετητών. Το 1983, οι **Sen και Bag**[47], μετέφρασαν το ίδιο κείμενο, μεταξύ άλλων, δίνοντας ακριβέστερη ίσως και πιο λιτή μετάφραση, καθώς και διαφορετική αρίθμηση στους κανόνες. Στις κατασκευές που θα αναφέρουμε στην συνέχεια, η ελληνική μετάφραση είναι βασισμένη σε αυτή των Sen και Bag. Από την ίδια έκδοση είναι παρμένα τα αποσπάσματα στην Σανσκριτική γλώσσα που παραθέτουμε, ενώ αναφέρονται και οι δύο αριθμήσεις που συναντά κανείς στην βιβλιογραφία με τις ενδείξεις (T) για την επανέκδοση του έργου του Thibaut και (SB) για την αρίθμηση που προτείνουν οι Sen και Bag.

Για να πάρουμε μία αρχική και αντιπροσωπευτική εικόνα των κατασκευών που περιέχονται στο συγκεκριμένο έργο, θα ξεκινήσουμε με την κατασκευή ενός τετραγώνου με την βοήθεια κύκλων.

[46]K. P. Bagchi & Co, «*Mathematics in the Making in Ancient India*», Calcutta, (1984).
[47] S. N. Sen & A. K. Bag «*The Sulva Sutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava with text, English Translation and Commentary*», Indian National Science Academy, New Delhi, (1983)

<u>Κατασκευή Τετράγωνου με χαράξεις κύκλων (Τ) Ι.22-8 ή (SB) 1.4</u>

«Αν θελήσει κάποιος (να κατασκευάσει) ένα τετράγωνο, πρέπει να πάρει μία χορδή με μήκος (την πλευρά) του ζητούμενου τετραγώνου, να φτιάξει κόμπους στις δύο άκριες και να σημαδέψει την μέση. Γράφεται η γραμμή (με μήκος όσο η χορδή από Ανατολή προς Δύση) και στερεώνεται ένας πάσσαλος στην μέση.
Οι δύο κόμποι στερεώνονται στον πάσσαλο αυτό, και σχεδιάζεται κύκλος με το σημάδι (της μέσης).
Δύο πάσσαλοι στερεώνονται στις άκριες της γραμμής (αυτής του άξονα Ανατολής-Δύσης που γράφηκε αρχικά).
Με τον ένα κόμπο δεμένο στον ανατολικό (πάσσαλο), ένας κύκλος γράφεται από τον άλλο (κόμπο). Ένας παρόμοιος (κύκλος γράφεται) γύρω από τον δυτικό πάσσαλο.
Η δεύτερη γραμμή (Βορρά-Νότου) γράφεται από τα σημεία τομής αυτών των δύο κύκλων.
Δύο πάσσαλοι στερεώνονται στις άκρες της (δεύτερης) γραμμής.
Με τους δύο κόμπους της χορδής δεμένους στον ανατολικό πάσσαλο φτιάχνεται κύκλος με το σημάδι (της μέσης).
Το ίδιο (γύρω από) τον νότιο, τον δυτικό και τον βόρειο (πάσσαλο).
Τα σημεία τομής αυτών των τελικών κύκλων φτιάχνουν το ζητούμενο) τετράγωνο.»



Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο, οι τέσσερεις κορυφές του τετραγώνου, κατασκευάζονται και με άλλο τρόπο που στο κείμενο ακολουθεί αμέσως μετά (Baudhayana – sulbasutra (SB) 1.5). Στον δεύτερο αυτό τρόπο που δεν θα αναφέρουμε εδώ, φτιάχνονται οι ορθές γωνίες του τετραγώνου (με τον χωρισμό του σκοινιού σε μέρη ανάλογα της πυθαγόρειας τριάδας 3, 4, 5), όπως έχει αποδοθεί από τον Cantor και στους «αρπεδονάπτες» της αρχαίας Αιγύπτου.

Στην συνέχεια ακολουθούν άλλες ενδιαφέρουσες κατασκευές και μετασχηματισμοί. Εμείς στο σημείο αυτό θα περάσουμε στους τέσσερεις κανόνες που μας αφορούν και που καταγράφονται διαδοχικά στο συγκεκριμένο κείμενο. κατασκευές παραλληλογράμμων, ορθογώνιων τριγώνων, μετασχηματισμοί απλών σχημάτων. Πριν κάνουμε οποιαδήποτε παρατήρηση, παραβάλουμε εδώ συνολικά το κείμενο και την μετάφραση του κάθε κανόνα. Να επαναλάβουμε ότι και οι τέσσερεις αυτοί κανόνες μπορούσαν σίγουρα να διατυπωθούν με πολύ πιο εύκολο τρόπο. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ωστόσο ότι διατυπώνονται σε έμμετρο λόγο έτσι ώστε με τους στίχους να ευνοείται η αποστήθιση από τον μαθητή. Θεωρείται δεδομένο ότι συνοδεύονταν κατά την εκμάθηση από προφορική επεξήγηση του δασκάλου.

(1) Τετράγωνο → Κύκλος (T) I.58 ή (SB) 2.9

caturaśraṃ maṇḍalaṃ cikīrṣannakṣṇayārdhaṃ madhyātprācīmabhyāpātayet |

yadatiśiṣyate tasya saha tṛtīyena maṇḍalaṃ parilikhe ||

Μετάφραση:
Αν θες να μετατρέψεις το τετράγωνο σε κύκλο, τέντωσε *(ένα σχοινί ίσο με)*
το μισό της διαγωνίου από το κέντρο προς την ανατολή
με το ένα τρίτο *(του μέρους που μένει έξω από το τετράγωνο)* ***προστιθέμενο στο υπόλοιπο*** *(στο μέρος που μένει μέσα στο τετράγωνο)* ***ο κύκλος έγινε.***

(2) α) Κύκλος → Τετράγωνο (T) I.59 ή (SB) 2.10

maṇḍalaṃ caturaśraṃ cikīrṣanviṣkambhamaṣṭau bhāgānkṛtvā bhāgamekonatriṃśadhā vibhajyāṣṭāviṃśatibhāgānuddharet |

bhāgasya ca ṣaṣṭhamaṣṭamabhāgonam ||

Μετάφραση:
Αν θες να μετατρέψεις έναν κύκλο σε τετράγωνο διαίρεσε την διάμετρο σε 8 μέρη και το ένα μέρος *(από αυτά)* ***διαίρεσέ τα σε 29 μέρη, αυτά τα 29 μέρη μείωσέ τα κατά τα 28 από αυτά***
και επιπλέον *(μείωσέ τα)* ***κατά το ένα έκτο*** *(αυτού που έμεινε)* ***αφήνοντας το ένα όγδοο*** *(του προηγούμενου έκτου)**.***

β) Κύκλος → Τετράγωνο (T) I.60 ή (SB) 2.11

api vā pañcadaśabhāgānkṛtvā dvāvuddharet |

saiṣānityā caturaśrakaraṇī ||

Μετάφραση:
Αλλιώς διαίρεσε *(την διάμετρο)* ***σε 15 μέρη και μείωσε την κατά 2 από αυτά***
αυτό δίνει περίπου την πλευρά του τετραγώνου.

(3) Διαγώνιος τετραγώνου (T) I.61-62 ή (SB) 2.12

pramāṇaṃ tṛtīyena vardhayettacca caturthenātmacatustriṃśonena |

saviśeṣaḥ ||

Μετάφραση:
Το μέτρο *(δηλαδή, η πλευρά του τετραγώνου)* ***πρέπει να αυξηθεί κατά το ένα τρίτο και αυτό*** *(το τρίτο)* ***ξανά κατά το ένα τέταρτό του, μείον το ένα τριακοστό τέταρτο*** *(του τελευταίου)*
αυτό *(που προκύπτει)* ***είναι η διαγώνιος του τετραγώνου.***

<u>**Σύγχρονη απόδοση**</u>**:**

Αν θεωρήσουμε ένα **τετράγωνο** πλευράς **α** και διαγωνίου **δ** (=$\sqrt{2}$α) και έναν **κύκλο** ακτίνας **r** και διαμέτρου **d** (= 2r) ίδιου εμβαδού, οι προηγούμενες σχέσεις με σύγχρονο συμβολισμό, μπορούν να αποδοθούν ως εξής:

(1) $\mathbf{r} = \frac{1}{3}\left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{2}-\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right)+\frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}$

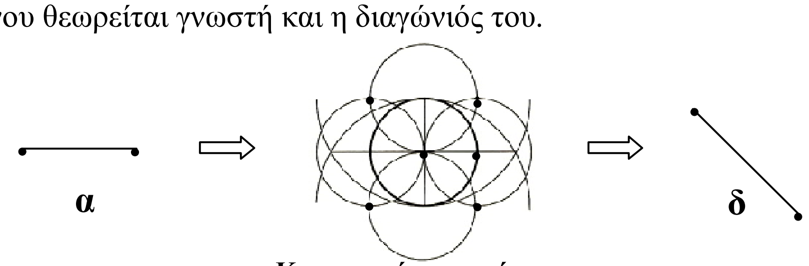
(2) α) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d} - \frac{28}{29}\cdot\left(\frac{1}{8}\mathbf{d}\right) - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{28}{29}\cdot\frac{1}{8}\mathbf{d}\right) + \frac{1}{8}\left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{28}{29}\cdot\frac{1}{8}\mathbf{d}\right)\right]$

β) $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d} - \frac{2}{15}\mathbf{d}$

(3) $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}\right) - \frac{1}{34}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}\right)$

Ο περισσότεροι κανόνες στα Sulbasutras είναι κατασκευαστικοί, όπως η κατασκευή του τετραγώνου που περιγράψαμε προηγουμένως και ο πρώτος από τους παραπάνω κανόνες που περιγράφει τον μετασχηματισμό του τετραγώνου σε κύκλο. Ας δούμε όμως λίγο κάποιες από τις πιο βασικές αρχές που διέπουν τις κατασκευές που μας αφορούν στα *Śulbasūtras*:

1) **Χρήση σχοινιών** τα οποία μπορούν να διαιρεθούν σε όσα ίσα τμήματα θέλουμε και να σημειωθούν σ' αυτά σημάδια με κόμπους. Οι τρόποι χωρισμού των σχοινιών σε 2, 3, 5 κτλ. ίσα τμήματα περιγράφονται σε αντίστοιχους κανόνες.
2) **Ικανότητα προσδιορισμού του άξονα Ανατολής-Δύσης** με βάση τον οποίο περιγράφονται και εκτελούνται όλες οι κατασκευές (το σχοινί τοποθετείται «κατά μήκος» του, εμπεριέχοντας την έννοια της παραλληλίας ή κατά μήκος του **άξονα Βορρά- Νότου** εμπεριέχοντας την έννοια της καθετότητας). Ο άξονας Ανατολής-Δύσης προσδιορίζεται με αστρονομικές παρατηρήσεις.
3) **Ο κύκλος** είναι βασικής αξίας, αφού έχει την πιο άμεση κατασκευή:
   Ένα τεντωμένο σχοινί με στερεωμένο (σταθερό) το ένα του άκρο, διαγράφει με το άλλο του άκρο το σχήμα.
4) **Το τετράγωνο**, όταν είναι γνωστή η πλευρά του, κατασκευάζεται με την βοήθεια κύκλων (εναλλακτικά με την βοήθεια της πυθαγόρειας τριάδας 3, 4, 5)
5) Συνεπώς με δοσμένη την πλευρά ενός τετραγώνου είναι κατασκευάσιμη και η **διαγώνιός** του, οπότε και όταν, στις περεταίρω κατασκευές, δίνεται η πλευρά του τετραγώνου θεωρείται γνωστή και η διαγώνιός του.



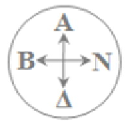
Κατασκευή τετραγώνου

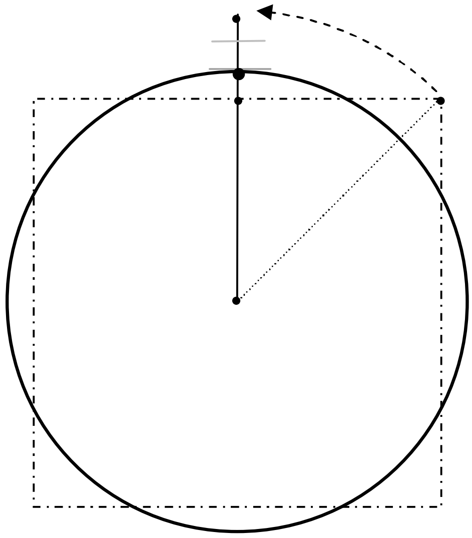
Σημειώνουμε ωστόσο ότι από τα παραπάνω δεν προκύπτει η ποσοτική σχέση που συνδέει την πλευρά με την διαγώνιο, αλλά απλά η κατασκευή της τελευταίας. Η ποσοτική σχέση προσδιορίζεται από τον κανόνα (3) προσεγγιστικά.

ΑΠΟ ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

Στην συνέχεια η κατασκευή ενός ισοεμβαδικού με το τετράγωνο κύκλου, δηλαδή η κατασκευή της ακτίνας που τον ορίζει, χρησιμοποιεί το μισό της διαγωνίου (που όπως είπαμε είναι κατασκευάσιμη με δεδομένη μόνο την πλευρά του τετραγώνου). Συγκεκριμένα:

Θεωρώντας ότι η κατασκευή γίνεται κοιτώντας προς την Ανατολή, κάνουμε τα εξής βήματα:





i. Στερεώνουμε σχοινί μήκους ίσου με το μισό της διαγωνίου του τετραγώνου στο κέντρο του τετραγώνου
ii. Το στρέφουμε τεντωμένο προς την Ανατολή (θεωρώντας ότι η κατασκευή του τετραγώνου έχει γίνει προηγουμένως με τέτοιο τρόπο ώστε οι πλευρές του να είναι παράλληλες και κάθετες αντίστοιχα, στον άξονα Ανατολής-Δύσης.)
iii. Σημειώνουμε με έναν κόμπο το σημείο στο οποίο τέμνεται το σχοινί από το τετράγωνο. Έτσι το σχοινί χωρίζεται σε δύο μέρη:
   a. αυτό που μένει εντός του τετραγώνου ($\frac{\alpha}{2}$)
   b. αυτό που βγαίνει εκτός του τετραγώνου ($\frac{\delta}{2} - \frac{\alpha}{2}$)
iv. Χωρίζουμε το μέρος του σχοινιού που βγαίνει εκτός του τετραγώνου ($\frac{\delta}{2} - \frac{\alpha}{2}$) σε τρία ίσα τμήματα και το τέλος του πρώτου από το τετράγωνο τμήματος το σημειώνουμε με έναν κόμπο.
v. Διαγράφουμε τον ζητούμενο κύκλο με τον τελευταίο κόμπο που σημειώσαμε.

Συνεπώς το μήκος της ζητούμενης ακτίνας είναι μέρος του σχοινιού που μένει εντός του τετραγώνου ($\frac{\alpha}{2}$) μαζί με το ένα τρίτο του μέρους που βγαίνει εκτός του τετραγώνου $\frac{1}{3}(\frac{\delta}{2} - \frac{\alpha}{2})$ και όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως σε σύγχρονη γραφή προκύπτει η σχέση: $\mathbf{r} = \frac{1}{3}\left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{2} - \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}\right) + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{2}$

Συχνά στην βιβλιογραφία συναντάμε τον εξής αναχρονισμό:

Αν θεωρήσουμε ότι $\delta = \sqrt{2}\alpha$ η σχέση αυτή δίνει

$$\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\sqrt{2}+2}{6} \quad \text{και αντίστοιχα} \quad \frac{\mathbf{d}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\sqrt{2}+2}{3}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον σύγχρονο τύπο για το εμβαδό κύκλου, με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, θα λάβουμε μία τιμή για το π_2:

$$\alpha^2 = \pi_2 r^2 \Leftrightarrow \pi_2 = \frac{a^2}{d^2} \Leftrightarrow \pi_2 = \left(\frac{6}{\sqrt{2}+2}\right)^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\pi_2 \approx 3{,}088}$$

ΑΠΟ ΤΟΝ ΚΥΚΛΟ ΣΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ & Η ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Είναι γενικά αποδεκτό από την έρευνα, μέχρι τώρα, ότι ο κανόνας (2α) για τον τετραγωνισμό του κύκλου, πρέπει να προέκυψε από την αντιστροφή του κανόνα (1) για την μετατροπή τετραγώνου σε κύκλο αλλά και βάσει του κανόνα (3) στον οποίο προσεγγίζεται η ποσοτική σχέση της διαγωνίου και της πλευράς ενός τετραγώνου.

Η ακριβής ωστόσο, ανακατασκευή του κανόνα (2α), μέσω τον άλλων δύο κανόνων, αλλά και ο κανόνας (3) από μόνος του, φαίνεται ότι προβλημάτισε ιδιαίτερα τους ερευνητές, που κατά καιρούς έχουν προτείνει διαφορετικές προσεγγίσεις στο ζήτημα αυτό.

Ο κανόνας (3) του οποίου η διατύπωση σύγχρονα αποδίδεται ως εξής

$$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{34}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad \text{(για κάθε τετράγωνο με πλευρά α και διαγώνιο δ)}$$

αντιστοιχεί στον σύγχρονο αριθμό $\sqrt{2}$, την τιμή 1,4121568… που είναι σωστή μέχρι και το έκτο δεκαδικό ψηφίο[48].

Ωστόσο **είναι λάθος να πούμε ότι θεωρούσαν ότι ισχύει η σχέση $\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{577}}{\mathbf{408}}$** διότι αυτό προϋποθέτει ότι γνώριζαν να ανάγουν ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα – κάτι που δεν φαίνεται να ισχύει – και επίσης μία τέτοια έκφραση δεν θα είχε γι' αυτούς κατασκευαστική χρήση.

Αρχικά ο **G. F. Thibaut** το **1875**, επηρεασμένος από την επιδεξιότητα χειρισμού των κλασμάτων που επιδείκνυαν οι σχολιαστές του κειμένου, στήριξε τα επιχειρήματά του, για την απόδοση του κειμένου, σε γνώσεις, αρκετά μεταγενέστερες της εποχής που συγγράφηκε το έργο.

Αντιθέτως **εκτιμάται ότι η διατύπωση του κανόνα (3) εμπεριέχει δύο διορθώσεις στην αρχική προσέγγιση $\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$**. Τέτοιες διορθώσεις πιθανών να κρίθηκαν αναγκαίες όταν το σφάλμα του προηγούμενου κανόνα γινόταν εμφανές σε μεγαλύτερων διαστάσεων κατασκευές.

Για «διορθώσεις» πρώτος έκανε λόγο ο **Cantor**, λίγο μετά[49] την δημοσίευση του Thibaut, που αν και διατήρησε την λανθασμένη οπτική του πρώτου, ανέδειξε επιπλέον την ομοιότητα που φαίνεται να έχει η μέθοδος τετραγωνισμού του κύκλου στον κανόνα (2α) με τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου στον αρχαίο αιγυπτιακό πάπυρο του Rhind. Ο κανόνας εξάλλου (2α) δίνει την πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου ως κάτι περισσότερο από τα $\frac{7}{8}$ της διαμέτρου του κύκλου. Δηλαδή ισχύει $\mathbf{E}_{\text{κύκλου}} \cong \left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\,\mathbf{d}\right)^2$ θυμίζοντας τον αρχαίο αιγυπτιακό κανόνα $E_{\text{κύκλου}} = \left(\frac{8}{9}\,d\right)^2$. Αυτή η προσέγγιση, συμπληρώνει ο Cantor «δεν άφησε ικανοποιημένο τον Baudhayana που προσέθεσε μία διόρθωση»[50]

Μία συνεπή με το ιστορικό πλαίσιο και τις υπόλοιπες πηγές, καλά παρουσιασμένη ανακατασκευή των τεσσάρων αυτών κανόνων, μπορεί να βρει κανείς σε μία πρόσφατη δημοσίευση του **S. Kichenassamy**[51].

---

[48] Αντίστοιχη προσέγγιση του $\sqrt{2}$, προκύπτει και στην βαβυλωνιακή πινακίδα YBC 7289, όπου είναι σχεδιασμένο ένα τετράγωνο και οι διαγώνιοι του και είναι σημειωμένος επί της διαγωνίου ο αριθμός `1,24,51,10` (= $1\times 60^0 + 24\times 60^{-1} + 51\times 60^{-2} + 10\times 60^{-3}$), που σε δεκαδική μορφή αντιστοιχεί στον αριθμό $1{,}41421\overline{296}$.

[49] M.Cantor (1880) "Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", Τόμος I : Von den altesten Zeiten bis zum Jahr 1200 n Ch. Τρίτη έκδοση (1907) , Leipzig,. Teubner

[50] Από το ίδιο σελ. 642

[51] S. Kichenassamy (2006) *Baudhayana's rule for the quadrature of the circle*, Historia Mathematica 33, 149183

3.3 Γεωμετρικες Κατασκευες που σχετιζονται με τον κυκλο στα Μαθηματικα της Αρχαιας Μεσοποταμιας

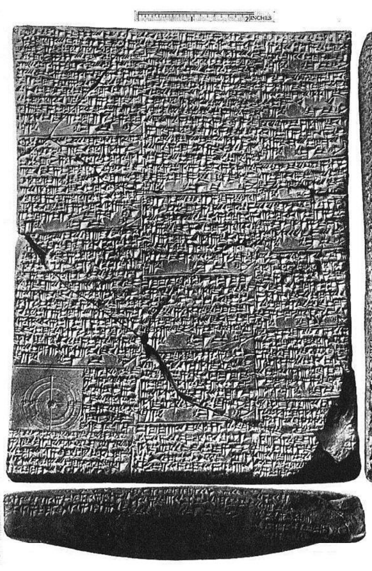
Στο προηγούμενο κεφάλαιο συζητήσαμε το ενδεχόμενο να γνώριζαν σε κάποιες περιοχές έστω της Μεσοποταμίας, ιδιότητες των εγγράψιμων κανονικών πολυγώνων, μέσα από τις πινακίδες που βρέθηκαν στην Σούσα. Στην παράγραφο αυτή θα εστιάσουμε στο πιο απλό ζήτημα της κατασκευής του ίδιου του κύκλου, όπως αυτή προκύπτει από τις σωζόμενες μαθηματικές πινακίδες.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, στην αρχαία Μεσοποταμία το κυρίαρχο στοιχείο του κύκλου είναι η περιφέρειά του. Η ίδια η λέξη «κύκλος», ταυτίζεται με το μήκος της περιφέρειας. Το εμβαδό επίσης του κύκλου υπολογίζεται ως συνάρτηση της περιφέρειας και δεν σχετίζεται παρά έμμεσα με την διάμετρό του. Δεν συναντάμε δηλαδή εκφράσεις που να χρησιμοποιούν την ακτίνα, να την υπολογίζουν ή να την σχετίζουν άμεσα με το εμβαδό του κύκλου.

Αυτά ωστόσο δεν σημαίνουν ότι η έννοια της ακτίνας απουσιάζει από την γεωμετρία των αρχαίων Μεσοποτάμιων. Απόδειξη αποτελούν τα γεωμετρικά σχήματα που παρατηρούμε στις ίδιες τις μαθηματικές πινακίδες. Οι κύκλοι που βλέπουμε σχηματισμένοι σε αρκετές περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι έχουν σχηματιστεί με μηχανικό όργανο. Όργανο που δεν φαίνεται να απέχει καθόλου από τον γνωστό μας **διαβήτη**.

Ας δούμε όμως συγκεκριμένα παραδείγματα στα οποία είναι εμφανής η χρήση ενός τέτοιου οργάνου:

Έχουμε ήδη αναφερθεί στην πινακίδα **BM 85194**, την πρώτη πινακίδα με μαθηματικό περιεχόμενο, δημοσιεύτηκε[52] το 1900. Σε αυτήν την πινακίδα, που χρονολογείται στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας π.Χ, είχαμε πει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι περιλαμβάνονται 45 προβλήματα με την εκφώνηση και την λύση τους.



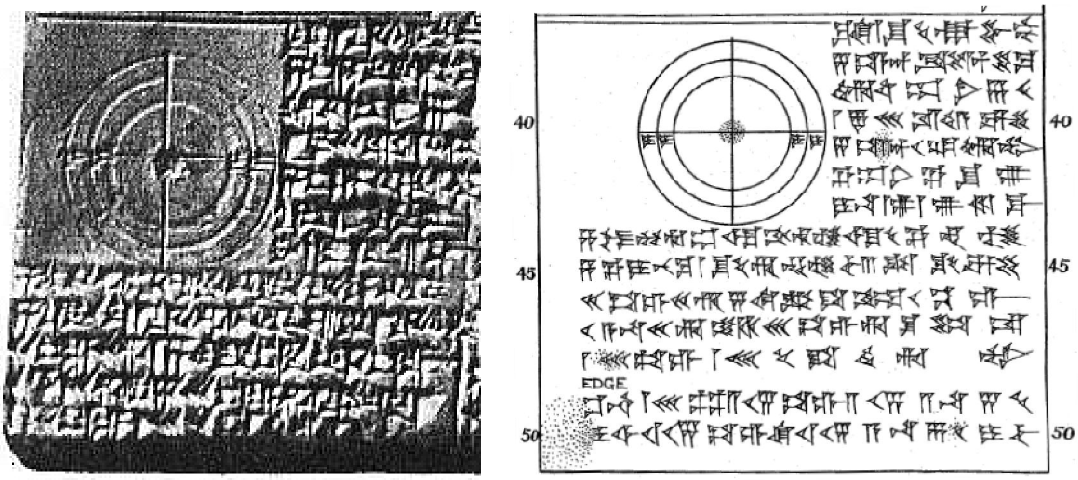
BM 85194

Το τέταρτο από αυτά τα προβλήματα που είναι γραμμένο στην κύρια όψη της πινακίδας, ακολουθείται από σχήμα, όπως φαίνεται κάτω αριστερά στην διπλανή εικόνα.

Το αντικείμενο που πραγματεύεται το πρόβλημα αυτό, είναι μία κυκλική πόλη που περιβάλλεται από τάφρο έξω από την οποία κατασκευάζεται ένα προτείχισμα, χτισμένο με το υλικό που έχει εξορυχτεί από την τάφρο και αυτό που ζητείται είναι το ύψος του

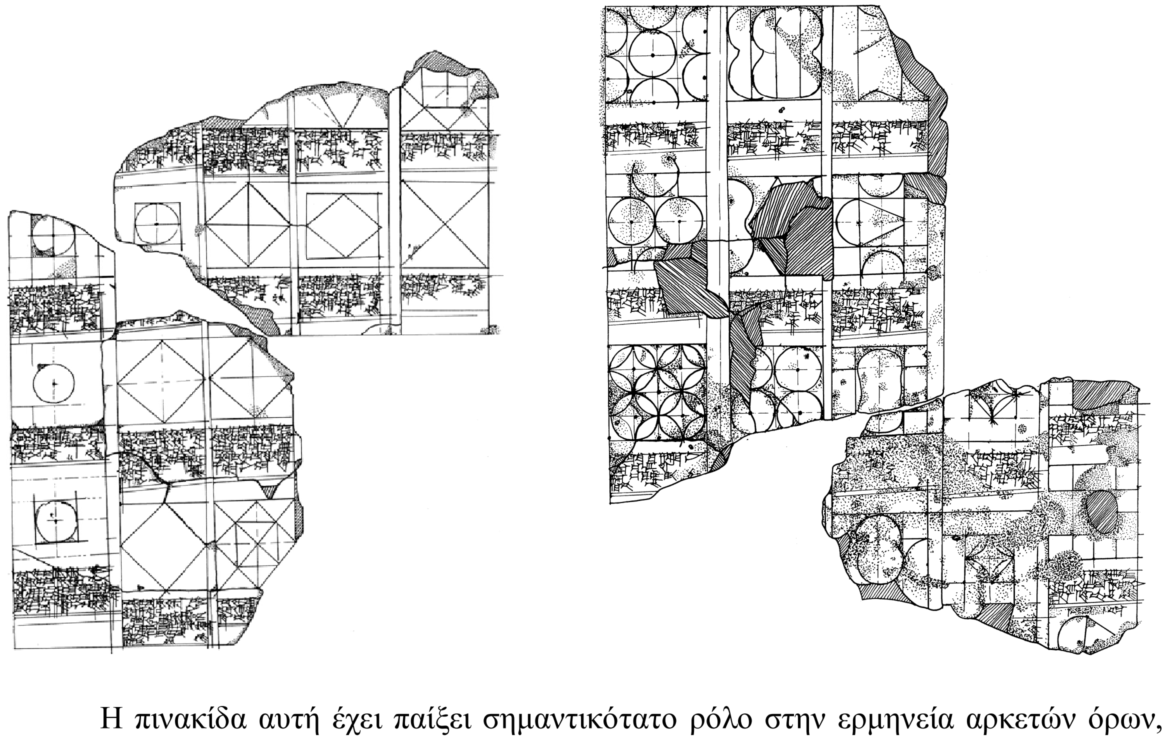
[52] King L W, *Cuneiform texts from Babylonian tablets in the British Museum*; Part XXI, London, 1900

προτειχίσματος. Το σχήμα, αντίστοιχα, που συνοδεύει το πρόβλημα, όπως φαίνεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην εικόνα που ακολουθεί, αποτελείται από τρεις ομόκεντρους κύκλους, οι περιφέρειες των οποίων ισαπέχουν.

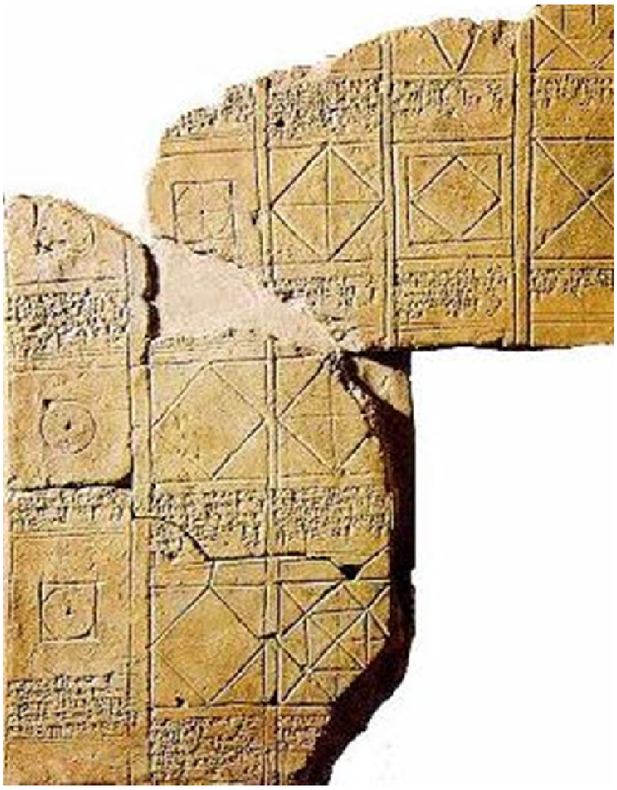


Οι κύκλοι αυτοί στην πινακίδα φαίνονται σχεδιασμένοι με μεγάλη ακρίβεια για να υπέθετε κανείς ότι έχουν σχηματιστεί με «ελεύθερο» χέρι, ενώ είναι εμφανές το σημάδι φοράς στο κέντρο του κύκλου. Τέλος η πραγματικές τους διαστάσεις είναι πολύ μικρές για να θεωρήσει κανείς ότι έχουν σχηματιστεί με κάποιο νήμα με στερεωμένο άκρο στο κέντρο του κύκλου. Συγκεκριμένα πρόκειται για κύκλους διαμέτρων d_1, d_2, d_3, με: $d_1 = 1,5$ cm, $d_2 = 2,1$ cm και $d_3 = 2,7$ cm.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης διαβήτη αποτελεί και η πινακίδα της ίδιας περιόδου (αρχές δεύτερης χιλιετίας π.Χ.), **BM 15285**, που περιέχει τις εκφωνήσεις γεωμετρικών προβλημάτων, ενώ κάθε ένα από αυτά συνοδεύεται από ένα αρκετά καλοσχεδιασμένο σχήμα.



Η πινακίδα αυτή έχει παίξει σημαντικότατο ρόλο στην ερμηνεία αρκετών όρων, λόγω της παράλληλης ύπαρξης κειμένου και εικόνας. Στην αρχαιότητα εκτιμάται ότι αποτελούσε κατάλογο με προβλήματα για σχολή γραφέων, τα οποία αναθέτονταν στους μαθητευόμενους γραφείς και λύνονταν σε άλλες πρόχειρες πινακίδες. Εκτιμάται επίσης ότι οι διαστάσεις της ήταν 28 x 35 x 5 cm και συνολικά περιείχε 41 προβλήματα. Σήμερα σώζονται τα 30 από αυτά σε δύο μεγάλα τμήματα που έχουν συντεθεί από κομμάτια που βρέθηκαν σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα στις συλλογές του Βρετανικού μουσείου.



Κάθε διάγραμμα από αυτά καταλαμβάνει τετραγωνικό χώρο (πλευράς περίπου 4,8 cm) και σε πολλά σημεία είναι εμφανείς κάθετες και οριζόντιες χαράξεις.

Όλοι οι κύκλοι στα κέντρα των οποίων υπάρχουν εμφανή σημάδια από κάποιου είδους καρφίδα, θεωρείτε από τους ερευνητές ότι έχουν δημιουργηθεί από διαβήτη σταθερού ανοίγματος, με ακτίνα περίπου 1,1 cm.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε ενδεικτικά την μετάφραση των εκφωνήσεων από τα προβλήματα 3 και 4 συνοδευόμενα από μία μεγαλύτερης λεπτομέρειας φωτογραφία του εκάστοτε σχήματος.

(3) Η πλευρά του τετραγώνου είναι 1 cable (=360 m). Προεκτείνω το σύνορο σε κάθε πλευρά και σχεδιάζω έναν κύκλο.
Ποια είναι η επιφάνειά του;

(4) Η πλευρά του τετραγώνου είναι 1 cable (=360 m). Μέσα του σχεδιάζω ένα τετράγωνο και έναν κύκλο. Ο κύκλος που σχεδίασα εφάπτεται με το τετράγωνο.
Ποιές είναι οι επιφάνειές τους;

4. Τα θεμελια της Μαθηματικης Επιστημης – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΝ ΑΡΧΑΙΟ ΕΛΛΑΔΙΚΟ ΧΩΡΟ

Η χρονική περίοδος στην οποία αναφέρεται η ακόλουθη ενότητα εκτείνεται από τα τέλη του 7^{ου} αι. μέχρι τον 4^{ο} αι. π.Χ., δηλαδή στα τέλη της αρχαϊκής και στην κλασική ελληνική περίοδο. Τα σύνορα του ελλαδικού χώρου μετακινούνται κατά το διάστημα αυτό και η ιστορία των μαθηματικών έχει να αντλήσει πληροφορίες για μαθηματικές εξελίξεις τόσο από την Αθήνα, που υπήρξε πολιτιστικό κέντρο από τα μέσα του 5^{ου} αιώνα, όσο και από τις διάφορες ελληνικές αποικίες που γνώρισαν ακμή, από τα παράλια της Μικράς Ασίας και την νότια Ιταλία μέχρι την Αλεξάνδρεια. Συχνά σε πηγές διαβάζουμε για ταξίδια που έγιναν από Έλληνες επιστήμονες στην Αίγυπτο ή γενικότερα σε περιοχές της Ανατολής.

«Η σχολή των Αθηνών», η περίφημη τοιχογραφία του Ραφαήλ (Βατικανό - 1510/11)

Από τις πρώτες διατυπώσεις γεωμετρικών προτάσεων γενικής ισχύος, όπως για παράδειγμα ότι *«Κάθε διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη»* (Θαλής ~600 π.Χ), μέχρι την θεμελίωση της θεωρίας αναλογιών (Εύδοξος, $4^{ος}$ αι.π.Χ), βάσει της οποίας αποδείχθηκε ότι: *«Το εμβαδό οποιουδήποτε κύκλου είναι ανάλογο του τετραγώνου της διαμέτρου του»*, παρατηρείται η εξέλιξη μίας παράδοσης που απαιτεί την τεκμηρίωση και άρα την γενίκευση κάθε ισχυρισμού.

Για πρώτη φορά στην ιστορία, διαπραγματεύτηκαν επιστημολογικά ερωτήματα πάνω σε μαθηματικές έννοιες. Πώς θα είμαστε σίγουροι ότι μία γεωμετρική πρόταση που ανακαλύψαμε είναι αληθής; Μπορούμε να τεκμηριώσουμε την αλήθεια αυτή, έτσι ώστε και άλλοι να την δέχονται ανεξάρτητα από την αυθεντία της δήλωσής μας; Υπάρχει δομικός συσχετισμός μεταξύ κάποιων εννοιών; κ.τ.λ. Προσπαθώντας να δώσουν απαντήσεις σε αυτού του είδους τα ερωτήματα, οι Έλληνες συνέλαβαν την δύναμη της λογικής παραγωγικής μεθόδου και θεμελίωσαν την γεωμετρία ως θεωρητική επιστήμη.

Αντιλήφθηκαν, δηλαδή, ότι αν στοιχειοθετηθούν γενικά θεωρήματα, μπορούν στη συνέχεια να εφαρμοστούν κάτω από οποιεσδήποτε συγκεκριμένες συνθήκες και να εξυπηρετήσουν λειτουργικούς σκοπούς με την βοήθεια υπολογισμών. Δημιούργησαν έτσι έναν νέο επιστημονικό κλάδο που πραγματεύεται τις ιδιότητες των εξ' αρχής ορισμένων βασικών γεωμετρικών μορφών (σημείο, ευθεία, γωνία, κύκλος, πολύγωνα, πολύεδρα). Και ενώ τα ίδια τα αντικείμενα που μελετώνται (κύκλοι, τετράγωνα, κ.τ.λ.) είναι αντικείμενα που αναπαριστούν μορφές της φυσικής πραγματικότητας, η διαπραγμάτευση των θεωρητικών τους παραμέτρων (ιδιότητες, σχέσεις κ.τ.λ.) τα καθιστά αφηρημένες εκδοχές της πραγματικότητας, δηλαδή ανάγονται σε «γεωμετρικές έννοιες». Μέσω της φιλοσοφίας και κυρίως της διαλεκτικής, εισάγεται η έννοια της απόδειξης που οργανώνει τις γεωμετρικές έννοιες με θεωρητικό και όχι πλέον λειτουργικό τρόπο.[53]

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

«Γνωστά»

↓ Λογικοί κανόνες ⟶ **Αξιωματική θεμελίωση**

Περιορισμός «γνωστών»

Νέα γνώση (Τεκμηρίωση)

Το αξιωματικό σύστημα που ανέπτυξαν οι Αρχαίοι Έλληνες καθώς και οι γνώσεις που κατέκτησαν μέχρι και την αλεξανδρινή περίοδο συνοψίζεται στα **Στοιχεία του Ευκλείδη**, που εκτιμάται ότι συγγράφηκαν περίπου το 300 π.Χ. Πριν τη συγγραφή αυτού του έργου συντελέστηκαν πολλά βήματα από σπουδαίους μαθηματικούς που έδρασαν πριν και κατά την διάρκεια λειτουργίας της Πλατωνικής Ακαδημίας. Τα περισσότερα από τα οποία, οργανώνονται επιμελώς μέσα στο έργο αυτό, στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος που γνωρίζουμε ότι δίδαξε ο Αριστοτέλης. Το ίδιο έργο στην συνέχεια αποτέλεσε εγχειρίδιο και αναφορά για νεώτερους μαθηματικούς, όπως τον Αρχιμήδη, ο οποίος και θα αποτελέσει αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

Τα αποτελέσματα ωστόσο που δεν περιλαμβάνονται στα βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη είναι αυτά που σχετίζονται με την επίλυση των περίφημων «άλυτων προβλημάτων» της αρχαιότητας, δηλαδή του διπλασιασμού του κύβου, της τριχοτόμησης

[53] Το σχήμα είναι από τις σημειώσεις του μαθήματος «*Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών – Στοιχεία Ευκλείδη*» από τον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη (2005-2006).

της γωνίας και του τετραγωνισμού του κύκλου. Τα προβλήματα αυτά κάθε άλλο παρά άλυτα δεν υπήρξαν από τον 5ο αι. π.Χ και για πολλούς αιώνες στην συνέχεια. Το γεγονός ότι δεν κατάφεραν να λυθούν με τον επικρατέστερο αποδεκτό τρόπο, τους έδωσε τον περίφημο επιθετικό προσδιορισμό «άλυτα». Ο αποδεκτός τρόπος κατασκευής, χωρίς να υπεισέρθουμε στην προέλευσή του, περιορίζει τον γεωμέτρη σε πεπερασμένων βημάτων χρήση δύο γεωμετρικών οργάνων: του αδιαβάθμητου κανόνα και του διαβήτη. Τον περιορίζει δηλαδή, στην επίλυση κάθε προβλήματος με πεπερασμένες τομές ευθειών και κύκλων. Στο διάστημα που εξετάζουμε ήταν συνηθισμένες και άλλου είδους κατασκευές όπως η «νεύση»[54] ή αντιστοίχως άλλα γεωμετρικά όργανα με τα οποία δίνονται λύσεις σε προβλήματα. Με τη διατύπωση των τριών πρώτων αξιωμάτων του, ο Ευκλείδης συνοψίζει το τι είναι αποδεκτό ως «γνωστό» για τις ιδιότητες της ευθείας και του κύκλου, αναφορικά με τις γεωμετρικές κατασκευές,

1ον Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2ον Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3ον Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Ο βασικός παράγοντας της επίμονής για μία επίπεδη[55] λύση, είναι ότι αφού ο κύκλος είναι βασικό συστατικό στοιχείο, αυτού του αξιωματικού συστήματος, αναμενόμενο θα ήταν η μέτρησή του να γίνεται εντός του συστήματος αυτού.

Παρόλα αυτά η καμπύλη του Ιππία που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια ή η κατασκευαστική μέθοδος «νεύσις», ενώ δεν υπεισέρχονται στην επίπεδη γεωμετρία των Στοιχείων του Ευκλείδη, επιβιώνουν και συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται[56], δίνοντας λύση στον τετραγωνισμό του κύκλου.

Τελική απάντηση στο πρόβλημα αυτό θα δοθεί τον 19ο αι. μ.Χ. όταν πλέον με εργαλείο την άλγεβρα και όχι την γεωμετρία, θα αποδειχθεί ότι ενώ οι κατασκευές των Στοιχείων μπορούν να παράγουν άπειρα το πλήθος μήκη ευθύγραμμων τμημάτων, αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν όλα μήκος που αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο το π δεν ανήκει, κάτι που κάνει τον τετραγωνισμό του κύκλου αδύνατο με κανόνα και διαβήτη.

---

[54] «Κατασκευή νεύσεως» ή «νεύσις» ήταν η κατασκευή ενός ευθύγραμμου τμήματος που να πληρεί τις εξής τρεις συνθήκεςQ α) να είναι ίσο με δοσμένο μήκος, β) τα άκρα του να βρίσκονται σε γνωστές γραμμές και γ) αν προεκταθεί να διέρχεται από γνωστό σημείο.

[55] Ο Πάππος στην «Συναγωγή» του, στα τέλη του 3ου αιώνα μ.Χ., θα αναφέρει ότι τα γεωμετρικά προβλήματα διαχωρίζονταν σε τρία είδη. Τα επίπεδα, τα οποία λύνονται μέσω της ευθείας και του κύκλου, τα στερεά τα οποία λύνονται μέσω μίας ή περισσοτέρων κωνικών τομών και τα γραμμικά για τα οποία χρησιμοποιούνται καμπύλες έτερες του κύκλου.

[56] Η «νεύσις» απαντάται στον τετραγωνισμό των μηνίσκων που θεωρούνται αποδεκτή λύση από τον Αριστοτέλη και θεωρείται γνωστή από τον Αρχιμήδη στην πρόταση 8 του έργου του «*Περί ελίκων»* στην οποία την χρησιμοποιεί χωρίς να την αποδείξει, ενώ πέντε αιώνες αργότερα ο Πάππος ανάγει την συγκεκριμένη κατασκευή σε αρχές των κωνικών τομών.

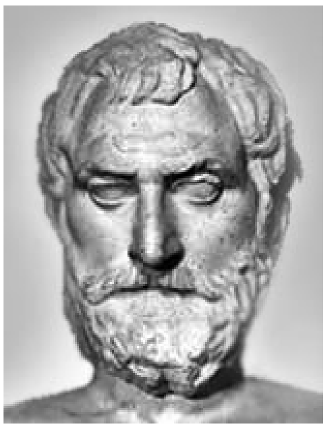
4.1 6^{ΟΣ} ΑΙΩΝΑΣ Π.Χ.

Πριν περάσουμε στις πρώτες απόπειρες τετραγωνισμού του κύκλου αξίζει να αναφερθούμε στην εποχή των προσωκρατικών φιλοσόφων. Για πρώτη φορά αρχίζει να διακρίνεται το φυσικό από το υπερφυσικό. Αν πρόκειται για κάτι φυσικό τότε αυτό θεωρείται αποτέλεσμα μίας αιτίας και με τις σχολές τις εποχής εκείνης μπαίνουν τα θεμέλια της λογικής αιτιολόγησης, δηλαδή της μελέτης της σχέσης του «αίτιου και αποτελέσματος» η ολοκλήρωση της οποίας θα διαρκέσει μέχρι και τον 18^{ο} αιώνα.

Η Ιωνική, η Ελεατική και η Πυθαγόρεια ήταν σχολές που αναπτύχθηκαν διαδοχικά σχεδόν κατά την περίοδο αυτή, στις πόλεις Μίλητο, Ελέα και Κρότωνα αντίστοιχα και η κάθε μία με τον τρόπο της συνέβαλε σ' αυτό που αργότερα ορίστηκε από τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη ως «επιστήμη». Προσέφεραν «νοητικά εργαλεία» προσέγγισης του φυσικού κόσμου, που χρησιμοποιούνται δημιουργικά μέχρι σήμερα, όπως είναι, π.χ., η ενότητα πίσω από τη φαινομενική πολλαπλότητα, το μέτρο, ο ρυθμός, η συμμετρία, η διάταξη, η αναλογία, η συνένωση αντιθέτων εννοιών, η διάκριση συνεχούς και διακριτού, η δυναμική ισορροπία κ.α.

4.1.1 ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ (624- 546 π.Χ.)

ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΗΜΙΚΥΚΛΙΟ



Ο Θαλής ο Μιλήσιος (640-546 π.Χ.) μεταξύ άλλων είναι ο πρώτος καταγεγραμμένος Έλληνας γεωμέτρης. Υπήρξε ιδρυτής της Ιωνικής σχολής, θεωρείται ο πατέρας της Γεωμετρίας και σίγουρα υπήρξε καθοριστικός παράγοντας για τις μετέπειτα γενιές φιλοσόφων. Παρόλα αυτά, τα επιτεύγματα που οφείλονται σ' αυτόν δεν είναι γνωστά με ακρίβεια και από απολύτως έγκυρη πηγή. Ο ίδιος δεν φαίνεται να άφησε κάποιο έργο και οι πληροφορίες που αντλούμε γι' αυτόν έχουν σαν αρχική πηγή τον Εύδημο που έζησε τρεις αιώνες αργότερα.

Το γνωστό απόσπασμα από τα από τα «Σχόλια στα Στοιχεία» του Πρόκλου (450 μ.Χ.) και μέσω αυτού από την «Ιστορία Γεωμετρίας» του Ευδήμου που έχει χαθεί και αποτελούσε βασική πηγή του Πρόκλου διαβάζουμε ότι ο Θαλής ήταν ο πρώτος που πήγε στην Αίγυπτο και έφερε στην Ελλάδα τη γεωμετρία. Ο ίδιος ανακάλυψε πολλές προτάσεις ενώ μετέδωσε, στους συνεχιστές του, τις βασικές αρχές που διέπουν αρκετές άλλες. Σε ορισμένες περιπτώσεις παρουσίασε τα προβλήματα με θεωρητικό τρόπο σε άλλες με πιο διαισθητικό.

«Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρεν, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον.»

(Πρόκλου, Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη 65,6-10)

Στον Θαλή αποδίδεται μεταξύ άλλων , η απόδειξη του ότι ο κύκλος χωρίζεται από την διάμετρο σε δύο ίσα μέρη.

Στα Στοιχεία του Ευκλείδη ο ορισμός της διαμέτρου έχει ως εξής:

*« **Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου** ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.»*

Δηλαδή, διάμετρος του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι στην περιφέρεια του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

Το δεύτερο κομμάτι του ορισμού: «*...ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον*», περιγράφει μια ιδιότητα της διαμέτρου σε σχέση με τον κύκλο που ο Πρόκλος αναφέρει ότι επιδέχεται απόδειξη (άρα θα μπορούσε να αποτελεί πρόταση) την οποία παλαιότερα έδωσε ο Θαλής:

« *Τὸ μὲν οὖν διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαί φασιν,*»

(Πρόκλου, Σχόλια στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη 157,10-11)

Ο Πρόκλος στη συνέχεια πιθανολογεί ότι η απόδειξη αυτή έγινε μέσω της «μεταφοράς» και «εφαρμογής», ένα είδος απόδειξης που δεν προτιμά ο Ευκλείδης στις αποδείξεις του (εκτός ελάχιστων εξαιρέσεων όπως στην πρόταση I.4.)

Συγκεκριμένα αναφέρει ότι γράφουμε την διάμετρο και στην συνέχεια επιθέτουμε το ένα κομμάτι που χωρίζεται πάνω στο άλλο. Αν δεν είναι ίσα το κομμάτι που μεταφέραμε θα «πέσει» είτε μέσα στο άλλο είτε έξω από αυτό, και στις δύο δε, περιπτώσεις επακόλουθο είναι ότι μία μικρότερη γραμμή (αυτή της ακτίνας του ενός ημικυκλίου) θα είναι ίση με μία μεγαλύτερη (την ακτίνα του άλλου ημικυκλίου που υπερέχει).

Ο Seidenberg[57], στο σημείο αναφέρει ότι ο Θαλής είναι δυνατόν να είχε έρθει σε επαφή με δύο διαφορετικούς υπολογισμούς για το εμβαδόν του κύκλου και του ημικυκλίου, όπως αυτοί παρατηρούνται στην περιοχή της Μεσοποταμίας και ίσως αυτός να είναι ο λόγος για τον οποίο ενδέχεται να οδηγήθηκε στην παραπάνω απόδειξη. Ωστόσο όλα αυτά είναι απλές εικασίες και συνθέτουν την εικόνα του πρώτου «σοφού της αρχαιότητας» όπως για τόσους αιώνες είναι γνωστός ο Θαλής ο Μιλήσιος.

[57] A. Seidenberg, (1972-73) «On the area of a semi-circle», Arch. Hist. Exact Science., Τόμος 9, σελ. 171-211

4.2 5^{ΟΣ} ΑΙΩΝΑΣ Π.Χ.

Κατά την διάρκεια του 5ου αιώνα π.Χ. η Αθήνα γίνεται το κέντρο της εμπορικής συναλλαγής στο Αιγαίο και αποκτάει μεγάλη πολιτική δύναμη. Αυτός είναι ο Χρυσός αιώνας του Περικλή, τότε χτίζεται ο Παρθενώνας και δημιουργούνται τα σπουδαία έργα τέχνης της κλασικής περιόδου. Αυτόν τον αιώνα έζησε οι λεγόμενοι σοφιστές και ο Σωκράτης που μέσω του Πλάτωνα θα επηρεάσει την μετέπειτα εξέλιξη της φιλοσοφίας.

Στον τομέα των μαθηματικών δύο είναι τα ζητήματα που απασχολούν τους μελετητές: η θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών και η επίλυση των γνωστών «άλυτων» προβλημάτων της αρχαιότητας.

4.2.1 ΑΝΑΞΑΓΟΡΑΣ Ο ΚΛΑΖΟΜΕΝΙΟΣ (περ. 500-428 π.Χ.)

1^{Η} ΑΝΑΦΟΡΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ο Αναξαγόρας αποτελεί την παλαιότερη αναφορά σε Έλληνα μαθηματικό που λέγεται ότι ασχολήθηκε με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, αλλά δυστυχώς δεν έχει σωθεί αντίστοιχο έργο του.

Η αναφορά που έχουμε είναι από τον Πλούταρχο (46-127 μ.Χ.) και λέει ότι κατά την διάρκεια της φυλάκισης του για ασέβεια προς τους θεούς (περίπου το 430 π.Χ.) «έγραφε» τον τετραγωνισμό του κύκλου. Ο Πλούταρχος δεν αναφέρει τη μέθοδο που ακολούθησε ο μεγάλος αστρονόμος και μαθηματικός, ούτε υπάρχει άλλη πηγή να το επιβεβαιώνει.

4.2.2 ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ Ο ΑΒΔΗΡΙΤΗΣ (περ. 460-370 π.Χ.)

1^{Η} ΑΝΑΦΟΡΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Ο Δημόκριτος γεννήθηκε στα Άβδηρα περίπου το 460 π.Χ. και υπήρξε μαθητής του Λεύκιππου. Έμεινε στην ιστορία για την ατομική θεωρία του, αν και δεν ήταν ο πρώτος που την εισήγαγε. Ο δάσκαλός του Λεύκιππος είχε εισάγει αντίστοιχο ατομικό σύστημα όπως είχε κάνει και ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος[58].

Έχοντας μελετήσει το έργο του Αναξαγόρα του Κλαζομένιου, ο Δημόκριτος γνωρίζουμε ότι επισκέφτηκε την Αθήνα σε νεαρή ηλικία για να τον συναντήσει, χωρίς ωστόσο να τα καταφέρει να έρθει σε επαφή μαζί του.

58

Γνωρίζουμε ότι ο Δημόκριτος υπήρξε πολύ-γραφότατος, ωστόσο δεν σώζεται κανένα από τα έργα του. Μαθαίνουμε ότι έγραψε, μεταξύ άλλων έργα που αναφέρονται με τους εξής τίτλους:

I)

1. Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ Περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης
2. Περὶ γεωμετρίης
3. Γεωμετρικῶν
4. Ἀριθμοί.

II)

1. Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν α,β (2 βιβλία)
2. Ἐκπετάσματα (48)
3. Μέγας ἐνιαυτὸς ἢ Ἀστρονομίη, παράπηγμα
4. ἅμιλλα κλεψύδραι.

Σημαντικό ζήτημα που δεν έχει αποσαφηνιστεί είναι αν ο Δημόκριτος θεωρούσε τα γεωμετρικά αντικείμενα εξίσου αδιαίρετα όπως τα άτομα που πραγματεύεται η θεωρία του. Υπάρχουν ενδείξεις ότι κάθε άλλο παρά εμπόδισε τις μαθηματικές του μελέτες, η θεωρία αυτή, όπως για παράδειγμα η παρακάτω αναφορά του Πλούταρχου:

«Αν», είπε ο Δημόκριτος,
«ένας κώνος τμηθεί σε παράλληλα με τη βάση του επίπεδα
(εννοώντας επίπεδες τομές απείρως κοντά στην βάση),
τι θα πρέπει να σκεφτούμε για τις επιφάνειες των τομών αυτών;
Είναι ίσες μεταξύ τους ή όχι;
Διότι αν είναι άνισες τότε θα καταστήσουν τον κώνο ανώμαλο,
με ανισότητες και οδοντώσεις σαν σκαλοπάτια.
Εν είναι ίσες, δε, μεταξύ τους τότε ο κώνος
φαίνεται να έχει την ιδιότητα του κυλίνδρου
και να αποτελείται από ίσους και όχι άνισους κύκλους,
πράγμα που είναι παράλογο.

Πλουτάρχου, De comm.. not. Adv. Stoicos, xxxix. 3.

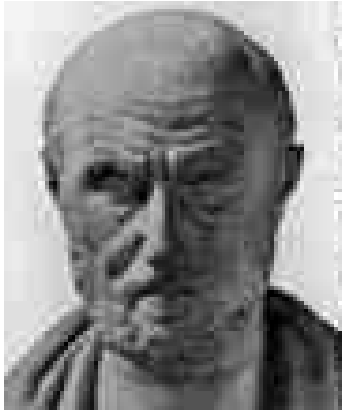
Δεν γνωρίζουμε ποια είναι η μετέπειτα προσέγγιση του Δημόκριτου στο παράδοξο αυτό, αλλά μαθαίνουμε από τον ίδιο τον Αρχιμήδη ότι πρώτος ο Δημόκριτος ανακάλυψε και διατύπωσε την σχέση που συνδέει έναν κώνο και έναν κύλινδρο ίδιας βάσης και ύψους. Η πρόταση[59] αυτή περιέχεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και ο Αρχιμήδης αναφέρει ότι διατυπώθηκε αρχικά από τον Δημόκριτο, αλλά αποδείχθηκε αυστηρά πρώτα από τον Εύδοξο.

Θα παρατηρήσουμε τέλος ότι η ιδέα που προϋποθέτει το προηγούμενο δίλημμα είναι ότι άπειρες το πλήθος επιφάνειες συνθέτουν ένα στερεό, εισάγοντας την έννοια των απειροστών, δηλαδή ένα σύνολο άπειρων όρων που έχει πεπερασμένο άθροισμα. Την ιδέα αυτή χρησιμοποίησε και ο Αρχιμήδης δύο αιώνες αργότερα για να τετραγωνίσει ένα παραβολικό χωρίο.

[59] Στοιχεία Ευκλείδους, Πρόταση XII.10: Κάθε κώνος είναι ίσος με ίσο με το 1/3 του κυλίνδρου που έχει ίδια βάση και ίσο ύψος.

4.2.3 ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ Ο ΧΙΟΣ (περ. 470-410 π.Χ.)

1[ΟΣ] ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

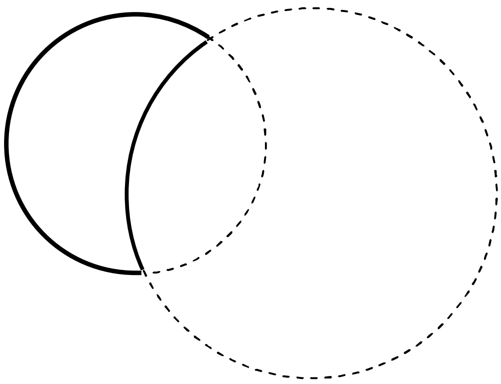


Ο Ιπποκράτης λέγεται από τον Πρόκλο ότι συνέγραψε Στοιχεία (Γεωμετρίας), ενώ σ' αυτόν αποδίδεται ο πρώτος τετραγωνισμός καμπυλόγραμμου σχήματος με όρους της επίπεδης γεωμετρίας:

«**Ἱπποκράτης ὁ Χῖος**
ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών
(...) πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης
τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν»

Για την ζωή του γνωρίζουμε ελάχιστα πέρα από την καταγωγή του και την ενασχόλησή του με την γεωμετρία. Σήμερα βάση της χρονολογίας που αποδίδεται στον Ιπποκράτη και των υπόλοιπων αναφορών σε προγενέστερους του, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι υπήρξε από τους πρώτους που κατέθεσαν γραπτή πραγματεία με μαθηματικό περιεχόμενο χωρίς να προκύπτει απαραίτητα ότι η πραγματεία αυτή ήταν αμιγώς γεωμετρικού περιεχομένου.[60]

Τα σχήματα που πραγματεύτηκε ο Ιπποκράτης ονομάζονται **μηνίσκοι**, και παίρνουν το όνομά τους από την λέξη *μήνη* που μεταξύ άλλων αποτελεί ονομασία της Σελήνης κατά τις πρώτες και τελευταίες ημέρες της φάσεώς της όπου λαμβάνει σχήμα δρεπανοειδές. Μηνίσκος δηλαδή είναι μία *μικρή μήνη.* Οι μηνίσκοι είναι γεωμετρικά σχήματα που περικλείονται από δύο τμήματα κυκλικής περιφέρειας, δηλαδή από τόξα δύο διαφορετικών κύκλων.



Από τις δύο γραμμές που αποτελούν «όρια» του μηνίσκου, «εξωτερική περιφέρεια» του μηνίσκου θεωρείται η μεγαλύτερου μήκους από τις δύο, ενώ «εσωτερική περιφέρεια» η γραμμή με το μικρότερο μήκος από τις δύο.

Παρά την αναφορά του Αριστοτέλη[61] στους μηνίσκους, ως «γεωμετρική» μεν αλλά λανθασμένη λύση του τετραγωνισμού του κύκλου, πάνω στην οποία έγιναν και τα

---

[60]Reviel Netz "Eudemus of Rhodes, Hippocrates of Chios and the Earliest form of a Greek Mathematical Text", Centaurus 2004: Vol. 46: pp. 243–286

[61] Ο Αριστοτέλης στα Φυσικά (185α 14) αναφέρει:

"οὔ, οἷον τὸν τετραγωνισμὸν τὸν μὲν διὰ τῶν τμημάτων γεω-
μετρικοῦ διαλῦσαι, τὸν δὲ Ἀντιφῶντος οὐ γεωμετρικοῦ·"

σχόλια του Σιμπλίκιου[62], αλλά και του δάσκαλού του Αλέξανδρου του Αφροδισέα, πιστεύεται ότι ο Ιπποκράτης δεν θεωρούσε ότι έχει λύσει το εν λόγω πρόβλημα. Σίγουρα ωστόσο το γεγονός ότι ο μηνίσκος αποτελεί τμήμα του κύκλου, παρουσιάζει ενδιαφέρον για ενδεχόμενη προέκταση στον τετραγωνισμό του κύκλου κάτι που το πιθανότερο να αποτέλεσε και τον αρχικό σκοπό του γεωμέτρη.

Ο Σιμπλίκιος θέλοντας μεταξύ άλλων να δείξει τον «γεωμετρικό χαρακτήρα» της απόδειξης του Ιπποκράτη επικαλείται τον Εύδημο τον Ρόδιο και συγκεκριμένα το δεύτερο βιβλίο της «Ιστορίας της Γεωμετρίας» του Ευδήμου που δεν σώζεται σήμερα:

Εισαγωγή Ευδήμου

"Καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν
οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν
κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον
ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν

Σιμπλίκιος, εις Αριστοτέλους Φυσικά 9, 61, 1-5

Οι τετραγωνισμοί των μηνίσκων, που λόγω της ομοιότητάς τους με τον κύκλο, δεν είναι από τα απλά σχήματα, επιτευχθήκαν πρώτα από τον Ιπποκράτη και θεωρηθήκαν ότι ήταν σωστά παρουσιασμένοι. Γι' αυτό και εμείς θα ασχοληθούμε με αυτούς και θα τους εξέλθουμε δια μακρών.

Απαραίτητη προϋπόθεση, για να διέλθουμε τα Σχόλια του Σιμπλίκιου είναι να έχουμε υπόψη μας ότι διαβάζοντάς τα, παίρνουμε στοιχεία από τουλάχιστον τρείς διαφορετικούς συγγραφείς χωρίς να είναι δυνατή η πλήρης αποκατάσταση της συμβολής του καθενός. Ο Σιμπλίκιος αν και λέει πως θα αναφέρει κατά λέξη τα λεγόμενα του Ευδήμου, παρεμβάλει σχόλια σχετικά με τα Στοιχεία του Ευκλείδη που είναι μεταγενέστερος του Ευδήμου.

Πληθώρα μελετητών έσκυψε πάνω στο κείμενο αυτό προσπαθώντας να ανακτήσει το απόσπασμα από την «Ιστορία της Γεωμετρίας» του μαθητή του Αριστοτέλη, που έζησε σε πιο κοντινή εποχή με τον Ιπποκράτη. Αλλά ακόμα κι αν αυτό ήταν δυνατό να επιτευχθεί με σιγουριά, δεν θα ήταν εφικτή η ανακατασκευή της λύσης του ίδιου του Ιπποκράτη, διότι όπως εύστοχα παρατηρεί ο **Reviel Netz**[63] ενδέχεται ο Εύδημος να έχει επέμβει στο έργο κατά τρόπο που θα το καταστήστούσε συμβατό με της αξίες της εποχής και της σχολής του. Το αρχικό κείμενο δεν πρέπει να είχε γράμματα όπως συμβαίνει στο πρώτο μισό του κειμένου και αν συμβαίνει αυτό θα πρέπει να είχε και αρκετά διαφορετικές γενικότερες διατυπώσεις.

Ας δούμε όμως τι διαβάζουμε στα σχόλια του Συμπλίκιου:

«ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων,
ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα
καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει.
(<u>τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν
λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις</u>)"»

(9, 61, 5-9)

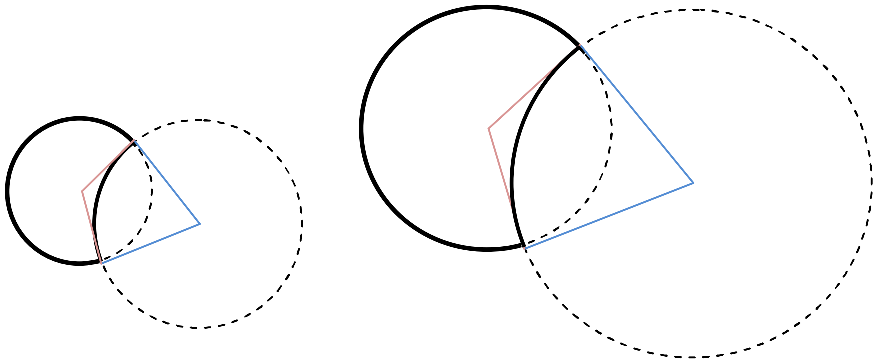
*Άρχισε λοιπόν θέτοντας (ο Ιπποκράτης) ως πρώτο μεταξύ των θεωρημάτων που χρησιμεύουν για τον σκοπό του, ότι **τα όμοια τμήματα των κύκλων έχουν μεταξύ τους τον ίδιο λόγο που έχουν τα τετράγωνα των βάσεών τους.***

---

[62] Σιμπλίκιος, εις Αριστοτέλους Φυσικά 9, 53, 24 - 69, 34

[63] R.Netz, (2004) *Eudemus of Rhodes, Hippocrates of. Chios and the Earliest form of a Greek.Mathematical Text*, Centaurus, 46(4), σελ. 243-286.

Εδώ να σημειώσουμε ότι:
Τμήματα κύκλου προκύπτουν από την τομή του κύκλου με μία μόνο γραμμή.[64]
Όμοια τμήματα κύκλου είναι αυτά των οποίων οι εξωτερικές επιφάνειες αντιστοιχούν σε ίσες μεταξύ τους γωνίες και το ίδιο συμβαίνει με τις εσωτερικές τους επιφάνειες.



Αυτό που ακολουθεί (μέσα σε παρένθεση) μετά την διατύπωση του «αρχικού» θεωρήματος είναι ότι ο Ιπποκράτης γνώριζε και απέδειξε την βασικότερη πρόταση που αφορά την μέτρηση του κύκλου.

*(Αυτό δε [αναφέρεται στην προηγούμενη πρόταση], το απέδειξε **δείχνοντας ότι τα τετράγωνα των διαμέτρων έχουν τον ίδιο λόγο με τους κύκλους**.)*

Πρόκειται δηλαδή, για την πρόταση XII. 2 των Στοιχείων που αποδίδεται στον Εύδοξο και συνδέεται άρρηκτα με την λεγόμενη «μέθοδο της εξάντλησης» που φαίνεται ότι χρησιμοποίησε πρώτος, ο ίδιος γεωμέτρης περίπου 60 χρόνια αργότερα. Στην πρόταση αυτή θα αναφερθούμε σε έκταση στην συνέχεια. Η απόδειξη ωστόσο που έδωσε ο Εύδοξος, δεν είναι δυνατόν να σχετίζεται με την απόδειξη που λέει το κείμενο ότι δόθηκε από τον Ιπποκράτη, αφού από τα υπόλοιπα στοιχεία που έχουμε στην διάθεσή μας είναι εμφανές ότι η θεωρία λόγων που χρησιμοποιεί είναι προγενέστερη.

Δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε αν ο Ιπποκράτης παρουσίασε κάποιου είδους απόδειξη και με ποιόν τρόπο το έκανε αυτό. Υπάρχει ακόμα και η άποψη ότι η αναφορά στην πρόταση XII.2 είναι προσθήκη του Εύδημου και ότι ο Ιπποκράτης έθεσε ως αναπόδεικτη την αρχική του πρόταση για τον λόγο όμοιων τμημάτων. Δεδομένου ότι οι ορισμοί και οι αρχές ενδέχεται να ήταν διαφορετικοί για την κάθε σχολή πριν από την Ακαδημία (και τα στοιχεία του Ευκλείδη που ήταν αποτέλεσμα της), θα μπορούσε, για παράδειγμα, αφού τα όμοια τμήματα έχουν λόγο όσο τα τετράγωνα των βάσεών τους, να προκύπτει ότι τα ημικύκλια ως τμήματα με βάση την διάμετρο του κύκλου, είναι ανάλογα των τετραγώνων των διαμέτρων και συνεπώς τα διπλάσιά τους, δηλαδή οι κύκλοι να έχουν επίσης ίδιο λόγο με αυτόν των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Όπως και να έχει, αυτό που δεν αμφισβητείται είναι ότι η πρόταση που θα συνηθίζουμε να αναφέρουμε ως XII.2 ήταν στον Ιπποκράτη έμμεσα ή άμεσα γνωστή.

Όσο αφορά τώρα την απόδειξη «τετραγωνισμού» ο Ιπποκράτης απέδειξε τον τετραγωνισμό ενός είδους από τρεις διαφορετικές κλάσεις μηνίσκων. Έδειξε ότι είναι δυνατόν να τετραγωνιστούν:

- ορισμένοι από τους μηνίσκους που έχουν εξωτερική περιφέρεια ίση με ημικύκλιο (Συγκεκριμένα αυτούς που έχουν εσωτερική περιφέρεια ίση με τεταρτοκύκλιο),

[64] Με αυτόν τον ορισμό συμφωνεί και η αναφορά του Αριστοτέλη σε «τετραγωνισμὸν τὸν μὲν διὰ τῶν τμημάτων» αφού και οι μηνίσκοι είναι τμήματα του κύκλου που έχουν διαχωριστεί από μία γραμμή.

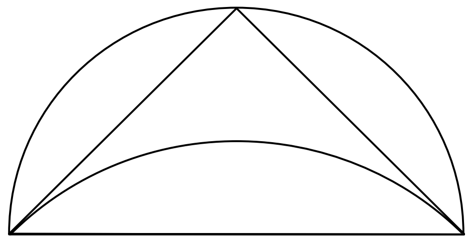
- ορισμένοι από του μηνίσκους που έχουν εξωτερική επιφάνεια μεγαλύτερη από ημικύκλιο και
- ορισμένοι από του μηνίσκους που έχουν εξωτερική επιφάνεια μικρότερη από ημικύκλιο.

Το γεγονός ότι κάθε μηνίσκος ανήκει σε μία από τις τρείς αυτές κλάσεις δεν σημαίνει απαραίτητα ότι κάθε μηνίσκος της κάθε κλάσης τετραγωνίζεται.

Στην συνέχεια παραθέτουμε μόνο τα χωρία που αναφέρονται στην κατασκευή που οδηγεί στην εκάστοτε λύση προκειμένου να πάρουμε μία γενική ιδέα.

- **Με εξωτερική περιφέρεια <u>ίση με ημικύκλιο</u>**

(και εσωτερική περιφέρεια ίση με τεταρτοκύκλιο)

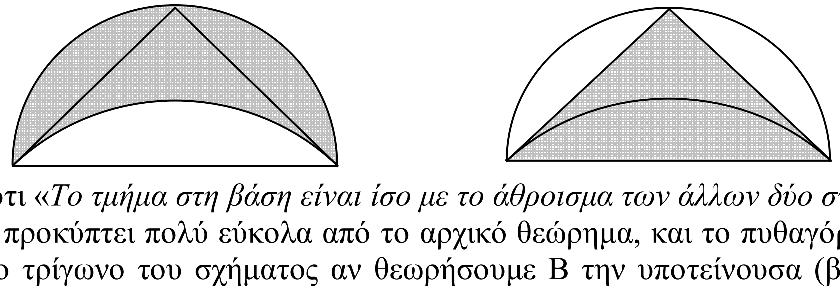


«...ἀπεδίδου δὲ τοῦτο περὶ τρίγωνον ὀρθογώνιόν τε καὶ ἰσοσκελὲς ἡμικύκλιον περιγράψας καὶ περὶ τὴν βάσιν τμῆμα κύκλου τοῖς ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἀφαιρουμένοις ὅμοιον,” (...) “ὄντος δὲ τοῦ περὶ τὴν βάσιν τμήματος ἴσου τοῖς περὶ τὰς ἑτέρας ἀμφοτέροις”(...) “καὶ κοινοῦ προστεθέντος τοῦ μέρους τοῦ τριγώνου τοῦ ὑπὲρ τὸ τμῆμα τὸ περὶ τὴν βάσιν, ἴσος ἔσται ὁ μηνίσκος τῷ τριγώνῳ. ἴσος οὖν ὁ μηνίσκος τῷ τριγώνῳ δειχθεὶς τετραγωνίζοιτο ἄν”(...) “οὕτως μὲν οὖν ἡμικυκλίου τὴν ἔξω τοῦ μηνίσκου περιφέρειαν ὑποθέμενος ἐτετραγώνισεν ὁ Ἱπποκράτης τὸν μηνίσκον εὐκόλως.»

(Σιμπλίκιος, εις Αριστοτέλους Φυσικά 9, 61, 19 – 62, 12)[65]

Ελεύθερη μετάφραση:

Αυτό το πέτυχε περιγράφοντας ημικύκλιο γύρω από ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο και κατασκευάζοντας στην βάση ένα κυκλικό τμήμα όμοιο με αυτά που αποκόπτονται από τις κάθετες πλευρές. Επειδή το τμήμα στην βάση είναι ίσο με το άθροισμα των δύο άλλων τμημάτων στις δύο κάθετες πλευρές, αν προστεθεί και στα μέρος του τριγώνου που βρίσκεται πάνω από το τμήμα της βάσης, ο μηνίσκος θα είναι ίσος με το τρίγωνο και άρα τετραγωνίζεται. Υποθέτοντας λοιπόν την εξωτερική περιφέρεια του μηνίσκου ίση με ημικύκλιο, ο Ιπποκράτης τον τετραγώνισε εύκολα.



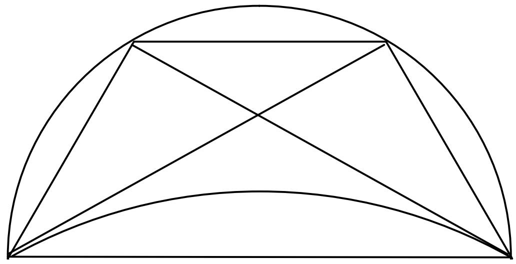
Το ότι «*Το τμήμα στη βάση είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων δύο στις δύο κάθετες πλευρές*», προκύπτει πολύ εύκολα από το αρχικό θεώρημα, και το πυθαγόρειο, αφού στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος αν θεωρήσουμε Β την υποτείνουσα (βάση) και β τις ίσου μήκους κάθετες πλευρές, ισχύει: $B^2 = \beta^2 + \beta^2$ άρα και $1 = \frac{\beta^2}{B^2} + \frac{\beta^2}{B^2}$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε Χ, x και x, το εμβαδό των κυκλικών τμημάτων στη βάση και στις δύο

[65] Μόνο οι αναφορές που αποδίδονται στον Εύδημο κατά τον O. Becker (1936)

κάθετες αντίστοιχα., θα πάρουμε λόγω της αρχής που έχει προϋποθέσει ο Ιπποκράτης, ότι

$1 = \dfrac{x^2}{X^2} + \dfrac{x^2}{X^2}$, άρα και $X^2 = x^2 + x^2$.

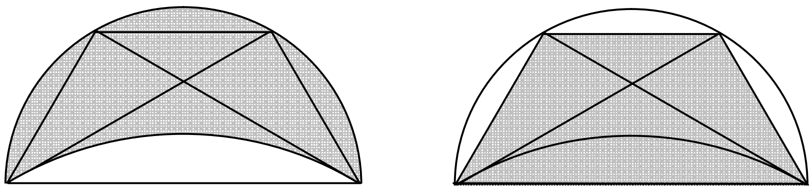
- Με **εξωτερική περιφέρεια** **<u>μεγαλύτερη από ημικύκλιο</u>**



« Εἶτα ἐφεξῆς μείζονα ἡμικυκλίου
ὑποτίθεται συστησάμενος τραπέζιον
τὰς μὲν τρεῖς ἔχον πλευρὰς ἴσας ἀλλήλαις,
τὴν δὲ μίαν τὴν μείζω
τῶν παραλλήλων τριπλασίαν
ἐκείνων ἑκάστης δυνάμει,
καὶ τό τε τραπέζιον περιλαβὼν
κύκλῳ καὶ περὶ τὴν μεγίστην αὐ-
τοῦ πλευρὰν ὅμοιον τμῆμα περι-
γράψας τοῖς ὑπὸ τῶν ἴσων τριῶν
ἀποτεμνομένοις ἀπὸ τοῦ κύκλου."»

(Σιμπλίκιος, εις Αριστοτέλους Φυσικά 9, 62, 13 – 23)[66]

Ελεύθερη μετάφραση:
Στην συνέχεια θέτει (την εξωτερική επιφάνεια) μεγαλύτερη του ημικυκλίου κατασκευάζοντας τραπέζιο με τρεις ίσες πλευρές και την άλλη, την μεγαλύτερη των παραλλήλων τριπλάσια από το τετράγωνο της κάθε μίας από αυτές. Και περιγράφεται στο τραπέζιο κύκλος και στην μεγαλύτερη πλευρά του περιγράφεται τμήμα όμοιο με το κάθε ένα από τα τμήματα των άλλων πλευρών.



Η απόδειξη της ισότητας αυτής είναι αντίστοιχη με την προηγούμενη.

- Με **εξωτερική περιφέρεια** **<u>μικρότερη από ημικύκλιο</u>**

«Εἰ δὲ ἐλάττων ἡμικυκλίου εἴη, προγράψας τοιόνδε τι ὁ Ἱπποκράτης τοῦτο κατεσκεύασεν·
ἔστω κύκλος οὗ διάμετρος ἐφ' ᾗ [ἡ] ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτοῦ ἐφ' ᾧ Κ·
καὶ ἡ μὲν ἐφ' ᾗ ΓΔ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω τὴν ἐφ' ᾗ ΒΚ·
ἡ δὲ ἐφ' ᾗ ΕΖ κείσθω ταύτης μεταξὺ καὶ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ Β νεύουσα
τῶν ἐκ τοῦ κέντρου ἡμιολία οὖσα δυνάμει.»

Ελεύθερη μετάφραση:
Ο Ιπποκράτης το έλυσε πρώτος και αυτό, κάνοντας πρώτα την εξής κατασκευή:

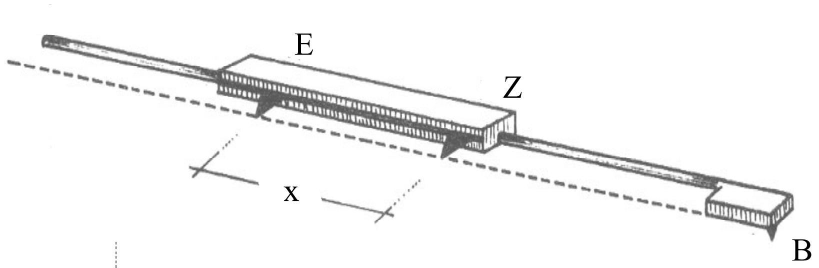
---
[66] Μόνο οι αναφορές που αποδίδονται στον Εύδημο κατά τον O. Becker (1936)

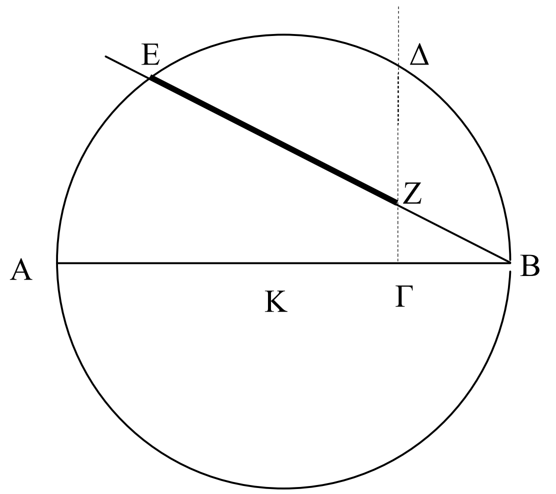
Έστω

- *κύκλος με διάμετρο ΑΒ και κέντρο το Κ*
- *ΓΔ μεσοκάθετος της ΒΚ*
- *ΕΖ κατασκευάζεται έτσι ώστε*
  - *να έχει τα άκρα της πάνω στην ΓΔ και την περιφέρεια του κύκλου*
  - *να «νεύει» προς το Β (η ΕΖ δηλαδή προεκτεινόμενη περνάει από το σημείο Β)*
  - *να είναι το τετράγωνό της μιάμιση φορά το τετράγωνο της ακτίνας.*

Η κατασκευή του τμήματος ΕΖ παραπέμπει άμεσα στην κατασκευή της «**νεύσης**»[67]

Το ΕΖ μπορεί να κατασκευαστεί με ένα όργανο που μοιάζει με την εικόνα που ακολουθεί, με τον εξής τρόπο: Τοποθετούμε την σταθερή ακίδα στο σημείο Β, ρυθμίζουμε τις κινητές ακίδες στο επιθυμητό μήκος, που στην προκειμένη περίπτωση είναι $x = \frac{\sqrt{2}}{2}BK$, και στρέφοντας το όργανο που έχει το άκρο του σταθερά στο Β, κουνώντας κατάλληλα την πλατφόρμα ΕΖ έτσι ώστε να ακουμπάει στις δύο γραμμές που ζητάει το πρόβλημα (εδώ στην ΓΔ και την περιφέρεια του κύκλου).





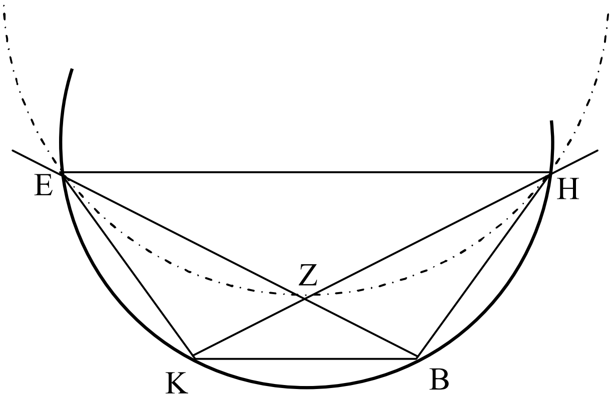
«ἡ δὲ ἐφ' ᾗ ΕΖ κείσθω ταύτης *(της ΓΔ)*
μεταξὺ καὶ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ Β νεύουσα»

[67] Κατασκευή ευθύγραμμου τμήματος η προέκταση του οποίου να περνάει από («νεύει», κλίνει δηλαδή προς) δοσμένο σημείο, το οποίο να έχει γνωστό μήκος και τα άκρα του να βρίσκονται πάνω σε γνωστές γραμμές.

ᾱίή δὲ ἐφ' ᾗ ΕΗ ἤχθω παρὰ τὴν ἐφ' ᾗ ΑΒ.
καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ Ε Ζ.
συμπιπτέτω δὲ ἐκβαλλομένη ἡ ἐπὶ τὸ Ζ
ἐπιζευχθεῖσα τῇ ἐφ' ᾗ ΕΗ κατὰ τὸ Ηίή

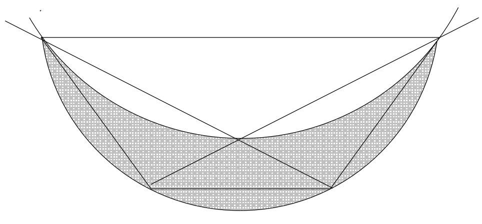
(Σιμπλίκιος, εις Αριστοτέλους Φυσικά 9, 64, 19 – 21)

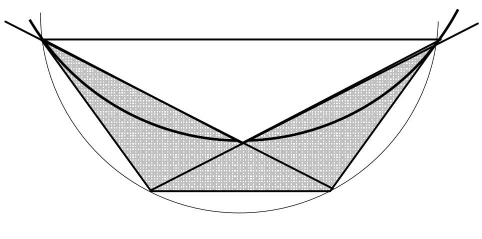
Φέρνουμε, δηλαδή, την ΕΗ παράλληλη στην ΑΒ και από το Κ φέρουμε τις ΚΕ και ΚΖ. Η ΚΖ τέμνει την ΕΗ στο Η.



Στην συνέχεια δείχνει ότι το τραπέζιο ΕΚΒΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο τον οποίο και περιγράφει και αφού περιγράψει κύκλο και γύρω από το τρίγωνο ΕΖΗ, δείχνει ότι ο μηνίσκος ΕΚΒΗΖ ισούται με το άθροισμα των τριγώνων ΒΖΗ, ΒΖΚ και ΕΚΖ.

Τούτων οὕτως ἐχόντων ὁ γενόμενος μηνίσκος οὗ ἐκτὸς περι-
φέρεια ἡ ΕΚΒΗ ἴσος ἔσται τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ συγκειμένῳ ἐκ
τῶν τριῶν τριγώνων τῶν ΒΖΗ ΒΖΚ ΕΚΖ **(65, 24-26)**





Να σημειώσουμε ακόμα ότι στην δεύτερη και τρίτη περίπτωση, παρατίθεται επιπλέον ξεχωριστή απόδειξη, για το αν όντως η εξωτερική περιφέρεια τους είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη, αντίστοιχα, από ημικύκλιο.

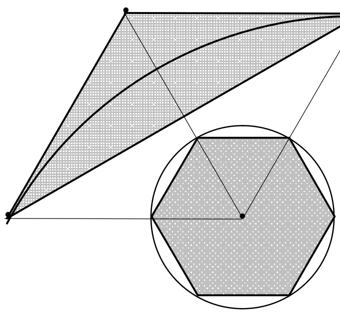
Ο Συμπλίκιος συνάγει μετά το πέρας της απόδειξης των τριών περιπτώσεων, το συμπέρασμα ότι ο Ιπποκράτης τετραγώνισε όλους τους μηνίσκους:

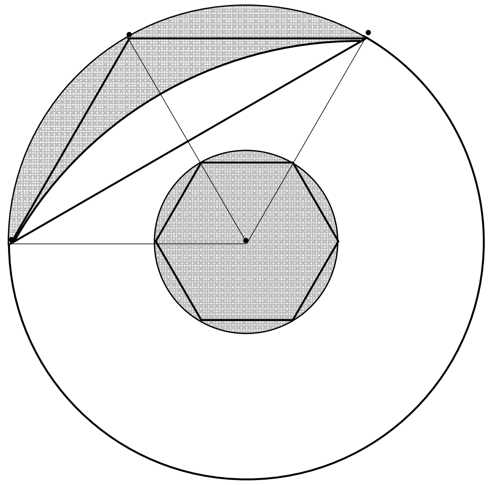
οὕτως μὲν οὖν ὁ ῾Ιπποκράτης πάντα μηνίσκον ἐτετραγώνισεν,
εἴπερ καὶ τὸν ἡμικυκλίου καὶ τὸν μείζονα ἡμικυκλίου
καὶ τὸν ἐλάττονα ἔχοντα τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν.”

(67, 3-6)

Όμως, όπως ήδη είπαμε, το γεγονός ότι κάθε μηνίσκος ανήκει σε μία από τις τρείς αυτές κλάσεις δεν σημαίνει απαραίτητα ότι κάθε μηνίσκος της κάθε κλάσης τετραγωνίζεται.

Τέλος, παρουσιάζει άλλον ένα τετραγωνισμό, που αντλεί επίσης από τον Εύδημο, δείχνοντας ότι ο Ιπποκράτης δεν επιχείρησε να τετραγωνίσει τον κύκλο μέσω του εξαγώνου όπως είχε γράψει ο Αλέξανδρος ο Αφροδισεύς σε αντίστοιχο σχόλιο του, αλλά αντιθέτως τετραγώνισε (με την βοήθεια εξαγώνου) το **άθροισμα ενός κύκλου και ενός μηνίσκου.**





Σύμφωνα με έναν πιο σύγχρονο τρόπο διαχωρισμού περιπτώσεων, ο οποίος βασίζεται στην σχέση των επίκεντρων γωνιών που αντιστοιχούν στο «εσωτερικό» και «εξωτερικό τόξο του μηνίσκου», έχει αποδειχθεί με χρήση τριγωνομετρίας ότι είναι δυνατόν να τετραγωνιστούν με «επίπεδη» επίλυση, πέντε διαφορετικών κλάσεων.

Ένας μηνίσκος τετραγωνίζεται όταν ο λόγος του «εξωτερικού τόξου» προς το «εσωτερικό τόξο» είναι 2:1, 3:1, 3:2, 5:1 ή 5:3. Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι οι τρείς «τετραγωνισμοί» του Ιπποκράτη αποδεικνύουν με γεωμετρικό απόλυτα τρόπο τις τρείς πρώτες από τις παραπάνω πέντε περιπτώσεις.

4.2.4 ΑΝΤΙΦΩΝ Ο ΑΘΗΝΑΙΟΣ (περ. 480-411 π.Χ.)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

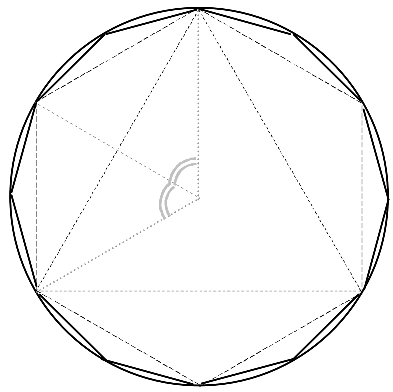
Ο Αριστοτέλης όπως είδαμε, στην παράγραφο του Ιπποκράτη, στο έργο του «Φυσικά» (Ι2.1 85α 15-17) αναφέρει την απόπειρα του Αθηναίου σοφιστή Αντιφώντα να τετραγωνίσει τον κύκλο λέγοντας ότι: είναι καθήκον του γεωμέτρη να αντικρούει τα λανθασμένα επιχειρήματα, όταν αυτά βασίζονται στις αρχές της γεωμετρίας, αλλιώς να τα αγνοεί, όπως πρέπει να κάνει με την απόδειξη του Αντιφώντα στον τετραγωνισμό του κύκλου.

«οὔ, οἷον τὸν τετραγωνισμὸν τὸν μὲν διὰ τῶν τμημάτων γεω-
μετρικοῦ διαλῦσαι, τὸν δὲ ᾿Αντιφῶντος οὐ γεωμετρικοῦ·»

Σε ελεύθερη μετάφραση ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι είναι καθήκον του γεωμέτρη να αντικρούσει τον τετραγωνισμό του κύκλου μέσω τμημάτων (κυκλικών, εννοώντας τους μηνίσκους), αλλά δεν είναι υποχρέωση του να αντικρούσει αυτόν του Αντιφώντα

Η γνώση μας για την μέθοδο που χρησιμοποίησε ο Αντιφών στον τετραγωνισμό (η οποία δεν ήταν βασισμένη κατά τον Αριστοτέλη στις αρχές τις γεωμετρίας) οφείλεται στους σχολιαστές του Αριστοτέλη (Εύδημο, Αλέξανδρο Αφροδισεύ, Συμπλίκιο)

Αυτό που λέγεται λοιπόν ότι έκανε ο Αντιφών ήταν να εγγράψει πολύγωνο στον κύκλο. Στην συνέχεια διχοτομώντας την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία, έγγραψε πολύγωνο με διπλάσιες το πλήθος πλευρές. Την διαδικασία αυτή την επανέλαβε συνεχώς, εγγράφοντας κανονικά πολύγωνα περισσότερων πλευρών με μήκος πλευράς όλο και μικρότερο.



Αυτό που λέγεται ότι θεώρησε ο Αντιφών, είναι ότι θα υπάρξει κάποια στιγμή που το μήκος των πλευρών του πολυγώνου θα είναι τόσο μικρό που στο σύνολό τους οι πλευρές θα συμπέσουν με την περιφέρεια. Αφού λοιπόν ο τετραγωνισμός πολυγώνου ήταν γνωστός στον Αντιφώντα, θεώρησε ότι κατ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να τετραγωνιστεί ο κύκλος.

Η αρνητική κριτική του Αριστοτέλη αποδίδεται από τους σχολιαστές του στο ότι με την μέθοδο αυτή δεν θα υπολογιστεί ποτέ ολόκληρη η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου, αφού σαν όλα τα μεγέθη έτσι και αυτή διαιρείται επ' άπειρον. Την παρατήρηση αυτή θεωρείται ότι πρώτος έκανε ο Εύδημος που υπήρξε μαθητής του Αριστοτέλη.

Παρόλα αυτά είναι προφανές ότι η μαθηματική ιδέα του Αντιφώντος δεν απέχει πολύ απ' αυτό που στη συνέχεια θα αποτελέσει δόκιμη μέθοδο τετραγωνισμού και θα ονομαστεί **μέθοδος της εξάντλησης**. Σήμερα θα λέγαμε περιγράφοντας την μέθοδο του Αντιφώντος ότι ο κύκλος είναι το όριο των εγγεγραμμένων πολυγώνων , όταν το πλήθος των πλευρών τους αυξάνεται απείρως ή με άλλα λόγια ότι η διαφορά μεταξύ της επιφάνειας του πολυγώνου και της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου μπορεί να γίνει όσο μικρότερη θέλουμε, δηλαδή μικρότερη από κάθε δοσμένη επιφάνεια.

Να σημειώσουμε ότι δεν γίνεται αναφορά σε περιγεγραμμένα πολύγωνα στην μέθοδο αυτή, κάτι που αποτελεί μία καινοτομία ενός νεότερου και σύγχρονου του Αντιφώντος σοφιστή, του Βρύσωνος του Ηρακλειώτη.

4.2.5 **ΒΡΥΣΩΝ Ο ΗΡΑΚΛΕΙΩΤΗΣ** (περ. 450-390 π.Χ.)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Η μέθοδος του Βρύσωνος επίσης σχολιάστηκε μέσω αναφοράς του Αριστοτέλη τόσο στο έργο του Περί των σοφιστικών ελέγχων, όσο και στο Πρότερα Αναλυτικά:

«…**οἷον ὁ τετραγωνισμὸς ὁ μὲν διὰ τῶν μηνίσκων οὐκ ἐριστικός, ὁ δὲ Βρύσωνος ἐριστικός**· καὶ τὸν μὲν οὐκ ἔστι μετενεγκεῖν ἀλλ' ἢ πρὸς γεωμετρίαν μόνον, διὰ τὸ ἐκ τῶν ἰδίων εἶναι ἀρχῶν, τὸν δὲ πρὸς πολλούς, ὅσοι μὴ ἴσασι τὸ δυνατὸν ἐν ἑκάστῳ καὶ τὸ ἀδύνατον· ἁρμόσει γάρ. ἢ ὡς ᾿Αντιφῶν ἐτετραγώνιζεν.»

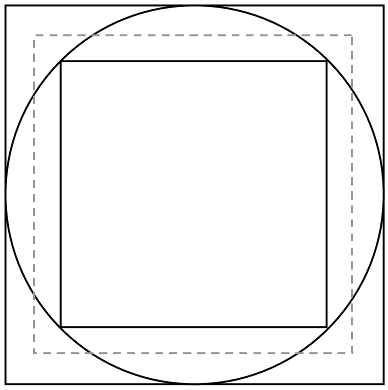
(Αριστοτέλους, Περί των σοφιστικών ελέγχων 172a 2-7)

«᾿Επεὶ δὲ φανερὸν ὅτι ἕκαστον ἀποδεῖξαι οὐκ ἔστιν ἀλλ' ἢ ἐκ τῶν ἑκάστου ἀρχῶν, ἂν τὸ δεικνύμενον ὑπάρχῃ ᾗ ἐκεῖνο, οὐκ ἔστι τὸ ἐπίστασθαι τοῦτο, ἂν ἐξ ἀληθῶν καὶ ἀναποδείκτων δειχθῇ καὶ ἀμέσων. ἔστι γὰρ οὕτω δεῖξαι, **ὥσπερ Βρύσων τὸν τετραγωνισμόν**.»

(Αριστοτέλους, Αναλυτικών Προτέρων 172a 2-7)

Ο Αριστοτέλης αποκαλώντας την μέθοδο εριστική και σοφιστική εννοεί ότι οι αρχές που χρησιμοποιούνται στον συλλογισμό είναι αρχές γενικότερης εφαρμογής και όχι οι αποδεκτές, αποκλειστικές αρχές της γεωμετρίας.

Ο Βρύσων στην μέθοδό του χρησιμοποίησε εγγεγραμμένο αλλά και περιγεγραμμένο πολύγωνο. Ωστόσο δεν φαίνεται από τις πηγές να ακολούθησε παρόμοια με τον Αντιφώντα διαδικασία προσέγγισης του προβλήματος με διπλασιασμό των πλευρών του κάθε πολυγώνου, κάτι που παρατηρείται από τον Πρόκλο ο οποίος σημειώνει ότι αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, δεν θα γινόταν γι' αυτόν ξεχωριστή αναφορά από τον Αριστοτέλη[4].



Αυτό που σίγουρα προκύπτει από τις πηγές και πέρα από την μέθοδο ή την εγκυρότητα του Βρύσωνος είναι ότι αυτός έκανε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την επιφάνεια ενός κύκλου, ενός περιγεγραμμένου και ενός εγγεγραμμένο πολύγωνου σ' αυτόν. Ο Αλέξανδρος ο Αφροδισεύς αναφέρει ότι τα πολύγωνα αυτά ήταν τετράγωνα ενώ οι Φιλόπονος και Θεμίστιος ότι επρόκειτο για κανονικά τρίγωνα.

Συγκεκριμένα ο Αλέξανδρος ο Αφροδισεύς γράφει ότι κατασκεύασε ένα τρίτο τετράγωνο (χωρίς να αναφέρει όμως την κατασκευή) μεταξύ των δύο άλλων που περιέβαλαν την περιφέρεια του κύκλου (εξωτερικά και εσωτερικά) και παρατήρησε ότι αφού αυτό είναι μικρότερο του περιγεγραμμένου και μεγαλύτερο του εγγεγραμμένου τετραγώνου, όπως και ο κύκλος, θα είναι ίσο σε επιφάνεια με τον κύκλο.

Αν όντως αυτό και μόνο είχε πει ο Αντιφών, ότι δηλαδή *δύο πράγματα αν είναι μικρότερα και τα δύο από κάτι δοσμένο και μεγαλύτερα και τα δύο από κάτι άλλο δοσμένο, είναι μεταξύ τους ίσα*, θα επρόκειτο για μία παρατήρηση τουλάχιστον αφελή και πράγματι χωρίς γεωμετρική σημασία προς συζήτηση, όπως παρατήρησε ο Αριστοτέλης. Δεν θα ήταν όμως ίσως ούτε άξια αναφοράς από τον ίδιο οπότε και οι απόψεις των μελετητών διίστανται. Κάποιοι θεώρησαν ότι το ενδιάμεσο πολύγωνο στο οποίο γίνεται αναφορά ήταν ο αριθμητικός ή ο γεωμετρικός μέσος ή ακόμα και ένας άλλου νέου είδους μέσος των δύο άλλων πολυγώνων. Κάποιοι άλλοι θεώρησαν ότι η μέθοδος του Βρύσωνος συμπληρώνει αυτήν του Αντιφώντος πλησιάζοντας ακόμη περισσότερο στην μεταγενέστερη μέθοδο της εξάντλησης που χρησιμοποιείται από τον Αρχιμήδη.

Κατά τον Heath «*ο Βρύσων ίσως πολλαπλασίασε τις πλευρές τόσο των εγγεγραμμένων όσο και των περιγεγραμμένων πολυγώνων (όπως ο Αντιφών έκανε με τα εγγεγραμμένα πολύγωνα) και μετά υποστήριξε, ότι αν συνεχίσουμε αυτήν την διαδικασία αρκετά, θα έχουμε ένα περιγεγραμμένο και ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο με τόσο μικρή μεταξύ τους διαφορά που αν βρεθεί ένα πολύγωνο ανάμεσά τους, τότε ο κύκλος που είναι επίσης ανάμεσά τους θα ισούται με το πολύγωνο αυτό.*»

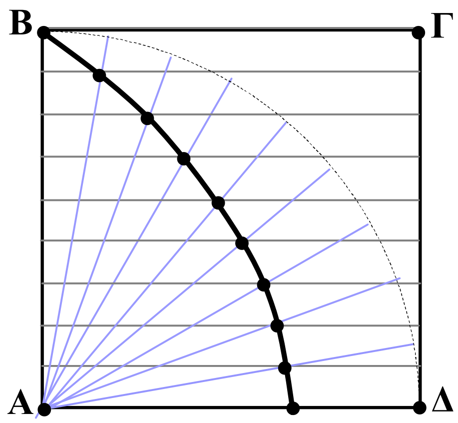
4.2.6 Ιππιας ο Ήλειος (περ. 460-370 π.Χ.)

Καμπυλη για την Τριχοτομηση της γωνιας που χρησιμοποιηθηκε και στον τετραγωνισμο του κυκλου

Ο Ιππίας, σοφιστής του 5ου αιώνα π.Χ., γεννήθηκε στην αρχαία πόλη Ήλιδα του νομού Ηλείας, και υπήρξε πολυπράγμων. Ταξίδεψε και δίδαξε επί αμοιβής, μεταξύ άλλων, μαθηματικά και αστρονομία στην Αθήνα και σε άλλες πόλεις.

Στον Ιππία τον Ήλειο αποδίδεται η ανακάλυψη μίας καμπύλης που χρησιμοποιήθηκε αρχικά για την τριχοτόμηση της γωνίας, ενός από τα τρία γνωστά και «άλυτα» προβλήματα για την γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων. Η καμπύλη αυτή, ωστόσο στην συνέχεια έγινε προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί και στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, δίνοντας μία ενδιαφέρουσα αλλά και αμφιλεγόμενη λύση, από όπου πήρε και το όνομα **τετραγωνίζουσα**.

Η κατασκευή της καμπύλης αυτής περιγράφεται από τον Πάππο, στο έργο του «Συναγωγή» του 340 μ.Χ., ως εξής:

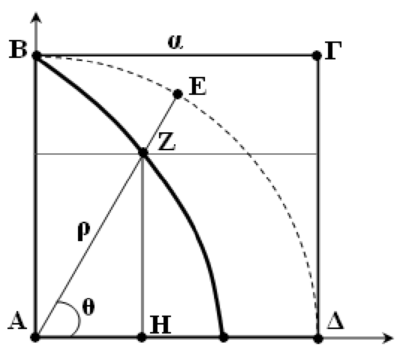


Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ (όπως στο σχήμα).
Αν θεωρήσουμε ότι **με ίση ταχύτητα**:

(i). η πλευρά ΑΒ περιστραφεί με κέντρο το Α μέχρι να συμπέσει με την πλευρά ΑΔ

(ii). η πλευρά ΒΓ κατέλθει προς την ΑΔ, παραμένοντας παράλληλη σ' αυτήν, μέχρι να συμπέσει μ' αυτήν.

Τότε τα σημεία τομής των δύο κινούμενων ευθυγράμμων τμημάτων ορίζουν τα σημεία της τετραγωνίζουσας καμπύλης.



Έστω Ε ένα σημείο του τεταρτοκυκλίου (ΑΕ =ΑΒ), Ζ το αντίστοιχο σημείο της τετραγωνίζουσας, όπως φαίνεται στο σχήμα, και Η η προβολή του Ζ στο ΑΔ.

Η βασική ιδιότητα της καμπύλης αυτής, που προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό της είναι ότι:

$$\frac{\mathbf{Z\hat{A}\Delta}}{\mathbf{B\hat{A}\Delta}}=\frac{\textbf{τόξο}(\mathbf{E\Delta})}{\textbf{τόξο}(\mathbf{BE\Delta})}=\frac{\mathbf{ZH}}{\mathbf{AB}} \quad (1)$$

Με σύγχρονους όρους οι εξισώσεις της τετραγωνίζουσας:

(α) σε πολικές συντεταγμένες:

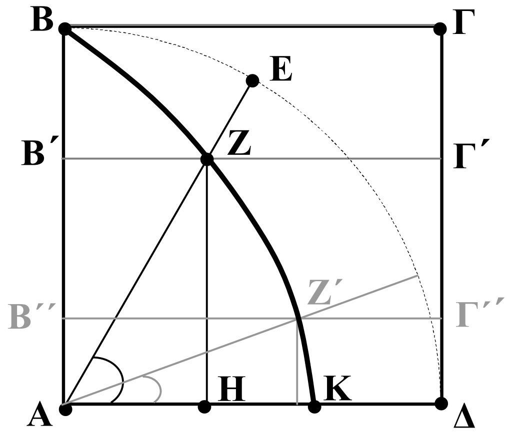
Με πόλο την κορυφή Α και οριζόντιο πολικό άξονα στην πλευρά ΑΔ, όπου ΑΔ= α

Ισχύει $\dfrac{\theta}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\rho\cdot\eta\mu\theta}{\alpha}$,δηλαδή: $\boxed{\rho=\dfrac{2\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{\theta}{\eta\mu\theta}}$

(β) σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

Ισχύει $\theta=\dfrac{\pi\cdot\rho\cdot\eta\mu\theta}{2\alpha}$ οπότε παίρνουμε $\theta=\dfrac{\pi x}{2\alpha}$. Όμως $\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\theta$ οπότε $\boxed{y=x\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2\alpha}}$

Αν η καμπύλη αυτή κατασκευαστεί είναι προφανές ότι η γωνία $Z\hat{A}\Delta$ μπορεί να διαιρεθεί σε οποιαδήποτε δοσμένη αναλογία, διαιρώντας αντίστοιχα το ευθύγραμμο τμήμα Β΄Α.
Μπορούμε δηλαδή να βρούμε παραδείγματος χάριν το 1/3 της γωνίας $Z\hat{A}\Delta$, βρίσκοντας το 1/3 του Β΄Α.



Στο σχήμα $\frac{B''A}{B'A} = \frac{1}{3}$ άρα από την ιδιότητα της καμπύλης: $\frac{\mathbf{Z\hat{A}\Delta}}{\mathbf{Z'\hat{A}\Delta}} = \frac{1}{3}$

Κατ' αυτόν τον τρόπο **είναι δυνατή η τριχοτόμηση κάθε δοσμένης γωνίας**.

Ο Πάππος αναφέρει ότι την καμπύλη αυτή χρησιμοποίησαν ο **Δεινόστρατος (390 – 320 π.Χ.)** και αργότερα ο **Νικομήδης (280 – 210 π.Χ.)** για τον τετραγωνισμό του κύκλου, και από την ιδιότητα της αυτή πήρε το όνομα τετραγωνίζουσα.

« Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις
ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων
νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔ-
νομα· καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα»

(Πάππου, Μαθηματικών Συναγωγών Βιβλία 4, 250, 33 – 252, 3)

Πιο σωστά θα λέγαμε ότι με την καμπύλη αυτή μπορεί να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα, το μήκος του οποίου, είναι ίσο με το μήκος δοσμένου κύκλου. Διαφορετικά **είναι δυνατή η κατασκευή του αναπτύγματος της περιφέρειας δοσμένου κύκλου.** Για την κατασκευή αυτή είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός του σημείου τομής της τετραγωνίζουσας με την πλευρά του τετραγώνου στην οποία καταλήγει. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο αυτό είναι το Κ.

Αποδείχθηκε ότι η πλευρά του τετραγώνου (ΑΒ) είναι γεωμετρικός μέσος του μήκους του τεταρτοκυκλίου (ΒΕΔ) και του μήκους (ΑΚ) που ορίζει η τετραγωνίζουσα στην πλευρά του τετραγώνου. Δηλαδή ότι ισχύει η σχέση:

$$\frac{\textbf{τόξο(ΒΕΔ)}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AK}} \quad (2)$$

Δεδομένης αυτής της σχέσης μπορεί να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα με μήκος αυτό του τόξου ΒΕΔ (τεταρτοκυκλίου) , άρα και ευθύγραμμο τμήμα στην συνέχεια, ίσο με το μήκος κύκλου ακτίνας ΑΒ.

Η απόδειξη της σχέσης (2) σώζεται από τον Πάππο, ενώ πιθανότατα αποδίδεται στον Δεινόστρατο, αδερφό του Μέναιχμου και μαθητή του Ευδόξου. Ο Heath[68] δε, δεν αποκλείει την περίπτωση η συνολική μελέτη της τεραγωνίζουσας να έγινε από τον εμπνευστή της Ιππία. Η μέθοδος που ακολουθεί η απόδειξη είναι η απαγωγή εις άτοπον κατά τον ακόλουθο τρόπο:

[68] Heath, A history of Greek mathematics, Τομ.1, σελ 225-6

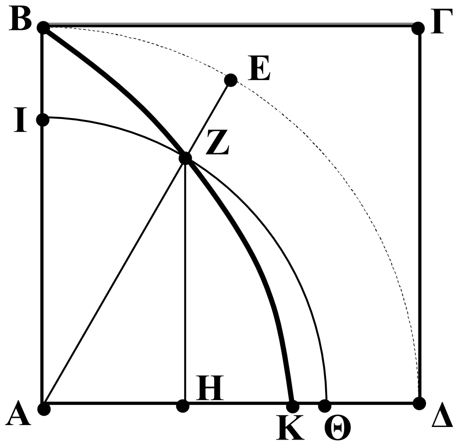
Έστω ότι ο λόγος $\frac{\textbf{τόξο(ΒΕΔ)}}{\textbf{ΑΒ}}$ δεν ισούται με $\frac{\textbf{ΑΒ}}{\textbf{ΑΚ}}$.

Τότε θα υπάρχει **ΑΘ** $\neq$ **ΑΚ** για το οποίο να ισχύει $\frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\textbf{ΑΒ}}{\textbf{ΑΘ}}$

Έστω ΑΘ >ΑΚ .
Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΘ φέρουμε το τεταρτοκύκλιο ΙΖΘ που τέμνει την τετραγωνίζουσα στο Ζ και την πλευρά ΑΒ στο Ι.
Φέρουμε το ΑΖ και η προέκτασή του τέμνει το δοσμένο τεταρτοκύκλιο ΒΕΔ στο σημείο Ε. Τέλος φέρουμε από το Ζ κάθετη στην πλευρά ΑΔ και Η το σημείο τομής τους.
Από την υπόθεση

$$\frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΘ}} = \frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{τόξο(ΙΖΘ)}}$$

Άρα ΑΒ = τόξο(ΙΖΘ)



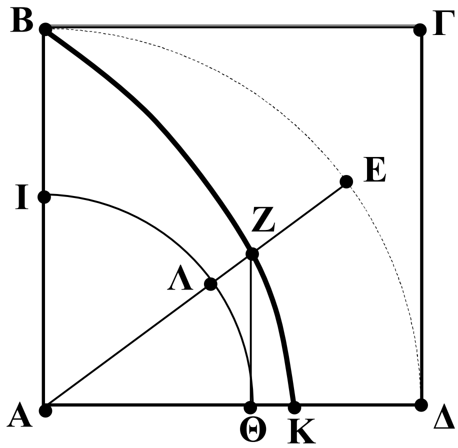
Από την ιδιότητα της τετραγωνίζουσας όμως ισχύει: $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΗ}} = \frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{τόξο(ΕΔ)}} = \frac{\text{τόξο(ΙΖΘ)}}{\text{τόξο(ΖΘ)}}$

Όμως δείξαμε ότι ΑΒ = τόξο(ΙΖΘ), άρα ισχύει ΖΗ = τόξο(ΖΘ) που είναι **ΑΤΟΠΟ**.

Έστω ΑΘ < ΑΚ
Από το Θ φέρουμε κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την τετραγωνίζουσα στο Ζ. Φέρουμε το ΑΖ και η προέκτασή του τέμνει το δοσμένο τεταρτοκύκλιο ΒΕΔ στο σημείο Ε.
Τέλος με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΘ φέρουμε το τεταρτοκύκλιο ΙΛΘ που τέμνει την ΑΖ στο Λ και την πλευρά ΑΒ στο Ι.
Από την υπόθεση

$$\frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΘ}} = \frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{τόξο(ΙΛΘ)}}$$

Άρα ΑΒ = τόξο(ΙΛΘ)



Από την ιδιότητα της τετραγωνίζουσας όμως ισχύει: $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΘ}} = \frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{τόξο(ΕΔ)}} = \frac{\text{τόξο(ΙΛΘ)}}{\text{τόξο(ΛΘ)}}$

Όμως ΑΒ = τόξο(ΙΛΘ), άρα ΖΘ = τόξο(ΛΘ) που είναι επίσης **ΑΤΟΠΟ.**

Συνεπώς **δεν υπάρχει ΑΘ** $\neq$ **ΑΚ** για το οποίο να ισχύει $\frac{\text{τόξο(ΒΕΔ)}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\textbf{ΑΒ}}{\textbf{ΑΘ}}$

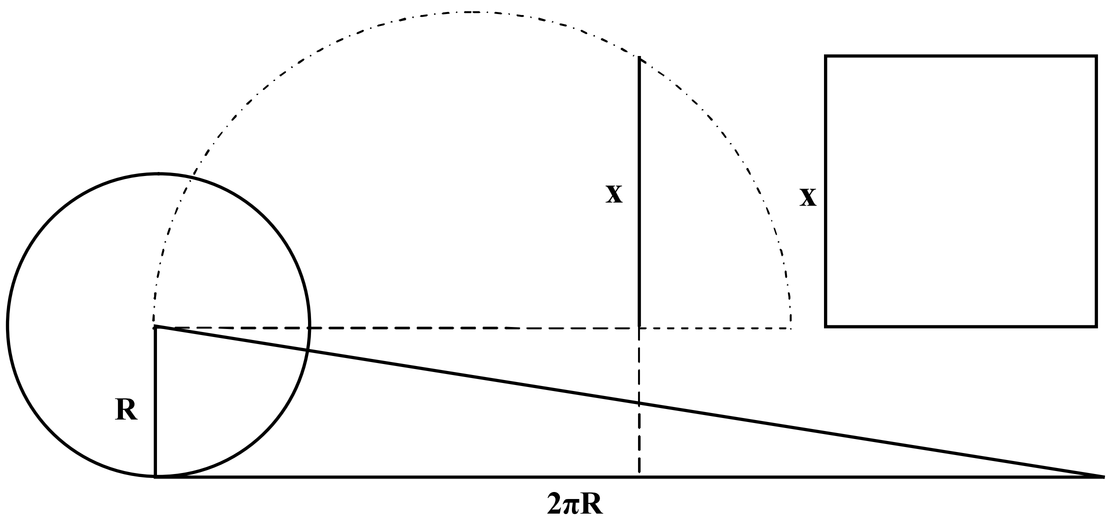
Οπότε ισχύει $\frac{\textbf{τόξο(ΒΕΔ)}}{\textbf{ΑΒ}} = \frac{\textbf{ΑΒ}}{\textbf{ΑΚ}}$

Αυτό σημαίνει όπως προείπαμε ότι **η πλευρά του τετραγώνου (ΑΒ) είναι γεωμετρικός μέσος του μήκους του τεταρτοκυκλίου (ΒΕΔ) και του μήκους (ΑΚ) που ορίζει η τετραγωνίζουσα στην πλευρά του τετραγώνου.**

Μέχρι εδώ λοιπόν είναι δυνατή η κατασκευή του μήκους (ΒΕΔ) άρα και του τετραπλάσιού του, που αποτελεί ολόκληρη την περιφέρεια του κύκλου. Αυτό όμως δεν αρκεί για την εύρεση του μήκους της πλευράς ενός τετραγώνου που θα είναι ισοεμβαδικό με τον δοσμένο κύκλο, δηλαδή για τον τετραγωνισμό του. Για να πραγματοποιηθεί αυτό είναι απαραίτητη η γνώση του εξής θεωρήματος:

«*Το εμβαδόν κάθε κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα του και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με την περιφέρειά του.*»

Με αυτό δεδομένο και αφού είναι εφικτή η κατασκευή της δεύτερης κάθετης πλευράς με τον προηγούμενο τρόπο, βρίσκεται ένα ισοεμβαδικό με τον κύκλο τρίγωνο του οποίου ο τετραγωνισμός είναι γνωστός.



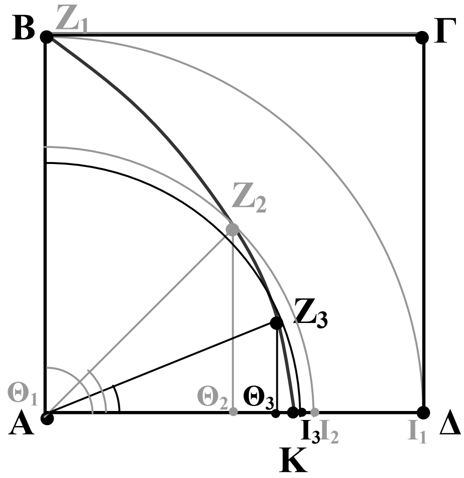
Το θεώρημα αυτό όπως είδαμε και σε προηγούμενα κεφάλαια ήταν γνωστό σε ανατολικούς πολιτισμούς αιώνες νωρίτερα, και είναι πολύ πιθανό να ήταν γνωστό και στους Έλληνες της περιόδου αυτής. Η απόδειξή του γίνεται με την μέθοδο της εξάντλησης και μπορεί να δόθηκε από τον Εύδοξο που είναι προγενέστερος του Δεινοστράτου. Κάτι τέτοιο δεν είναι γνωστό από τις υπάρχουσες πηγές, ενώ η πρώτη απόδειξη που σώζεται δόθηκε από τον Αρχιμήδη, στο έργο του «Κύκλου Μέτρησης» στο οποίο αποτελεί και την πρώτη πρόταση.

Παρόλα αυτά όπως έχουμε ήδη θίξει, η κατασκευή του αναπτύγματος του τεταρτοκυκλίου, άρα και ολόκληρης της περιφέρειας του κύκλου είναι εφικτή μόνο όταν έχει προσδιοριστεί το σημείο Κ και άρα έχουμε γνωστό το μήκος ΑΚ. Είναι όμως δυνατόν να προσδιορίσουμε το Κ με βάση τον ορισμό που δίνεται για την καμπύλη; Όπως παρατήρησε ο **Σπόρος** (240 – 300 μ.Χ.) στο έργο του **«Κηρία»** που αποτελούσε πηγή του Πάππου, μέσω του οποίου σώζεται και η αναφορά: αν θεωρήσουμε ότι το σημείο Κ είναι η κατάληξη της καμπύλης, τότε αυτό είναι το σημείο τομής των δύο κινούμενων ευθειών (ΑΒ που περιστρέφεται και ΒΓ που μεταφέρεται προς τα κάτω) στην τελική τους θέση, στην οποία αυτές όμως ταυτίζονται και δεν έχουν ένα κοινό σημείο τομής.

«ἔπειτα δὲ **τὸ πέρας αὐτῆς** ᾧ χρῶνται πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, τουτέστιν καθ' ὃ τέμνει σημεῖον τὴν ΑΔ εὐθεῖαν, **οὐχ εὑρίσκεται.** νοείσθω δὲ ἐπὶ τῆς προκειμένης τὰ λεγόμενα καταγραφῆς· ὁπόταν γὰρ **αἱ ΓΒ ΒΑ** φερόμεναι συναποκατασταθῶσιν, **ἐφαρμόσουσιν τῇ ΑΔ καὶ τομὴν οὐκέτι ποιήσουσιν ἐν ἀλλήλαις·** …»ὴ

(Πάππου, Μαθηματικών Συναγωγών Βιβλία 4, 254, 10-15)

Η παρατήρηση του Σπόρου δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι είναι εύστοχη. Συγκεκριμένα το Κ μπορεί να βρεθεί μόνο μέσω της μεθόδου της εξάντλησης, διαιρώντας την ορθή γωνία και παίρνοντας το μισό της και στην συνέχεια πάλι το μισό της και ούτω καθ' εξής, παίρνοντας κάθε φορά το σημείο τομής της γωνίας με την τετραγωνίζουσα ως Ζn και την προβολή του στην ΑΔ ως Θn. Μετά φέροντας κύκλο ακτίνας ΑΖn κάθε φορά βρίσκουμε το σημείο τομής του με την ΑΔ και το ονομάζουμε Ιn. Το σημείο Κ που αναζητούμε θα είναι πάντα μεταξύ των αντίστοιχων Θn και Ιn οπότε και μπορούμε να προσεγγίσουμε την θέση του όσο κοντά επιθυμούμε. Όπως σωστά παρατηρεί και ο Heath η διαδικασία αυτή είναι αντίστοιχη της προσέγγισης του π, δηλαδή για τον τετραγωνισμό θεωρείται δεδομένο αυτό που ζητείται να αποδειχθεί.

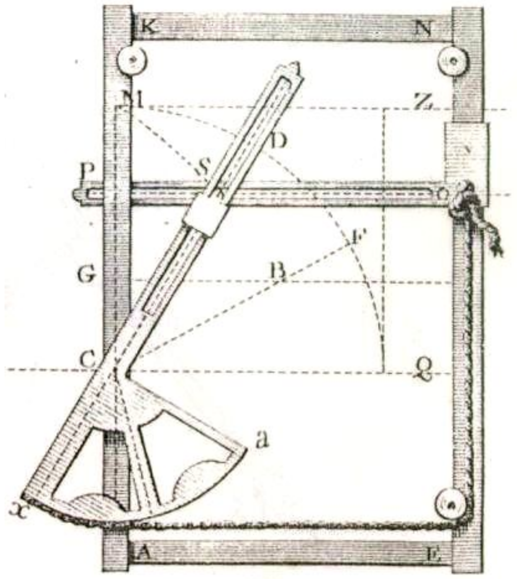



NUOVI ISTROMENTI
PER LA
DESCRIZIONE DI DIVERSE CURVE
ANTICHE E MODERNE
E di molte altre, che servir possono alla speculazione de' Geometri, ed all' uso de' Pratici.
COL PROGETTO
DI DUE NUOVE MACCHINE PER LA NAUTICA
ED UNA PER LA MECCANICA,
E con alcune Osservazioni sopra de' Poligoni rettilinei regolari
DEL CONTE GIAMBATISTA SUARDI
BRESCIANO.
IN BRESCIA. MDCCLII.
Dalle Stampe di Gian-Maria Rizzardi.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

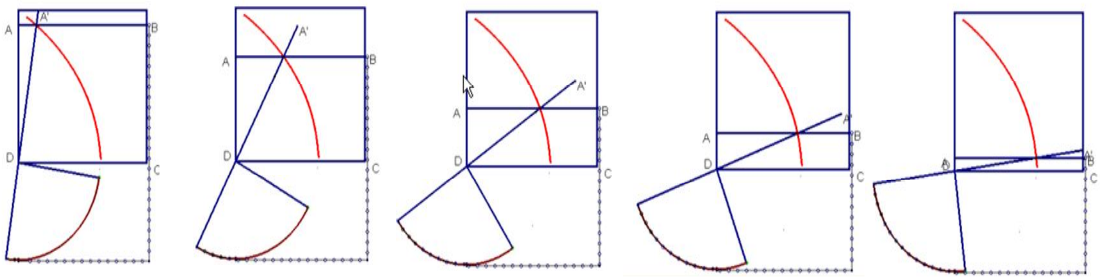
Μία άλλη ένσταση, επίσης του Σπόρου, αντίστοιχου περιεχομένου, υποστηρίζει ότι **η ίδια η κατασκευή της καμπύλης μηχανικά είναι αδύνατη αν δεν ληφθεί εξαρχής ως γνωστός ο λόγος της πλευράς του τετραγώνου προς την περιφέρεια του τεταρτοκυκλίου (ΒΕΔ)**, προκειμένου να πετύχουμε την ισοταχή κίνηση των δύο γραμμών που την ορίζουν με τα σημεία τομής τους. Για τον συγχρονισμό των δύο κινήσεων μηχανικά, έδωσε μία απάντηση ο Ιταλός μαθηματικός Giovan Battista Suardi, ο οποίος συνέγραψε το 1752 ένα ενδιαφέρον έργο που παρουσιάζει μία συλλογή σύγχρονων μαθηματικών μηχανικών οργάνων που περιγράφουν την κατασκευή αρχαίων και νεότερων καμπυλών, με τίτλο «Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne», στη οποία περιλαμβάνεται ένα όργανο που κατασκευάζει την τετραγωνίζουσα του Ιππία.

Δικαιολογώντας το γιατί συμπεριέλαβε το όργανο αυτό στο έργο του, ο Suardi, παρά την επιστημονική του ατέλεια, γράφει:

«A che risponderei, che si cerca nell'atto di costruire l'istromento, come nell'atto di fabbricare un **compasso di proporzione** si cercano le sue divisioni; ma **non** quando si vuole adoperarlo.... A dir vero però io era per questa opposizione in procinto di rigettare l'istromento, come non soddisfacente al Problema in modo perfetto.»



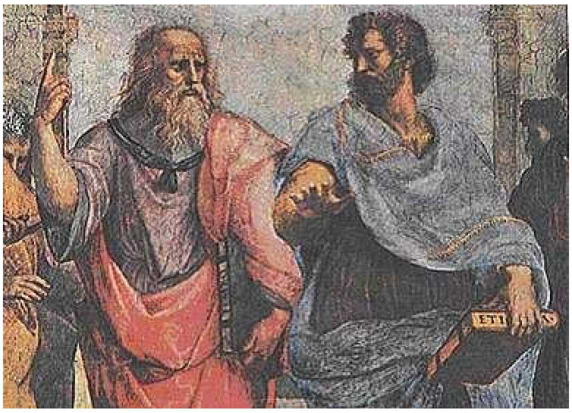
Αυτό που υποστηρίζει ο Suardi είναι ότι αν και προφανώς η ίδια η κατασκευή του οργάνου, όπως παρατηρεί ο Σπόρος, προϋποθέτει την ζητούμενη αναλογία, η χρήση του στην συνέχεια δεν την εμπλέκει και αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο. Με πιο απλά λόγια όπως ένας υπολογιστής έχει στον προγραμματισμό του συμπεριλάβει αποδεδειγμένες θεωρητικές γνώσεις προκειμένου να υπολογίσει ένα ολοκλήρωμα ή μία τετραγωνική ρίζα, αλλά παρόλα αυτά δίνει απάντηση σε ένα πρόβλημα, έτσι και το όργανο αυτό που κατασκευάζει μία τετραγωνίζουσα «λύνει» το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Αυτό βέβαια απαντάει και στο γιατί η λύση αυτή δεν ήταν αποδεκτή στο πλαίσιο και την εποχή στην οποία προτάθηκε.



4.3 $4^{ος}$ αιώνας π.Χ.

Οι σημαντικότεροι άντρες της εποχής αυτής είναι ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης. Αυτοί ξεκαθάρισαν τους στόχους και τις μεθόδους της επιστημονικής εργασίας. Δεν επηρέασαν μόνο την εποχή τους μέσω των σχολών που ίδρυσαν, αλλά συνέχισαν να αποτελούν σημείο αναφοράς για τους επόμενους αιώνες (κατά περιόδους ο ένας περισσότερο ή λιγότερο από τον άλλο).

Η Ακαδημία ιδρύθηκε από τον Πλάτωνα περίπου το 380 π.Χ. και ενθάρρυνε ιδιαίτερα την μελέτη των μαθηματικών. Σπουδαίοι μαθηματικοί της εποχής, όπως ο Θεαίτητος και ο Εύδοξος, εργάστηκαν στα πλαίσια της σχολής αυτής και μεγάλη εξέλιξη συντελέστηκε από την ίδρυσή της τόσο στην μαθηματική μέθοδο όσο και στη μαθηματική γνώση. Χαρακτηριστικές ωστόσο για την συστηματικότητά τους είναι οι εργασίες που έγιναν στο «Λύκειον» ή αλλιώς στην «Περιπατητική Σχολή» που ίδρυσε ο Αριστοτέλης περίπου το 350 π.Χ. στην Αθήνα. Ο Εύδημος, μαθητής αυτής της σχολής υπήρξε ο πρώτος ιστορικός των μαθηματικών, γράφοντας διαφορετικά βιβλία για την Γεωμετρία, την Αριθμητική και την Αστρονομία.



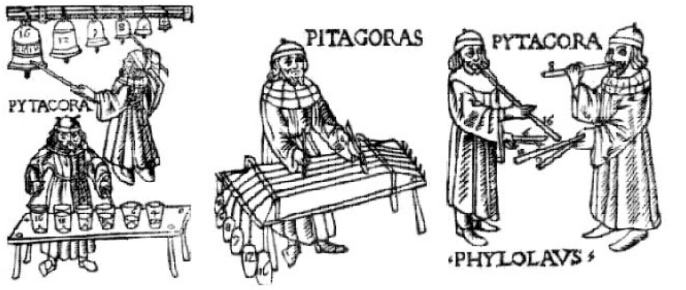
Την περίοδο αυτή επίσης τοποθετείται και η συγγραφή των Στοιχείων του Ευκλείδη, που όπως έχουμε αναφέρει, συνοψίζει ένα μεγάλο κομμάτι των γνώσεων που κατακτήθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες μέχρι τους Αλεξανδρινούς χρόνους και αποτελεί έργο ζωντανό μέχρι σήμερα.

Στο τέλος αυτής της περιόδου πολιτιστικό κέντρο γίνεται η Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, που ιδρύθηκε από τον Μ. Αλέξανδρο το 331 π.Χ. Εκεί δίδαξε και ο Ευκλείδης.

4.3.1 ΘΕΩΡΙΑ ΛΟΓΩΝ ΠΡΙΝ ΤΟΝ ΕΥΔΟΞΟ

Την εποχή που δραστηριοποιήθηκε ο Εύδοξος, είχε ήδη διαφανεί στο σύνολο των μαθηματικών η ανάγκη ενός νέου ορισμού για τον λόγο δύο μεγεθών**.** Η **θεωρία αριθμών**[69] των **Πυθαγορείων** με την μέθοδο της ανθυφαίρεσης ήταν σε θέση να προσδιορίσει επακριβώς την σχέση που συνδέει δύο (φυσικούς) αριθμούς. Απαραίτητη προϋπόθεση στο οικοδόμημα αυτό, που ήταν φτιαγμένο για να εξυπηρετεί και τις μετρήσεις στην γεωμετρία, είναι η ύπαρξη κοινού μέτρου (κοινής μονάδας μέτρησης) μεταξύ δύο μεγεθών προκειμένου το ένα να μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με το άλλο.

Η φιλοσοφία των πυθαγόρειων που έθετε τη θεωρία των αριθμών ως βάση για την περιγραφή όλων των μεγεθών (και συγκεκριμένα τους λόγους που αυτά σχηματίζουν) κατέρρευσε όταν αποδείχθηκε, από τους ίδιους, ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν έχουν κανένα κοινό μέτρο. Γεωμετρικές σχέσεις ιδιαίτερης αξίας φάνηκε ότι δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν ως λόγος δύο φυσικών αριθμών, όπως για παράδειγμα ο λόγος της διαγωνίου ενός τετραγώνου προς την πλευρά του, (από τα πρώτα που απεδείχθησαν) και ο λόγος της περιφέρειες ενός



[69] Όταν λέμε αριθμός, πρέπει να διευκρινιστεί ότι από τους Πυθαγόρειους ως τον ... αι. αναφερόμαστε σε φυσικό αριθμό. Ο Πυθαγόρειος ορισμός του αριθμού εξάλλου σώζεται στο VII βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη: «Αριθμός είναι ότι αποτελείται από μονάδες» ή αλλιώς ένας αριθμός είναι πλήθος μονάδων.

κύκλου προς την διάμετρό του (που αν και φαίνεται ότι ήταν γνωστό δεν αποδείχθηκε, παρά αιώνες αργότερα).

Στα τέλη του 5^{ο} αιώνα π.Χ. η συνειδητοποίηση αυτή τεκμηριώθηκε με την απόδειξη της ασυμμετρίας και άλλων μεγεθών, καθώς φαίνεται όμως, χωρίς την ύπαρξη μίας γενικής μεθόδου. Από αναφορά του ίδιου του Πλάτωνα[70] μαθαίνουμε ότι ο μαθηματικός Θεόδωρος ο Κυρηναίος απέδειξε την ασυμμετρία των τετραγωνικών ριζών του 3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15 και 17 στο οποίο και σταμάτησε. Επίσης ο Διογένης ο Λαέρτιος αναφέρει[71] ότι ο Δημόκριτος έγραψε μία πραγματεία με τίτλο «Περί αλόγων γραμμών και ναστών», για την οποία δεν γνωρίζουμε τίποτα άλλο, εκτός από το ότι επρόκειτο για δύο βιβλία.

Ρωμαϊκό ψηφιδωτό που απεικονίζει την Ακαδημία του Πλάτωνα

Το επόμενο βήμα ήταν η ανάπτυξη της θεωρίας ασύμμετρων μεγεθών που ανακαλύφθηκε στις αρχές του 4^{ου} αιώνα από τον **Θεαίτητο**, μαθητή του Θεόδωρου του Κυρηναίου και σύγχρονο του Εύδοξου. Από τον ομώνυμο διάλογο του Πλάτωνα μαθαίνουμε ότι συμπλήρωσε τις ανακαλύψεις του δασκάλου του, ενώ θεωρείται ότι ανέπτυξε μία νέα θεωρία λόγων για μεγέθη, βασισμένη στην ανθυφαιρετική διαδικασία, σε αντιστοιχία με την θεωρία αριθμών. Προτάσεις που αποδίδονται στον μαθηματικό αυτό είναι οι περισσότερες προτάσεις του βιβλίου Χ των Στοιχείων, χωρίς όμως να σώζονται οι αποδείξεις του, αφού ο Ευκλείδης τις παρουσιάζει με την μεταγενέστερη «Θεωρία Αναλογιών» του Ευδόξου.

70

71 Διογένης Λαέρτιος ΙΧ. 47, 239

4.3.2 ΕΥΔΟΞΟΣ Ο ΚΝΙΔΙΟΣ (408- 355 π.Χ)

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ - ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Ο Εύδοξος, γιός του Αισχίνη, γεννήθηκε στην Κνίδο της Μικράς Ασίας στα τέλη του 5^{ου} αιώνα π.Χ. και υπήρξε καινοτόμος επιστήμονας. Γνωρίζουμε ότι σπούδασε Ιατρική, μαθηματικά και αστρονομία, ταξιδεύοντας στην Αθήνα, τον Τάραντα της Ιταλίας και την Αίγυπτο, ότι ίδρυσε και διεύθυνε σχολή στην πόλη Κύζικο και ότι με ομάδα μαθητών του ταξίδεψε για δεύτερη φορά στην Αθήνα, στην Ακαδημία του Πλάτωνα όπου και εργάστηκε, παίζοντας σπουδαίο ρόλο.

Οι εργασίες του στα μαθηματικά, καμία από τις οποίες δεν σώζεται, επιβίωσαν κυρίως μέσα από τα Στοιχεία του Ευκλείδη και η σπουδαία συμβολή του σημειώνεται από αναφορές σ' αυτόν, από μεταγενέστερους επιστήμονες, όπως τον Αρχιμήδη, σχολιαστές και ιστορικούς. Οι ανακαλύψεις του και η σημαντική του συμβολή στην ανάπτυξη μίας νέας θεωρίας λόγων, έδωσαν νέα ώθηση στην μελέτη της γεωμετρίας και κατέστησαν δυνατή την επίλυση προβλημάτων που αφορούν την στερεομετρία και την μέτρηση του κύκλου.

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΔΟΞΟΥ

Όπως προείπαμε, οι (φυσικοί) αριθμοί δεν είναι ικανοί από μόνοι τους να περιγράψουν τις σχέσεις που συνδέουν όλα τα μεγέθη. Για τον λόγο αυτό κρίθηκε αναγκαία η θεμελίωση μίας νέας θεωρίας που θα επιτρέπει την χρήση του λόγου δύο μεγεθών ανεξάρτητα από τους αριθμούς. Η νέα αυτή θεωρία τελειοποιήθηκε στην «θεωρία αναλογιών» όπως παρουσιάζεται στο V βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη και αποδίδεται με ομόφωνη παραδοχή των μελετητών στον Εύδοξο τον Κνίδιο. Από το σημείο αυτό και μέχρι τον 17^{ο} αιώνα, όλα τα αποτελέσματα που σχετίζονται με μεγέθη εκφράζονται με όρους αυτής της «θεωρίας αναλογιών».

Κάθε κλάση ομοειδών μεγεθών από το σημείο αυτό και έπειτα, είναι ξεκάθαρα ορισμένη, αφού είναι γνωστό το πως θα γίνονται συγκρίσεις μεταξύ των μεγεθών που ανήκουν στην ίδια κλάση (δηλαδή ποιά είναι η διάταξή τους) και το πώς αυτά προστίθενται μεταξύ τους. Οπότε κατ' αντιστοιχία ορίζονται πλήρως οι σχέσεις μεταξύ των γραμμών, των εμβαδών και συμβαίνει το ίδιο και με τις γραμμές των όγκων.

Όσο αφορά τις επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, άθροισμα θεωρείται η σύνθεσή τους ενώ σύγκριση μεταξύ δύο εμβαδών, θα μπορούσαμε να πούμε, με εξαιρετικά συνοπτικό τρόπο ότι γίνεται με τον διαχωρισμό τους σε σχήματα που τα αποτελούν και στην συνέχεια με σύγκριση των χωρίων που περιέχουν τα απλούστερα αυτά σχήματα. Λίγο πιο συγκεκριμένα θα λέγαμε ότι αν δύο εμβαδά δεν συμπίπτουν και δεν ικανοποιούν τις συνθήκες ομοιότητας (έχουν θα λέγαμε απλούστερα διαφορετικό σχήμα), τότε η ισότητα τους αποδεικνύεται. είτε δείχνοντας ότι είναι ισοδιαχωρίσιμα είτε δείχνοντας ότι δεν είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο το ένα από το άλλο. Στην τελευταία περίπτωση που απαιτεί και την πιο σύνθετη απόδειξη υπεισέρχεται η «μέθοδος της εξάντλησης», που γνωρίζουμε ότι πρώτος χρησιμοποίησε ο Εύδοξος.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ

Όπως είπαμε προηγουμένως, για να αποδειχτεί στα Στοιχεία του Ευκλείδη, αλλά και για αιώνες αργότερα, ότι δύο ανόμοια σχήματα Α και Β είναι ίσα στην περίπτωση που δεν είναι ισοδιαχωρίσιμα, αρκεί να δείξουμε ότι δεν ισχύει ούτε Α<Β ούτε Α>Β. Για να το πετύχει κάποιος αυτό, πρέπει αρχικά να υποθέσει το αντίθετο και να καταλήξει σε άτοπο. Να υποθέσει δηλαδή ότι, για παράδειγμα, ισχύει Α<Β και να καταλήξει σε άτοπο κατασκευάζοντας ένα τρίτο ενδιάμεσο σχήμα Χ μεταξύ των Α και Β, για το οποίο θα δείξει στην συνέχεια ότι είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερο και μικρότερο από το Β. Να κατασκευάσει δηλαδή ένα Χ τέτοιο ώστε Α<Χ<Β για το οποίο θα δείξει ότι ισχύει επίσης Χ>Β. Στη συνέχεια να υποθέσει ότι Α>Β και με την ανάλογη διαδικασία να καταλήξει επίσης σε άτοπο, οπότε και θα έχει δείξει ότι Α=Β.

Η «μέθοδος της εξάντλησης» που αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της θεωρίας αναλογιών του Ευδόξου, είναι η μέθοδος που καθιστά δυνατή την κατασκευή του τρίτου ενδιάμεσου σχήματος Χ που προαναφέραμε και στηρίζεται στην εξής πρόταση:

«Έστω δύο άνισα μεγέθη.
Αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του
και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί ξανά μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του
και η διαδικασία αυτή επαναληφθεί συνέχεια,
θα απομείνει μέγεθος μικρότερο
του μικρότερου από τα δύο δοσμένα αρχικά μεγέθη.»

(**Πρόταση Χ.1, Στοιχεία Ευκλείδους**)

Στην συνέχεια θα δούμε πώς ακριβώς η πρόταση αυτή χρησιμοποιείται προκειμένου να αποδειχθούν δύο βασικότατες προτάσεις που αφορούν τον κύκλο. Η μία βρίσκεται στο XII βιβλίο των Στοιχείων και αφορά την αναλογία των κύκλων με τα τετράγωνα των διαμέτρων τους και η άλλη βρίσκεται στην πραγματεία του Αρχιμήδη «Κύκλου μέτρησις» λέγοντας ότι κάθε κύκλος είναι ίσος με ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες του οποίου είναι ίσες με την ακτίνα και την περιφέρειά του κύκλου αντίστοιχα.

Αυτό που έχει σημασία να σημειώσουμε για την «μέθοδο της εξάντλησης» είναι ότι συνδυάζεται, όπως αναφέραμε με την «μέθοδο απαγωγής εις άτοπον» και χρησιμοποιείται για να αποδειχθούν προτάσεις που λένε ότι ισχύει μία συγκεκριμένη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών (όπως στην πρόταση του Αρχιμήδη που αποδεικνύει μία ισότητα) ή ότι δύο μεγέθη σχετίζονται μεταξύ τους όπως ακριβώς σχετίζονται δύο άλλα μεταξύ τους (όπως στην πρόταση των Στοιχείων που αποδεικνύεται μία αναλογία). Δίνεται αρχικά δηλαδή μία σχέση, χωρίς να γνωρίζουμε πως προέκυψε και στην συνέχεια, με την μέθοδο αυτή, αποδεικνύεται με αυστηρό τρόπο η ισχύ της.

Όσο αφορά το εμβαδό του κύκλου που πραγματεύονται οι δύο προτάσεις που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια, και στις δύο, η μέθοδος εξάντλησης χρησιμοποιείται προκειμένου να δειχθεί ότι είναι δυνατή η κατασκευή δύο κατάλληλων πολυγώνων όσο θέλουμε κοντά στον κύκλο (ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο) που θα βοηθήσουν στη σύγκρισή του με ένα άλλο ευθύγραμμο σχήμα, αφού οι σχέσεις μεταξύ ευθυγράμμων σχημάτων είναι ήδη γνωστές.

Στην μεν πρόταση XII.2 των Στοιχείων κατασκευάζεται το κατάλληλο περιγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο και δεν κατασκευάζεται εγγεγραμμένο, διότι το δεύτερο μέρος της απόδειξης ανάγεται στο πρώτο, στην δε απόδειξη της «Κύκλου μέτρησις» του Αρχιμήδη, κατασκευάζονται και τα δύο πολύγωνα αλλά αποδεικνύεται αναλυτικά η δυνατότητα κατασκευής μόνο του κατάλληλου εγγεγραμμένου πολυγώνου αφού το άλλο έχει ήδη αποδειχθεί στην πρόταση XII.2.

Συγκεκριμένα στην πρόταση XII.2 των Στοιχείων αποδεικνύεται η δυνατότητα κατασκευής ενός εγγεγραμμένου πολυγώνου Χ στον κύκλο C, αρκετά μεγάλου έτσι ώστε να υπερέχει από μία συγκεκριμένη ποσότητα Σ μικρότερη του κύκλου (ότι υπάρχει Χ τέτοιο ώστε να ισχύει Σ<Χ<C)[72]. Αυτό πραγματοποιείται αν δειχθεί ότι είναι δυνατή η κατασκευή ενός εγγεγραμμένου πολυγώνου Χ στον κύκλο C με τον οποίο να διαφέρει λιγότερο από ότι διαφέρει ο κύκλος από την ποσότητα Σ (Αφού ισχύει Χ<C και Π<C, αρκεί να δείξουμε ότι C-Χ<C-Σ). Αυτό που μας λέει όμως η πρόταση Χ.1 (παίρνοντας ως άνισα μεγέθη τα C και C–Σ), είναι ότι αφαιρώντας από τον κύκλο κάτι μεγαλύτερο από το μισό του και απ' αυτό που έμεινε κάτι μεγαλύτερο από το μισό κ.ο.κ θα μείνει μία ποσότητα μικρότερη από την διαφορά του κύκλου από την ποσότητα Σ.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της πρότασης Χ.1, δηλαδή ότι:

- Ένα εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράγωνο, αφαιρεί από αυτόν, χωρίο μεγαλύτερο από το μισό του.
- Κάθε επόμενο πολύγωνο διπλάσιων πλευρών αφαιρεί από τον κύκλο εμβαδό μεγαλύτερο από το μισό του χωρίου που απέμεινε όταν αφαιρέθηκε το προηγούμενο πολύγωνο από τον κύκλο.

Τότε όπως ήδη είπαμε θα έχουμε δείξει ότι υπάρχει πολύγωνο Χ μεγαλύτερο από κάθε μία ποσότητα Σ μικρότερη του κύκλου (Σ<Χ<C).

Η αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται για να αποδειχθεί ότι υπάρχει πολύγωνο Χ μικρότερο από κάθε μία ποσότητα Ε μεγαλύτερη του κύκλου (C<Χ<Ε).
Αφού ισχύει C<Χ και C<Ε, αρκεί να δείξουμε ότι Χ-C<Ε-C.

Αρκεί πάλι να δείξουμε ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της πρότασης Χ.1
(παίρνοντας ως άνισα μεγέθη το περιγεγραμμένο τετράγωνο στον κύκλο και το Ε-C)

Και οι δύο παρουσιάζονται εδώ, στις παραγράφους 4.4 και 4.5 αντίστοιχα πριν τις αποδείξεις στις οποίες περιέχονται (4.6.3 και 5.2 αντίστοιχα), προκειμένου να γίνει αντιληπτή η άμεση σχέση τους και αλληλοσυμπλήρωσή τους.

[72] Κατά αυτόν τον τρόπο αν δειχθεί στην συνέχεια ότι το πολύγωνο αυτό είναι και μικρότερο από την ποσότητα (ότι Π>Χ) θα καταλήξουμε σε άτοπο.

4.4 «ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ» ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ ΜΕ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥΣ «ΣΤΟΙΧΕΙΑ», απόσπασμα ΠΡΟΤΑΣΗΣ XII2

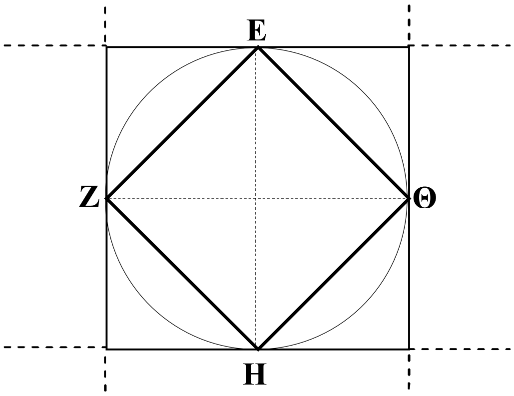
ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ.

Έστω ποσότητα Σ μικρότερη από τον κύκλο.

καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου,

Ας εγγραφεί στον κύκλο ΕΖΗΘ τετράγωνο ΕΖΗΘ. Τότε το εγγεγραμμένο τετράγωνο είναι μεγαλύτερο του μισού του κύκλου.

(*Η απόδειξη αυτού ακολουθεί.*)



ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον,

Επειδή αν αχθούν εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ,
το τετράγωνο ΕΖΗΘ θα είναι το μισό του περιγεγραμμένου τετραγώνου

Αυτό θα μπορούσαμε να το δείξουμε λέγοντας ότι όπως φαίνεται από τον διαχωρισμό του σχήματος σε τρίγωνα ίσα με το τρίγωνο ΕΟΘ, το περιγεγραμμένο τετράγωνο αποτελείται από 8 τέτοια ίσα τρίγωνα ενώ το ΕΖΗΘ από 4.

τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος·

Ο δε κύκλος είναι μικρότερος του περιγεγραμμένου τετραγώνου,

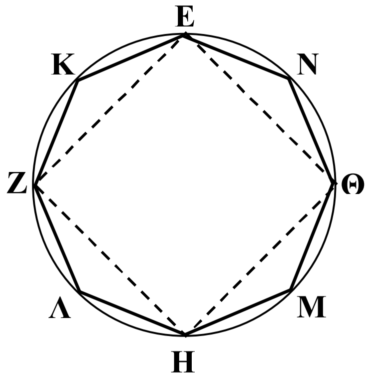
οπότε και μικρότερος από το διπλάσιο του ΕΖΗΘ

ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

οπότε το ΕΖΗΘ είναι μεγαλύτερο του μισού του κύκλου

τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ·

Ας διχοτομηθούν τα τόξα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ και ΘΕ στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν και ας αχθούν τα ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ και ΝΕ.

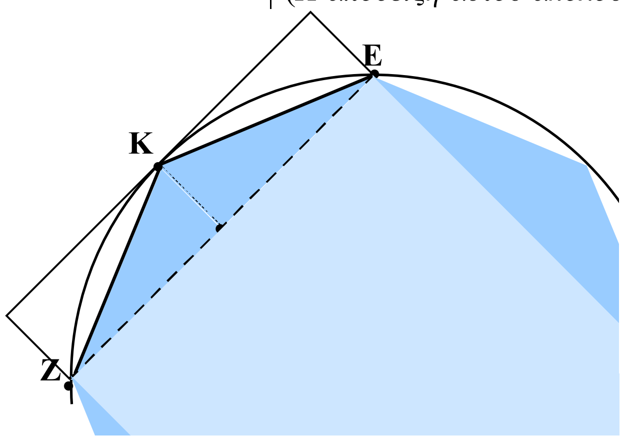


Πρόκειται για την περιγραφή της γνωστής κατασκευής εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου διπλασίων πλευρών.

Στην περίπτωση αυτή της κατασκευής εγγεγραμμένου κανονικού οκταγώνου ΕΚΖΛΗΜΘΝ

καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου

Τότε καθένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ και ΘΝΕ, είναι μεγαλύτερο από το μισό των αντίστοιχου κυκλικών τμημάτων (ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ και ΘΝΕ) του κύκλου. (*Η απόδειξη αυτού ακολουθεί.*)



ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα

Επειδή αν φέρουμε εφαπτόμενες στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν (στο σχήμα φαίνεται το τεταρτοκύκλιο και η εφαπτόμενη στο σημείο Κ) **και σχηματίσουμε τα παραλληλόγραμμα στα ευθύγραμμα τμήματα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ και ΘΕ** (στο σχήμα φαίνεται μόνο το παραλληλόγραμμο επί της ΖΕ)

ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου

τότε καθένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ και ΘΝΕ είναι το μισό του αντίστοιχου παραλληλογράμμου.

Αυτό θα μπορούσαμε να το δείξουμε λέγοντας ότι όπως φαίνεται από τον διαχωρισμό του σχήματος σε τρίγωνα ίσα με το τρίγωνο ΕΚΠ, το παραλληλόγραμμο αποτελείται από 4 τέτοια ίσα τρίγωνα ενώ το τρίγωνο ΕΚΖ από 2.

ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου·

Το δε κυκλικό τμήμα είναι μικρότερος του παραλληλογράμμου,

οπότε και μικρότερο από το διπλάσιο του ΕΚΖ

Δηλαδή το ΕΚΖ είναι μεγαλύτερο από το μισό του αντίστοιχου κυκλικού τμήματος.

ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ,

Και άρα το καθένα από τα τρίγωνα ΕΚΖ,

ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου.

ΖΛΗ, ΗΜΘ και ΘΝΕ, είναι μεγαλύτερο από το μισό των αντίστοιχου κυκλικών τμημάτων του κύκλου.

τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου.

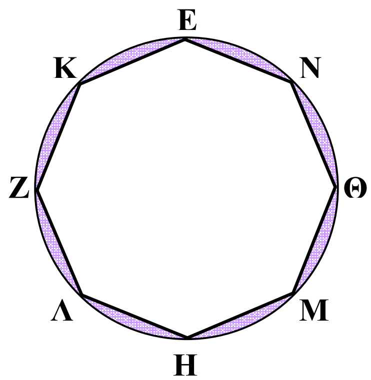
Εγγράφοντας δε κανονικό πολύγωνο με διπλάσιες το πλήθος πλευρές στον κύκλο, και κάνοντάς το αυτό συνεχώς, θα αφήσουμε τμήματα που συνολικά θα αποτελούν χωρίο μικρότερο της υπεροχής του κύκλου ΕΖΗΘ από το χωρίο Σ.

ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους

Αφού έχει αποδειχθεί στο πρώτο θεώρημα του δέκατου βιβλίου, ότι δεδομένων δύο άνισων μεγεθών, αν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί τμήμα μεγαλύτερο του μισού και από αυτό που υπολείπεται αφαιρεθεί μεγαλύτερο από το μισό του και αυτό γίνεται συνεχώς, λαμβάνεται μέγεθος μικρότερο του μικρότερου από τα δύο δοσμένα.

λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ περέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου.

Ας υποθέσουμε ότι τα κυκλικά τμήματα επί των ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ και ΝΕ (που φαίνονται χρωματισμένα στο επόμενο τμήμα) **είναι μικρότερα από την υπεροχή του κύκλου από το χωρίο Σ.**



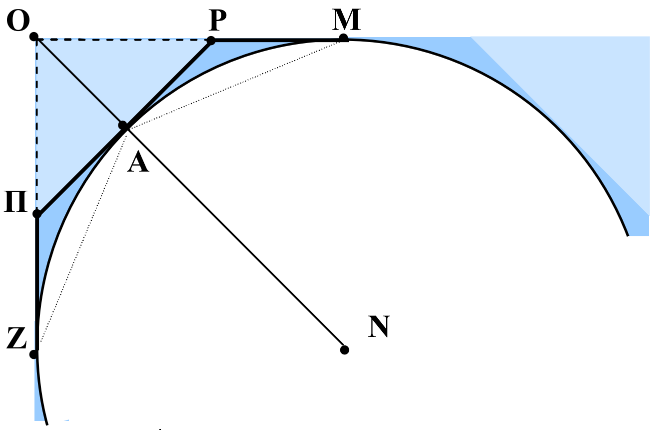
λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου.

Τότε το ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνο είναι μεγαλύτερο από το χωρίο Σ.

4.5 «ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ» ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ ΜΕ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ.

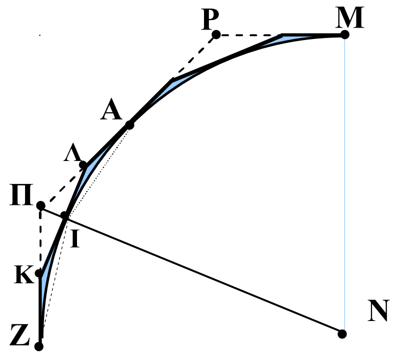
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ «ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ» απόσπασμα ΠΡΟΤΑΣΗΣ Ι

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε,	**Έστω η ποσότητα Ε μεγαλύτερη από τον κύκλο**
καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα,	**Ας περιγραφεί στον κύκλο τετράγωνο και ας διχοτομηθούν τα τόξα** (*Όπως φαίνεται με το τόξο ΖΜ στο σχήμα που ακολουθεί, όπου Α το μέσο του και ΟΖ, ΟΜ μισές πλευρές του περιγεγραμμένου τετραγώνου σε κύκλο με κέντρο Ν και ακτίνα ΝΖ=ΝΑ=ΝΜ*)



καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων·	**Και ας αχθούν εφαπτόμενες στα σημεία** (*τα μέσα*) (*Η εφαπτόμενη του κύκλου στο μέσο Α, τέμνει τις ΟΖ και ΟΜ στα σημεία Π και Ρ αντίστοιχα.*)
ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ.	**άρα η γωνία ΟΑΡ είναι ορθή.** (*και οπότε η ΟΡ είναι υποτείνουσα του τριγώνου ΟΑΡ και ισχύει ΟΡ> ΑΡ.*)
Ἡ ΟΡ ἄρα τῆς ΜΡ ἐστὶν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση ἐστί·	**Οπότε, αφού ΡΜ = ΡΑ** (*ως μισές πλευρές κανονικού πολυγώνου και στην προκειμένη περίπτωση κανονικού οκταγώνου*) **η ΟΡ είναι μεγαλύτερη από την ΜΡ** (*Συνεπώς για τα τρίγωνα ΟΑΡ και ΑΡΜ αφού έχουν ίδιο ύψος και βάσεις αντίστοιχα ΟΡ>ΡΜ ισχύει ότι ΟΑΡ>ΑΡΜ. Άρα το τρίγωνο ΡΟΠ είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τριγώνων ΑΡΜ και ΖΠΑ, άρα*)
καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήματος	**και το τρίγωνο ΡΟΠ είναι μεγαλύτερο από το μισό του σχήματος ΟΖΑΜ** (*του ευθυγράμμου* άρα και του

μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.	αντίστοιχου μεικτόγραμμου που φαίνεται γαλάζιο στο σχήμα.)
Λελείφθωσαν οἱ τῷ ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου·	**Ας ληφθούν τα όμοια με τα μεικτόγραμμα σχήματα ΠΖΑ** (*όπως τα ΖΗΙ και ΙΛΑ που σημειώνονται με γαλάζιο χρώμα στο επόμενο σχήμα*) **τα οποία** (*όλα μαζί αθροισμένα*) **έχουν εμβαδό μικρότερο της υπεροχής του Ε από τον κύκλο.** *Ο Αρχιμήδης λέγοντας «ας ληφθούν τα όμοια των ΠΖΑ» που συνολικά έχουν εμβαδό μικρότερο της διαφοράς του κύκλου από το Ε, εννοεί ότι από τα προηγούμενα προκύπτει η ύπαρξη τέτοιων αρκετά μικρών χωρίων.*



ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστὶν ἔλασσον	**Τότε θα έχουμε ένα ευθύγραμμο** (*ένα περιγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο*) **μικρότερο από το Ε.**

ΑΞΙΩΜΑ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ – ΕΥΔΟΞΟΥ

Όλες οι προτάσεις που περιέχονται στο XII βιβλίο των Στοιχείων και χρησιμοποιούν την «μέθοδο της εξάντλησης»[73] αποδεικνύονται βάσει της πρότασης X.1 που αναφέραμε προηγουμένως. Ωστόσο ο Αρχιμήδης , που επίσης χρησιμοποιεί την X.1 στις δικές του αποδείξεις για την μέθοδο αυτή, σημειώνει[74], ότι οι παλαιότεροι γεωμέτρες στις αντίστοιχες αποδείξεις τους χρησιμοποίησαν ένα άλλο λήμμα:

«Η διαφορά ενός μεγαλύτερου από δύο άνισα χωρία, από το μικρότερο,
μπορεί αν προστεθεί συνεχώς στον εαυτό της να γίνει τέτοια
ώστε να υπερέχει από καθένα από τα δύο δοσμένα χωρία που συγκρίνονται»

(«Αξίωμα Αρχιμήδους», Τετραγωνισμός Παραβολής)

Να σημειώσουμε ότι το εν λόγω αξίωμα είναι παράφραση του ορισμού του λόγου δύο μεγεθών που βρίσκουμε στο V βιβλίο των Στοιχείων:

[73] Πρόκειται για τις προτάσεις XII 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12 και τις 16, 17, 18 με μία μικρή διαφοροποίηση της μεθόδου.
[74] Αρχιμήδους «Τετραγωνισμός παραβολής» εισαγωγικό σημείωμα.

«Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ
δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.»

*«Δύο μεγέθη λέμε ότι έχουν λόγο μεταξύ τους όταν
πολλαπλασιάζοντάς τα κατάλληλα μπορούμε να πετύχουμε
ώστε το ένα να υπερβαίνει το άλλο.»*

(**Ορισμός V.4, Στοιχεία Ευκλείδους**)

Και όπως σημειώνει ο Heath, όταν ο Ευκλείδης αποδεικνύει την πρόταση X.1 βασίζεται στον ορισμό αυτόν, οπότε και το λήμμα που αναφέρεται ως «Αξίωμα του Αρχιμήδη», είναι προϋπόθεση για την πρόταση X.1 που χρησιμοποιείται στην «μέθοδο της εξάντλησης». Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εν λόγω μέθοδος είναι άμεση απόρροια του ορισμού του λόγου δύο μεγεθών

Η ονομασία ωστόσο «Αξίωμα Αρχιμήδους» είναι παραπλανητική, αφού όταν την διατυπώνει αναφέρεται σε προγενέστερους του Ευκλείδη γεωμέτρες, ενώ σήμερα χρησιμοποιείται για να εκφράσει τον ορισμό V.4, δηλαδή ότι:

Αν Α, Β μεγέθη με $A< B$,
τότε υπάρχει n φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $nA>B$.

Η σημασία του «αξιώματος» αυτού σχετικά με την έννοια της συνέχειας, αναδείχθηκε όταν ο O. Stolz το απέδειξε μέσω των τομών Dedekind. Η πιθανότητα ύπαρξης συστημάτων αριθμών ή μεγεθών που να μην ικανοποιούν το εν λόγω αξίωμα, μελετήθηκε από τον Veronese και άλλους μαθηματικούς, που θεώρησαν μη-Αρχιμήδεια συστήματα (non-Archimedean systems).

4.6 ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ (~325-265 π.Χ.)

Δεν γνωρίζουμε πολλά για την ζωή του Ευκλείδη, αλλά αυτό που σώζεται από αυτόν ήταν αρκετό για να τον εντάξει μεταξύ των σημαντικότερων ανδρών στην ιστορία των μαθηματικών. Υποστηρίζεται ότι υπήρξε μαθητής του Πλάτωνα και ότι έζησε στην εποχή του Πτολεμαίου του Α΄, ωστόσο δεν είναι τίποτα με ασφάλεια γνωστό, πέρα από το γεγονός ότι δίδαξε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου.

Έχουμε ήδη αναφερθεί αρκετές φορές στα Στοιχεία του Ευκλείδη αποδεικνύοντας ότι μέχρι και σήμερα το έργο αυτό αποτελεί σημείο αναφοράς τόσο για την γεωμετρία όσο για την θεωρία αριθμών και την θεωρία αναλογιών που περιλαμβάνει. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε εκείνα τα σημεία από το έργο που παρουσιάζουν ενδιαφέρον σε σχέση με τον κύκλο, την μέτρησή του και τον τετραγωνισμό.

4.6.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Εδώ παραθέτουμε κάποια από τα πλέον βασικά στοιχεία που δίνονται για τον κύκλο στο έργο του Ευκλείδη, καθώς και κάποιους μεταγενέστερους σχολισμούς σε αυτά. Αναφερόμαστε φυσικά στο πρώτο από τα 13 βιβλία, όπου και γίνεται η αξιωματική **θεμελίωση: Όροι** (= ορισμοί), **Αιτήματα**(=αξιώματα), **Κοινές έννοιες**

Ορισμός 15: ***Κύκλος*** *ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.*

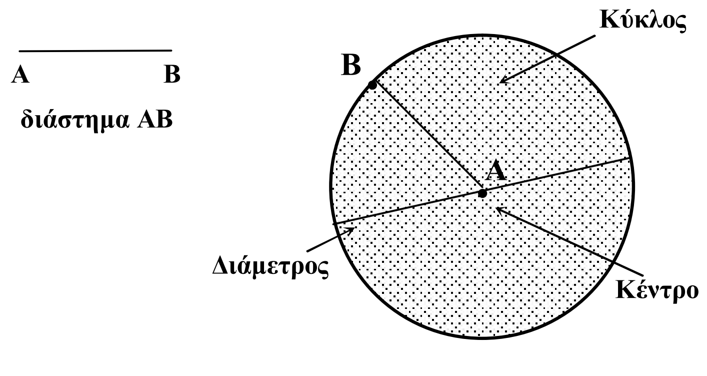
Κύκλος *(κυκλικός δίσκος) είναι το επίπεδο σχήμα που περιέχεται σε μία γραμμή [που καλείται* ***περιφέρεια*** *(κύκλος)], της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο στο εσωτερικό του κύκλου.*

Ο κύκλος λοιπόν παρατηρούμε δεν ορίζεται κατασκευαστικά. Αυτό θα συνέβαινε αν διατυπωνόταν ένας ορισμός της μορφής: «Αν μία γραμμή ορισμένου μήκους, με σταθερό το ένα άκρο της περιστραφεί τότε με το άλλο άκρο της γράφει μία καμπύλη που ονομάζεται κύκλος». Το γεγονός ότι δεν ορίζεται με αυτόν τον τρόπο και απλώς περιγράφονται τα χαρακτηριστικά του σχήματος που ονομάζεται κύκλος, προϋποθέτει ως δεδομένη την ύπαρξή του. Αυτό ακριβώς συμβαίνει επειδή η ύπαρξή του έχει εξ' αρχής συμπεριληφθεί στα αξιώματα του πρώτου βιβλίου:

3^{o} αξίωμα: « *Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.*»

Όταν περιγράφεται στα Στοιχεία ότι φέρεται ένας κύκλος συναντάμε την έκφραση: «κύκλος φέρεται με κέντρο το Α και διάστημα την γραμμή ΑΒ». Το διάστημα λοιπόν αναφέρεται στην ακτίνα του κύκλου για την οποία δεν συναντάμε αντίστοιχο όρο στα Στοιχεία. Η ακτίνα, που είναι μία «γραμμή», δηλαδή αυτό που σήμερα θα λέγαμε ευθύγραμμο τμήμα περιγράφεται με εκφράσεις όπως: «η γραμμή που γράφεται από το κέντρο» ή πιο απλά «η εκ του κέντρου» αλλά και «η προς την περιφέρεια».

Τέλος να παρατηρήσουμε το πλέον σημαντικό: με την λέξη «κύκλος» αλλά και «σχήμα» γενικότερα ο Ευκλείδης αναφέρεται σε επιφάνεια. Αντιθέτως εμείς σήμερα με την ίδια λέξη αναφερόμαστε στην καμπύλη, ενώ για την επιφάνεια χρησιμοποιούμε τον όρο κυκλικό δίσκο.



Ορισμός 16: ***Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου*** *τὸ σημεῖον καλεῖται.*

Το σημείο δε αυτό, ***κέντρο*** *του κύκλου ονομάζεται.*

Ο Ήρων, ο Πρόκλος και ο Σιμλίκιος στο σημείο αυτό φροντίζουν να διευκρινήσουν ότι το σημείο που ισαπέχει από την περιφέρεια είναι μοναδικό όταν βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τον κύκλο. Στην περίπτωση που βρίσκεται εκτός επιπέδου καλείται «πόλος».

Ορισμός 17: ***Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου*** *ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.*

Διάμετρος *δε του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι στην περιφέρεια του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.*

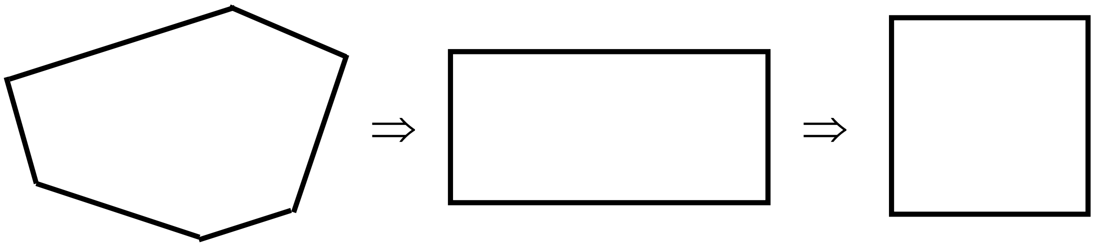
Ο Σιμπλίκιος σημειώνει ότι ο όρος «διάμετρος» προκύπτει λόγω του ότι η γραμμή διασχίζει τον κύκλο και τον «μετράει». Να σημειώσουμε σ' αυτό το σημείο ότι διάμετρος καλείται και η διαγώνιος του τετραγώνου στα στοιχεία. Η λέξη διαγώνιος είναι μεταγενέστερη.

Ορισμός 18: ***Ἡμικύκλιον*** *δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας.* ***κέντρον*** *δὲ τοῦ* ***ἡμικυκλίου*** *τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.*

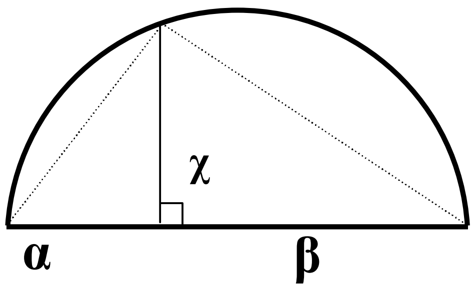
Ημικύκλιο *είναι το σχήμα που περιέχεται από την γραμμή που αποτελείται από την διάμετρο και το τόξο που αντιστοιχεί σε αυτήν.* ***Κέντρο του ημικυκλίου*** *είναι το κέντρο του κύκλου.*

4.6.2 Τετραγωνισμος Σχηματων

Μέσω των προτάσεων που αποδεικνύονται κυρίως στο τέλος του πρώτου βιβλίου καθώς και στην αρχή του δεύτερου. Είναι δυνατός ο μετασχηματισμός κάθε ευθύγραμμου τμήματος σε τρίγωνο και από αντίστοιχη πρόταση σε παραλληλόγραμμο οποιασδήποτε γωνίας. Δηλαδή, μπορούσαν να κατασκευάσουν με πεπερασμένα το πλήθος βήματα χρήσης του κανόνα και του διαβήτη, δοσμένου ευθυγράμμου σχήματος, ένα ισοεμβαδικό ορθογώνιο. (Ι.45). Ενώ στην συνέχεια γνώριζαν πως να μετατρέπουν το κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε ισοεμβαδικό τετράγωνο (ΙΙ.14).



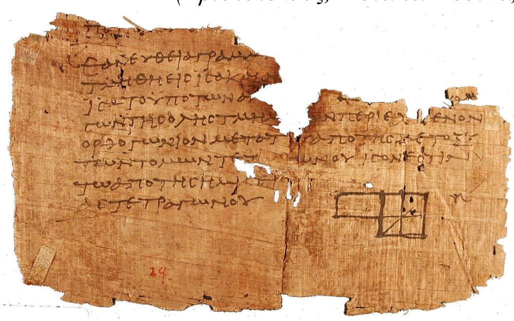
Από την πρόταση (ΙΙ.14) των Στοιχείων του Ευκλείδη προκύπτει ότι «Ένα τετράγωνο είναι ισοεμβαδικό με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όταν η πλευρά του είναι ο γεωμετρικός μέσος των πλευρών του παραλληλογράμμου.»[75]



Κατ' αυτόν τον τρόπο για τον τετραγωνισμό κάθε ευθύγραμμου σχήματος, προκύπτει η ανάγκη, εύρεσης του γεωμετρικού μέσου δύο τμημάτων. Αυτός είναι και ο λόγος που ο Αριστοτέλης, σημειώνει ότι αυτό που ορίζει τον τετραγωνισμό, είναι η εύρεση του (γεωμετρικού) μέσου[76]

«τι εστι το τετραγωνίζειν, ότι μέσης εύρεσις»

(Αριστοτέλους, Μετά τα Φυσικά, 996b, 21)



Αρχαιότερο απόσπασμα από Στοιχεία του Ευκλείδη. (75-125 μ.Χ)

---

[75] Να αναφερθώ στην απόδειξη της ΙΙ. 14;

[76] Να αναφερθώ στην γεωμετρική κατασκευή του γεωμετρικού μέσο;

4.6.3 Ο ΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΟΣ ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ ΤΟΥ

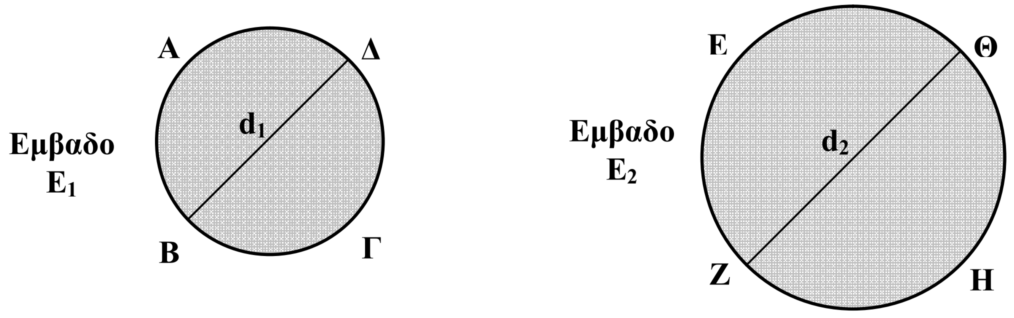
Το εμβαδόν του κύκλου δεν υπολογίζεται με κάποιον τρόπο στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Αυτό προφανώς δεν σημαίνει ότι οι σύγχρονοι και προγενέστεροί του δεν είχαν τρόπους για να κάνουν τον χρήσιμο αυτόν πολλαπλασιασμό. Από αρχαιότερους πολιτισμούς ήδη φαίνεται ότι γίνονταν προσεγγιστικοί υπολογισμοί με την χρήση κάποιων «σταθερών» που προέκυπταν από την εμπειρική κυρίως παρατήρηση. Η νέα γνώση που προκύπτει από τα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι ότι υπάρχει **ένας** λόγος που να συνδέει το εμβαδό του κύκλου με ένα γνωστό μήκος και είναι αυτός είναι **σταθερός** για όλους τους κύκλους.

Αυτό που βρίσκουμε με εξαιρετική αυστηρότητα να αποδεικνύεται στο 12^{ο} βιβλίο των Στοιχείων είναι κάτι που κανένας προηγούμενος πολιτισμός δεν φαίνεται να είχε τεκμηριώσει θεωρητικά:

Ότι η σχέση που συνδέει το εμβαδόν του κύκλου με την διάμετρό του είναι σταθερή, ή αλλιώς η ίδια αυτή σχέση ισχύει για κάθε κύκλο.

Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ο **λόγος του εμβαδού προς το τετράγωνο της διαμέτρου είναι ίδιος για όλους τους κύκλους**.

Δηλαδή, αν E_1, E_2 τα εμβαδά δύο οποιονδήποτε άνισων κύκλων με διαμέτρους d_1 και d_2 αντίστοιχα.



ισχύει η αναλογία: $$\frac{E_1}{d_1^2} = \frac{E_2}{d_2^2} \quad \textit{(1)}$$

Εμείς γνωρίζουμε σήμερα ότι ο λόγος αυτός ισούται με $\frac{\pi_2}{4}$ και θα μπορούσαμε με σύγχρονους όρους να πούμε ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι το π_2 είναι μία σταθερά, χωρίς αυτή να υπολογίζεται.

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την Πρόταση XII.2 των Στοιχείων:

«Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.»

που σημαίνει ότι: ***Οι κύκλοι έχουν μεταξύ τους λόγο ίδιο με αυτόν των τετραγώνων των διαμέτρων τους***.

Και με αντίστοιχο σύγχρονο συμβολισμό μεταφράζεται στο ότι για κάθε E_1, E_2 δύο άνισων κύκλων με διαμέτρους d_1 και d_2 αντίστοιχα, ισχύει η αναλογία:

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$, οπότε και με προκύπτει η προηγούμενη σχέση ***(1)***.

Πρόταση XII. 2

«Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν
ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.»

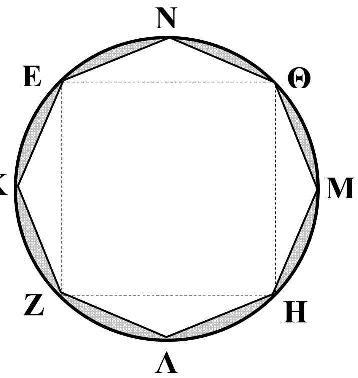
Οι κύκλοι έχουν μεταξύ τους λόγο
ίδιο με αυτόν των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Απόδειξη:
Έστω οι κύκλοι ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ με διαμέτρους ΒΔ και ΖΘ αντίστοιχα.

Θα δείξουμε ότι $\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2}=\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{ΕΖΗΘ}}$.

Διότι, αν δεν ισχύει $\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2}=\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{ΕΖΗΘ}}$, τότε ισχύει $\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2}=\frac{\text{ΑΒΓΔ}}{\text{Π}}$ με Π να είναι ένα χωρίο είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο από τον κύκλο ΕΖΗΘ.

Α) Έστω Π < ΕΖΗΘ (κύκλος C_2)

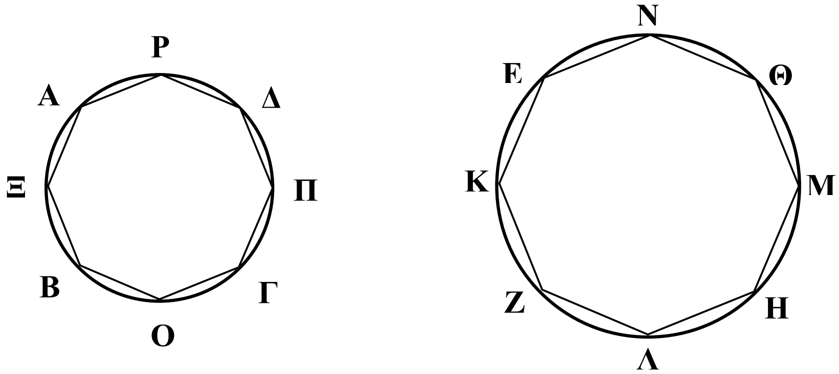


I) *Ο Ευκλείδης στο σημείο αυτό παραθέτει απόδειξη για το ότι δεδομένης μίας μικρότερης ποσότητας (εμβαδού) από τον κύκλο, μπορεί να κατασκευαστεί ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο στον κύκλο με εμβαδό μεγαλύτερό της. Την απόδειξη αυτή, που γίνεται με την μέθοδο της εξάντλησης παρουσιάσαμε ξεχωριστά προηγουμένως.*

Έστω λοιπόν ότι το πολύγωνο αυτό είναι το οκτάγωνο ΕΚΖΛΗΜΘΝ και ότι ισχύει:

ΕΚΖΛΗΜΘΝ > Π

II) Ας εγγραφεί και στον άλλο κύκλο κανονικό οκτάγωνο ΑΞΒΟΓΠΔΡ.



Τότε (από την προηγούμενη πρόταση[77] του ίδιου βιβλίου) θα ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\text{ΒΔ}^2}{\text{ΖΘ}^2}=\frac{\text{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}}{\text{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}}$$

[77] Βιβλίο XII, Πρόταση 1: «Όμοια πολύγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλους έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους»

Αλλά ισχύει και $\frac{Β\Delta^2}{Ζ\Theta^2} = \frac{ΑΒΓ\Delta}{\Pi}$ οπότε έχουμε ότι $\frac{ΑΒΓ\Delta}{\Pi} = \frac{Α\Xi ΒΟΓ\Pi\Delta Ρ}{ΕΚΖ\Lambda ΗΜ\Theta Ν}$

Ισχύει άρα (με την εναλλάξ ιδιότητα των αναλογιών):

$$\frac{ΑΒΓ\Delta}{Α\Xi ΒΟΓ\Pi\Delta Ρ} = \frac{\Pi}{ΕΚΖ\Lambda ΗΜ\Theta Ν}$$

Αφού όμως ο κύκλος ΑΒΓΔ είναι μεγαλύτερος από το εγγεγραμμένο του πολύγωνο, (δηλαδή ΑΒΓΔ>ΑΞΒΟΓΠΔΡ), θα είναι λόγω της προηγούμενης αναλογίας και η ποσότητα Π αντίστοιχα μεγαλύτερη από το πολύγωνο ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Δηλαδή ισχύει:

$$\Pi > ΕΚΖ\Lambda ΗΜ\Theta Ν$$

Συνεπώς είναι και μικρότερη και μεγαλύτερη που είναι **ΑΔΥΝΑΤΟ** και άρα δεν μπορεί να ισχύει (αυτό που υποθέσαμε αρχικά) ότι $\frac{Β\Delta^2}{Ζ\Theta^2} = \frac{ΑΒΓ\Delta}{\Pi}$ αν Π<ΕΖΗΘ

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι ούτε $\frac{Ζ\Theta^2}{Β\Delta^2} = \frac{ΕΖΗ\Theta}{\Pi}$ με Π<ΑΒΓΔ (*)

Β) Έστω Π > ΕΖΗΘ (κύκλος C_2)

Ο Ευκλείδης δήλωσε την προηγούμενη πρόταση(*) προκειμένου να ανάγει το δεύτερο μέρος της απόδειξης, που ακλουθεί, στο πρώτο. Κατ' αυτόν τον τρόπο δεν θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσει για δεύτερη φορά την μέθοδο της εξάντλησης για περιγεγραμμένα πολύγωνα που θα σήμαινε ότι θα χρειαζόταν να έχει αποδείξει μία επιπλέον πρόταση για περιγεγραμμένα πολύγωνα ανάλογη της ΧΙΙ.1.

Υποθέτουμε δηλαδή ότι $\frac{Β\Delta^2}{Ζ\Theta^2} = \frac{ΑΒΓ\Delta}{\Pi}$ αν Π>ΕΖΗΘ

Αντίστροφα (υποθέτουμε δηλαδή ότι) ισχύει $\frac{Ζ\Theta^2}{Β\Delta^2} = \frac{\Pi}{ΑΒΓ\Delta}$ αν Π>ΕΖΗΘ

Όμως ο λόγος της ποσότητας Π προς τον κύκλο ΑΒΓΔ, είναι ίδιος με τον λόγο του κύκλου ΕΖΗΘ προς μία ποσότητα Τ μικρότερη από τον κύκλο ΑΒΓΔ.

Δηλαδή ισχύει: $\frac{\Pi}{ΑΒΓ\Delta} = \frac{ΕΖΗ\Theta}{Τ}$ με Τ<ΑΒΓΔ (αφού ΕΖΗΘ<Π)

*Η παραπάνω πρόταση είναι **λήμμα***

που αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη αμέσως μετά το τέλος της απόδειξης.

Αλλά ισχύει και $\frac{Ζ\Theta^2}{Β\Delta^2} = \frac{\Pi}{ΑΒΓ\Delta}$ οπότε έχουμε ότι:

$$\frac{Ζ\Theta^2}{Β\Delta^2} = \frac{ΕΖΗ\Theta}{Τ} \text{ με } Τ<ΑΒΓ\Delta$$

το οποίο αποδείχθηκε **ΑΔΥΝΑΤΟ** (Π*ρόταση (*))*

Οπότε δεν μπορεί να ισχύει (αυτό που υποθέσαμε αρχικά) ότι

$$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}=\frac{AB\Gamma\Delta}{\Pi}$$ αν Π<ΕΖΗΘ

Συνολικά αποδείχθηκε ότι δεν ισχύει $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}=\frac{AB\Gamma\Delta}{\Pi}$
για Π μικρότερο ή μεγαλύτερο από τον κύκλο ΕΖΗΘ.

Άρα αποδείχθηκε ότι ισχύει $$\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}=\frac{AB\Gamma\Delta}{EZH\Theta}$$

Λῆμμα

«Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ
κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον,
οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓ κύκλου χωρίον.»

Δηλαδή: Αν ΕΖΗΘ<Π , τότε ισχύει $\frac{\Pi}{AB\Gamma\Delta}=\frac{EZH\Theta}{T}$ με Τ<ΑΒΓΔ

Απόδειξη:

Θέλω να δείξω (*με δεδομένα τα ΕΖΗΘ<Π και* $\frac{\Pi}{AB\Gamma\Delta}=\frac{EZH\Theta}{T}$.
ότι Τ<ΑΒΓΔ.

Αν ισχύει $\frac{\Pi}{AB\Gamma\Delta}=\frac{EZH\Theta}{T}$ θα ισχύει και (εναλλάξ) $\frac{\Pi}{EZH\Theta}=\frac{AB\Gamma\Delta}{T}$
Και αφού ΕΖΗΘ<Π θα ισχύει και Τ<ΑΒΓΔ.
(από την πρόταση V.16 της θεωρίας αναλογιών)

5. ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ «ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ»

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το πλέον διαδεδομένο και περισσότερο μεταφρασμένο έργο του Αρχιμήδη. Το «Κύκλου Μέτρησης» αποτέλεσε σταθμό στην ιστορία της μελέτης του κύκλου και δεν ξεπεράστηκε για τουλάχιστον 1500 χρόνια μετά την συγγραφή του ενώ παρέμεινε οδηγός για τους μετέπειτα μαθηματικούς μέχρι και τις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα.

Αυτό που κάνει το έργο αυτό τόσο σημαντικό είναι η χρήση της μεθόδου της εξάντλησης, η πρώτη αυστηρή απόδειξη της σχέσης που συνδέει το εμβαδό του κύκλου με την ακτίνα και την περιφέρειά του ($\mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}$), δηλαδή η απόδειξη της ισότητας των $\pi_1 = \pi_2$ και η πρώτη οριοθέτηση της τιμής του π μεταξύ δύο ρητών αριθμών, των τιμών $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$.

Η διαδρομή των μεταφράσεων του κειμένου είναι δαιδαλώδης και μία μικρή αναφορά θα κάνουμε σε επόμενο κεφάλαιο αναφερόμενοι σε κάποιες από τις σημαντικότερες μεταφράσεις και εκδόσεις του έργου του Αρχιμήδη και ειδικότερα του «Κύκλου Μέτρησις» στα χρόνια του μεσαίωνα από την ελληνική, στην αραβική και την λατινική γλώσσα. Εδώ θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις τρεις προτάσεις που σώζονται υπό τον συγκεκριμένο τίτλο, όπως αυτές περιλαμβάνονται στην έκδοση των Απάντων του Αρχιμήδη από τον **Heiberg**, ενώ θα βασιστούμε στην μετάφραση που προτείνει ο **Heath**.

5.1 **ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ** (287-213 π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης τόσο στην εργασία αυτή όσο και στην ιστορία των μαθηματικών γενικότερα κατέχει εξέχουσα θέση. Υπήρξε σπουδαίος μαθηματικός, μηχανικός, αστρονόμος και φυσικός και οι επινοήσεις του, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο σε πολλούς τομείς έμειναν αξεπέραστοι για περισσότερο από 1000 χρόνια.

Ελάχιστα γνωρίζουμε για τα πρώτα χρόνια της ζωής του σπουδαίου επιστήμονα. Γιος του αστρονόμου Φειδία, γεννήθηκε το 287 π.Χ. στις Συρακούσες της Σικελίας όταν η πόλη αποτελούσε ακόμα ελληνική αποικία. Πολύ πιθανόν για ένα διάστημα να βρέθηκε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, όπου και ήρθε σε επαφή με το έργο του Ευκλείδη αλλά και σύναψε σχέσεις με επιστήμονες εκείνης της περιόδου, όπως φαίνεται από τις αναφορές των έργων του. Η δημοσίευση των έργων του συχνά γινόταν μέσω αλληλογραφίας του, με τους μαθηματικούς: Κόνωνα τον Σάμιο, τον Δοσίθεο και τον Ερατοσθένη τον Κυρηναίο, που ζούσαν στην πόλη της Αλεξάνδρειας. Ο μύθος τον θέλει να πεθαίνει στις Συρακούσες το 213 π.Χ. από το σπαθί ενός Ρωμαίου την ημέρα που οι Ρωμαίοι κατακτούσαν την πόλη.

Τόσο για τον θάνατό του όσο και για τις μηχανικές και φυσικές ανακαλύψεις του, ο θρύλος μπλέχτηκε με το όνομά του ενώ οι εξιστορήσεις γεγονότων από την ζωή του και οι ρήσεις που του αποδίδονται έμειναν ζωντανές για αιώνες μέχρι και τα σημερινά σχολικά εγχειρίδια. Οι εξιστορήσεις αυτές στην πλειοψηφία τους βασίζονται στις αναφορές που περιείχε το έργο του Πλουτάρχου.

Το μαθηματικό έργο του Αρχιμήδη υπήρξε θεμέλιο για την περεταίρω ανάπτυξη των μαθηματικών και παρά το γεγονός ότι έμεινε ανεκμετάλλευτο για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, υποσκιασμένο από τα μηχανικά επιτεύγματα του επιστήμονα, τον καθιστά ομόφωνα, έναν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας, αλλά και όλων των εποχών. Χρησιμοποίησε όπως έχουμε ήδη αναφέρει την μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου, με μεγάλη δεξιοτεχνία, για να υπολογίσει επίπεδες και καμπυλόγραμμες επιφάνειες καθώς και τους όγκους που προκύπτουν από επιφάνειες εκ περιστροφής. Έδωσε τον ορισμό της έλικας, μίας καμπύλης που προκύπτει από τον συνδυασμό δύο κινήσεων και δίνει το ανάπτυγμα οποιουδήποτε τόξου του κύκλου, όπως συμβαίνει και με την τετραγωνίζουσα του Ιππία, δίνοντας έμμεσα λύση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

5.2 ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

Από το σημαντικό έργο αυτό σώζονται τρεις προτάσεις. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τις δύο από αυτές, όπως εκδόθηκαν στο έργο του Heath. Το κείμενο και η μετάφραση που παρουσιάζει ο **Heath** εκδόθηκε με αρχαίο κείμενο και ελληνική μετάφραση από τον **Σταμάτη** το 1950. Και τα δύο έργα είναι απόλυτα βασισμένα στην έκδοση του Heiberg (1910-15). Το κείμενο αυτό, αποτελεί έναν συγκερασμό του **Heiberg** από τα σωζόμενα αντίγραφα του ελληνικού χειρογράφου που είχε στην διάθεσή του ο **Moerbeke** (περ. 1270) το οποίο στην συνέχεια χάθηκε. Περισσότερα για την ιστορία των χειρογράφων και τις μεταφράσεις του «Κύκλου Μέτρησις» θα αναφερθούν στο τελευταίο κεφάλαιο αναλυτικά.

Η πρώτη πρόταση αφορά την σχέση που συνδέει το εμβαδό, την περιφέρεια και την ακτίνα του κύκλου. Αποδεικνύει την γνωστή όπως αποδεικνύεται σχέση $\mathbf{E}=\frac{1}{2}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}$. Η σχέση αυτή στην πρόταση διατυπώνεται με γεωμετρικούς όρους ως ισότητα δύο γεωμετρικών σχημάτων ενός κύκλου και ενός ορθογωνίου τριγώνου του οποίου οι κάθετες πλευρές ισούνται με την περιφέρεια και την ακτίνα του κύκλου αντίστοιχα. Η σημασία της απόδειξης αυτής είναι πολύπλευρη. Κυρίαρχος λόγος της μεγάλης αξίας της είναι η αποδεικτική μέθοδος που ακολουθείται που όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο χρησιμοποιεί την «μέθοδο της εξάντλησης. Ο άλλος βασικός λόγος για τον οποίον η σχέση αυτή είχε εξαιρετική σημασία, είναι διότι αποδεικνύεται για πρώτη φορά ότι ο κύκλος ισούται με ένα ευθύγραμμο σχήμα οπότε και είναι εφικτός ο τετραγωνισμός του. Ωστόσο η κατασκευή του ισοδύναμου αυτού τριγώνου είναι όπως γνωρίζουμε αδύνατη με ευκλείδειο τρόπο. Τέλος, όσο αφορά την σύγχρονη θεώρηση σε σχέση με τον αριθμό π και τον διαχωρισμό που εξαρχής έχουμε κάνει για τις διαφορετικής σημασίας σταθερές π_1 και π_2, η απόδειξη αυτή είναι η πρώτη που τεκμηριώνει με τρόπο αναμφισβήτητο την ισότητα των δύο αυτών σταθερών. Αφού η ίδια η διατύπωση της πρότασης με σύγχρονους όρους και χρήση των δύο σταθερών π_1 και π_2 σημαίνει ότι: $\boldsymbol{\pi_2 R^2} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{2\pi_1 R_2}$ και άρα $\boldsymbol{\pi_1}=\boldsymbol{\pi_2}$.

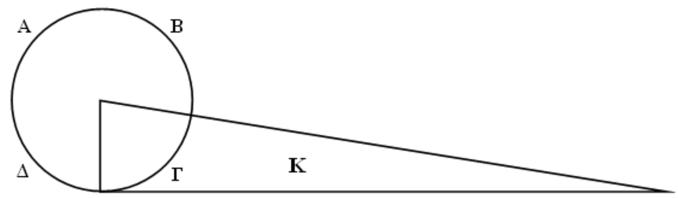
Η δεύτερη πρόταση της πραγματείας διατυπώνει τον κανόνα $\mathbf{E} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{R^2}$, χρησιμοποιώντας, με λανθασμένο τρόπο το αποτέλεσμα της επόμενης, και κατά κοινή ομολογία, δεν είναι δυνατόν να περιεχόνταν στην Αρχιμήδεια πραγματεία κατ' αυτόν τον τρόπο.

Η τρίτη τέλος πρόταση παρουσιάζει τον περίφημο «υπολογισμό» του π από τον Αρχιμήδη που στην ουσία δίνει δύο λόγους ως άνω και κάτω φράγμα για τον λόγο της περιφέρειας ως προς την διάμετρο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

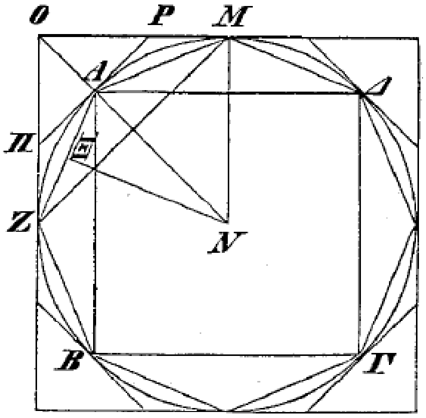
«Το εμβαδόν κάθε κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα του και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με την περιφέρειά του.»

Έστω κύκλος ΑΒΓΔ και ορθογώνιο τρίγωνο εμβαδού Κ όπως περιγράφηκε στην πρόταση.



α΄.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ 34
μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ
δὲ περίμετρος τῇ βάσει.
ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπό- 35
κειται· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστίν.
εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγε- 36
γράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περι-
φέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς



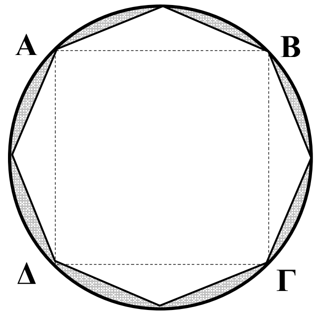
ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐ-
θύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω 37
κέντρον τὸ Ν καὶ κάθετος ἡ ΝΞ· ἐλάσσων ἄρα ἡ
ΝΞ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστιν δὲ καὶ ἡ περί-
μετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ
τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμ-
μον τοῦ Ε τριγώνου· ὅπερ ἄτοπον.

ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων τοῦ Ε τρι- 38
γώνου, καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τε-
τμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτό-
μεναι διὰ τῶν σημείων· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΟΑΡ. ἡ ΟΡ 39
ἄρα τῆς ΜΡ ἐστιν μείζων· ἡ γὰρ ΡΜ τῇ ΡΑ ἴση
ἐστί· καὶ τὸ ΡΟΠ τρίγωνον ἄρα τοῦ ΟΖΑΜ σχήμα-
τος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ
ΠΖΑ τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει
τὸ Ε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἔτι ἄρα τὸ περιγεγραμμέ- 40
νον εὐθύγραμμον τοῦ Ε ἐστιν ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον·
ἔστιν γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ΝΑ ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ
τοῦ τριγώνου, ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως
τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ Ε τριγώνῳ. 41

Η πρώτη πρόταση του ¨Κύκλου Μέτρησις όπως παρουσιάζεται στην έκδοση του Heiberg.

Έστω ότι ο κύκλος δεν είναι ισοεμβαδικός με το τρίγωνο. Τότε θα είναι είτε μεγαλύτερος είτε μικρότερος.

Ι) **Έστω ότι ο κύκλος είναι μεγαλύτερος από Κ κατά εμβαδό δ.**

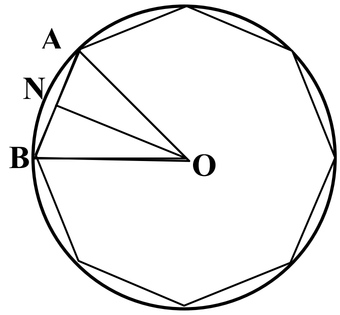


Α) Εγγράφουμε στον κύκλο τετράγωνο ΑΒΓΔ, στην συνέχεια με διχοτόμηση των τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ εγγράφουμε οκτάγωνο και ούτω καθεξής, ωσότου τα κυκλικά τμήματα μεταξύ του εγγεγραμμένου πολυγώνου και του κύκλου να έχουν συνολικό εμβαδό μικρότερο του δ. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα υπάρξει εγγεγραμμένο πολύγωνο που θα έχει εμβαδό μεγαλύτερο από Κ.

Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε:

$$\text{Εμβαδόν n-γώνου} > \text{Κ}$$

Ο Αρχιμήδης δεν αποδεικνύει ωστόσο την δυνατότητα μίας τέτοιας κατασκευής. Δεν αποδεικνύει δηλαδή, ότι δεδομένης μίας μικρότερης ποσότητας από τον κύκλο, μπορεί να κατασκευαστεί ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο στον κύκλο με εμβαδό μεγαλύτερό της. Εξάλλου όπως είδαμε και σε προηγούμενη παράγραφο, η απόδειξη αυτή που γίνεται με την μέθοδο της εξάντλησης, περιλαμβάνεται στο ΧΙΙ βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη και για τον λόγο αυτό θεωρείται δεδομένη από τον συγγραφέα. Την απόδειξη αυτή, που γίνεται με την μέθοδο της εξάντλησης, παρουσιάσαμε ξεχωριστά στην παράγραφο 4.4.



Β) Έστω ότι ΑΒ είναι μία από τις πλευρές του πολυγώνου αυτού και ότι ΟΝ η κάθετη σ' αυτήν από το κέντρο του κύκλου Ο.

Τότε όπως είναι προφανές η ΟΝ είναι μικρότερη της ακτίνας R και άρα μικρότερη από την μία κάθετη πλευρά του τριγώνου Κ.
Επίσης η περίμετρος του πολυγώνου είναι μικρότερη από την περιφέρεια του κύκλου και άρα από την άλλη κάθετη πλευρά του τριγώνου Κ.
Οπότε το εμβαδόν του πολυγώνου είναι μικρότερο από Κ.

Με σύγχρονους όρους, θα λέγαμε ότι για κάθε n, φυσικό αριθμό, ισχύει το εξής:

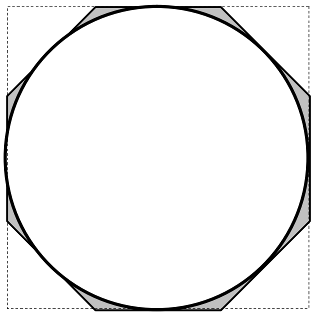
$$\begin{aligned}\text{Εμβαδόν n-γώνου} &= n \times (\text{εμβαδόν τριγώνου ΑΟΒ}) \\ &= n \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times ON\right) \\ &= \frac{1}{2} \times (n \times AB) \times ON \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{Περίμετρος n-γώνου}) \times ON \\ &< \frac{1}{2} \times \text{Περιφέρεια κύκλου} \times R = K\end{aligned}$$

Οπότε, $\quad \text{Εμβαδόν n-γώνου} < \text{Κ}$

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει διότι αποδείξαμε ότι υπάρχει πολύγωνο μεγαλύτερο του Κ και συνεπώς καταλήξαμε σε <u>άτοπο</u>. **Άρα ο κύκλος δεν είναι μεγαλύτερος από Κ.**

II) Έστω ότι ο κύκλος είναι μικρότερος από Κ κατά εμβαδό δ.

Α) Περιγράφουμε στον κύκλο τετράγωνο και στην συνέχεια με διχοτόμηση των αντίστοιχων τόξων περιγράφουμε οκτάγωνο και ούτω καθεξής, εωσότου τα κυκλικά τμήματα μεταξύ του περιγεγραμμένου πολυγώνου και του κύκλου να έχουν συνολικό εμβαδό μικρότερο του δ. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα υπάρξει περιγεγραμμένο πολύγωνο που θα έχει εμβαδό μικρότερο του Κ.

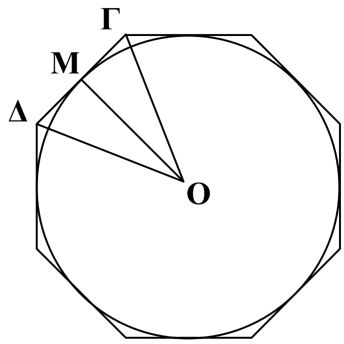


Με σύγχρονους όρους θα λέγαμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε:

$$\text{Εμβαδόν n-γώνου} < K$$

Ο Αρχιμήδης στο σημείο αυτό παραθέτει απόδειξη για το ότι είναι δυνατόν να κατασκευαστεί τέτοιο πολύγωνο. Αποδεικνύει δηλαδή, ότι δεδομένης μίας μεγαλύτερης ποσότητας από τον κύκλο, μπορεί να κατασκευαστεί ένα περιγεγραμμένο πολύγωνο στον κύκλο με εμβαδό μικρότερό της. Την απόδειξη αυτή, που γίνεται με την μέθοδο της εξάντλησης, παρουσιάσαμε ξεχωριστά στην παράγραφο 4.5.

Β) Έστω ότι ΒΓ είναι μία από τις πλευρές του πολυγώνου αυτού και ότι ΟΜ η κάθετη σ' αυτήν από το κέντρο του κύκλου Ο.



Όμως παρατηρούμε ότι η κάθετη από το κέντρο Ο προς κάθε πλευρά του πολυγώνου ισούται με την ακτίνα του κύκλου R, ενώ η περίμετρος του πολυγώνου είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου.

Οπότε το εμβαδόν του πολυγώνου είναι μεγαλύτερο από Κ.

Με σύγχρονους όρους, θα λέγαμε ότι **για κάθε n**, φυσικό αριθμό, ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned}
\text{Εμβαδόν n-γώνου} &= n \times (\text{εμβαδόν τριγώνου ΔΟΓ}) \\
&= n \times \left(\frac{1}{2} \times ΔΓ \times ΟΜ\right) \\
&= \frac{1}{2} \times (n \times ΔΓ) \times ΟΜ \\
&= \frac{1}{2} \times (\text{Περίμετρος n-γώνου}) \times ΟΜ \\
&= \frac{1}{2} \times (\text{Περίμετρος n-γώνου}) \times R \\
&> \frac{1}{2} \times (\text{Περιφέρεια κύκλου}) \times R = K
\end{aligned}$$

Οπότε, **Εμβαδόν n-γώνου $>$ Κ**

Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει διότι αποδείξαμε ότι υπάρχει πολύγωνο μικρότερο του Κ και συνεπώς καταλήξαμε σε <u>άτοπο</u>. **Άρα ο κύκλος δεν είναι μικρότερος από Κ.**
Οπότε και αποδείχθηκε ότι ο κύκλος είναι ίσος σε εμβαδό με το τρίγωνο Κ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

«Η περίμετρος κάθε κύκλου είναι λίγο μικρότερη του τρία και ένα έβδομο της διαμέτρου (του) και μεγαλύτερη του τρία και δέκα εβδομηκοστά πρώτα αυτής.»

Εδώ παρουσιάζουμε αναλυτικά την απόδειξη του Αρχιμήδη βασισμένοι στην μετάφραση του Heath παρεμβάλλοντας επεξηγηματικά βήματα και σχόλια εντός παρενθέσεων, ενώ το πρωτότυπο κείμενο σε ελεύθερη μετάφραση περιορίζεται σε όσα γράφονται με τονισμένη γραμματοσειρά.

Στο **ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ** της απόδειξης βρίσκεται το **άνω φράγμα** του λόγου της περιφέρειας προς την διάμετρο, με την βοήθεια **περιγεγραμμένων** κανονικών πολυγώνων, ξεκινώντας από ένα εξάγωνο και καταλήγοντας σε 96-γωνο.

Έστω κύκλος με διάμετρο ΑΒ και κέντρο Ο και έστω ΓΑ εφαπτόμενη στο σημείο Α με $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}$ ίση με το 1/3 της ορθής. (Δηλαδή $\mathrm{A\hat{O}\Gamma} = 30^o$)

Τότε

$$\frac{\mathbf{AO}}{\mathbf{\Gamma A}}\left(= \sigma\varphi\, 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{1}\right) > \frac{\mathbf{265}}{\mathbf{153}}$$

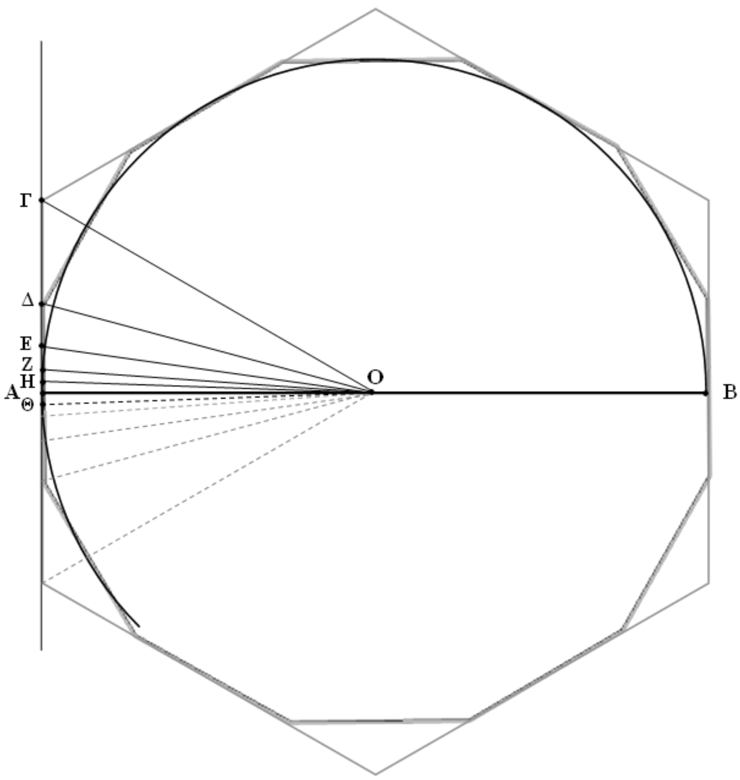
(1)

και

$$\left(\frac{\mathbf{\Gamma O}}{\mathbf{\Gamma A}} = \tau o\xi\, 30^0 = \frac{2}{1}\right) > \frac{\mathbf{306}}{\mathbf{153}}$$

(2)

(Να σημειώσουμε εδώ ότι το μήκος ΑΓ αντιστοιχεί όπως φαίνεται στο σχήμα στο μισό της πλευράς ενός περιγεγραμμένου 6-γώνου.
Επίσης όπως φαίνεται ο Αρχιμήδης θεωρεί γνωστές της τριγωνομετρικές σχέσεις για την γωνία 30^o καθώς και το άνω φράγμα που δίνει για την τετραγωνική ρίζα του 3.)



$1^{ον}$: Φέρνουμε την διχοτόμο της $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}$ που τέμνει τη ΓΑ στο σημείο Δ.

[Συνεπώς έχουμε γωνία $\mathrm{A\hat{O}\Delta}$ ίση με το 1/6 της ορθής και το μήκος ΔΑ αντιστοιχεί, όπως φαίνεται στο σχήμα, στο μισό της πλευράς ενός περιγεγραμμένου 12-γώνου.]

Ισχύει: $\frac{\mathbf{\Gamma O}}{\mathbf{AO}} = \frac{\mathbf{\Gamma\Delta}}{\mathbf{\Delta A}}$ (Πρόταση 3, VI Στοιχεία Ευκλείδη)

$\left(\text{Με πρόσθεση της μονάδας και στα δύο μέλη έχουμε } \dfrac{ΓΟ + ΑΟ}{ΑΟ} = \dfrac{ΓΔ + ΔΑ}{ΔΑ} \text{ και άρα } \dfrac{ΓΟ + ΑΟ}{ΑΟ} = \dfrac{ΓΑ}{ΔΑ} \right)$

Άρα ισχύει $\mathbf{\dfrac{ΓΟ + ΑΟ}{ΓΑ} = \dfrac{ΟΑ}{ΔΑ}}$

Οπότε (με πρόσθεση των σχέσεων *(1)* και *(2)* κατά μέλη η προηγούμενη σχέση) δίνει:

$$\mathbf{\frac{ΟΑ}{ΔΑ}} > \frac{571}{153} \qquad (3)$$

Όμως $\mathbf{\dfrac{ΔΟ^2}{ΔΑ^2}} \left(\overset{\text{Π.Θ.}}{=} \dfrac{ΑΟ^2 + ΔΑ^2}{ΔΑ^2} > \dfrac{571^2 + 153^2}{153^2} \right) > \mathbf{\dfrac{349450}{23409}}$

άρα $\mathbf{\dfrac{ΔΟ}{ΔΑ} > \dfrac{591\frac{1}{8}}{153}}$ *(4)*

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση $\sqrt{349450} \cong 591\frac{1}{8}$

2^{ον}: Φέρνουμε την διχοτόμο της $\mathbf{Α\hat{Ο}Δ}$ που τέμνει τη ΓΑ στο σημείο Ε.

Συνεπώς έχουμε γωνία $Α\hat{Ο}Δ$ ίση με το 1/12 της ορθής και η χορδή ΕΑ αντιστοιχεί όπως φαίνεται στο σχήμα στο μισό της πλευράς ενός περιγεγραμμένου 24-γώνου.

Ισχύει αντίστοιχα: $\dfrac{ΔΟ}{ΑΟ} = \dfrac{ΔΕ}{ΕΑ}$ (Πρόταση 3, VI Στοιχεία Ευκλείδη)

και με πρόσθεση της μονάδας και στα δύο μέλη έχουμε

$\dfrac{ΔΟ + ΑΟ}{ΑΟ} = \dfrac{ΔΕ + ΕΑ}{ΕΑ}$ και άρα $\dfrac{ΔΟ + ΑΟ}{ΑΟ} = \dfrac{ΔΕ}{ΕΑ}$

Άρα ισχύει $\dfrac{ΔΟ + ΑΟ}{ΔΕ} = \dfrac{ΑΟ}{ΕΑ}$

και με πρόσθεση των σχέσεων *(3)* και *(4)* κατά μέλη βάσει της προηγούμενης σχέση:

ισχύει $\mathbf{\dfrac{ΑΟ}{ΕΑ} > \dfrac{1162\frac{1}{8}}{153}}$ *(5)*

Οπότε, σε αντιστοιχία με το προηγούμενο βήμα:

$$\frac{ΕΟ^2}{ΕΑ^2} \overset{\text{Π.Θ.}}{=} \frac{ΑΟ^2 + ΕΑ^2}{ΕΑ^2} > \frac{\left(1162\frac{1}{8}\right)^2 + 153^2}{153^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409}$$

άρα $\mathbf{\dfrac{ΕΟ}{ΕΑ} > \dfrac{1172\frac{1}{8}}{153}}$ *(6)*

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση $\sqrt{1373943\frac{33}{64}} \cong 1172\frac{1}{8}$

3^{ον}: Φέρουμε την διχοτόμο της $\mathbf{Α\hat{Ο}Ε}$ που τέμνει τη ΓΑ στο σημείο Ζ.

Συνεπώς έχουμε γωνία $Α\hat{Ο}Ζ$ ίση με το 1/24 της ορθής και η χορδή ΖΑ αντιστοιχεί στο μισό της πλευράς ενός περιγεγραμμένου 48-γώνου.

Αντίστοιχα με τα προηγούμενα βήματα και με πρόσθεση των σχέσεων *(5)* και *(6)* κατά μέλη προκύπτει, όπως απευθείας καταγράφεται στο πρωτότυπο:

$$\frac{AO}{ZA} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153} \quad (7)$$

$$\left(\text{Όμως,} \quad \frac{ZO^2}{ZA^2} \overset{\Pi.\Theta.}{=} \frac{AO^2+ZA^2}{ZA^2} > \frac{\left(2334\frac{1}{4}\right)^2+153^2}{153^2} > \frac{5472132\ \frac{1}{16}}{23409} \right)$$

και άρα $$\frac{ZO}{ZA} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} \quad (8)$$

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση

$$\sqrt{5472132\tfrac{1}{16}} \cong 2339\tfrac{1}{4}$$

4[ον]: Φέρουμε την διχοτόμο της $A\hat{O}Z$ που τέμνει τη ΓΑ στο σημείο Η.

(Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία των προηγούμενων βημάτων και με πρόσθεση των σχέσεων *(7)* και *(8)* κατά μέλη προκύπτει, όπως απευθείας κατάγράφεται στο πρωτότυπο:)

Ισχύει: $$\frac{AO}{HA} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

Φέρουμε τώρα ευθεία από το Ο που τέμνει την ΓΑ στο Θ έτσι ώστε $A\hat{O}\Theta = A\hat{O}H$ = 1/48 της ορθής.

Οπότε ισχύει ότι $H\hat{O}\Theta$ = 1/24 της ορθής και η χορδή ΗΘ αντιστοιχεί στην πλευρά ενός περιγεγραμμένου 96-γωνου.

Επειδή όμως, όπως δείχθηκε: $$\frac{AO}{HA} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153},$$

ενώ ισχύουν: **ΑΒ = 2ΑΟ και ΗΘ = 2ΗΑ**

ακολουθεί ότι:

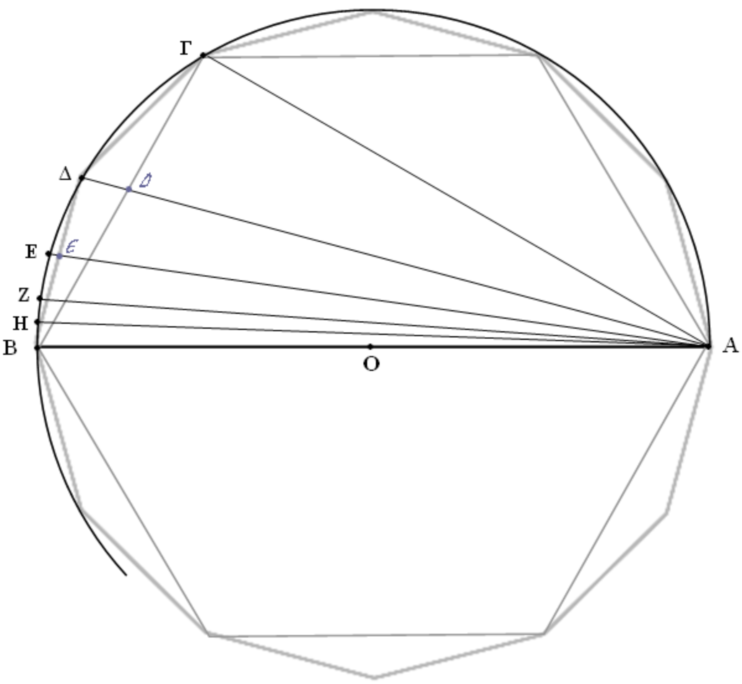
$$\frac{AB}{\text{περίμ.περιγεγρ.} 96\text{-γώνου}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153\times 96} > \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$$

Όμως $$\left(\frac{\text{περίμ.περιγεγρ. 96−γώνου}}{\text{διάμετρο}}\right) < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < \left(3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = \right) 3\frac{1}{7}$$

$$\left(\text{Ισχύει ότι} \frac{\text{περίμ.κύκλου}}{\text{διάμετρο}} < \frac{\text{περίμ.περιγεγρ. 96−γώνου}}{\text{διάμετρο}} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7} \right)$$

$$\text{Άρα έχουμε} \frac{\text{περίμ.κύκλου}}{\text{διάμετρο}} < 3\frac{1}{7}$$

Στο **ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ** της απόδειξης βρίσκεται κατά ανάλογο τρόπο το **κάτω φράγμα** του ζητούμενου λόγου με την βοήθεια αυτή τη φορά **εγγεγραμμένων** κανονικών πολυγώνων, ξεκινώντας πάλι από ένα εξάγωνο και καταλήγοντας σε 96-γωνο.



Έστω κύκλος με διάμετρο ΑΒ και έστω Γ σημείο του κύκλου έτσι ώστε $\Gamma\hat{A}B$ ίση με το 1/3 της ορθής. (Δηλαδή $\Gamma\hat{A}B = 30^o$)

Τότε

$$\frac{\mathbf{\Gamma A}}{\mathbf{\Gamma B}}\left(= \sigma\varphi 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{1}\right) > \frac{\mathbf{1351}}{\mathbf{780}} \qquad (1)$$

και

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{\Gamma B}}\left(= \tau o\xi\eta\mu 30^0 = \frac{2}{1}\right) = \frac{\mathbf{1560}}{\mathbf{780}} \qquad (2)$$

Την σχέση *(2)* την καταγράφει ο Αρχιμήδης παρακάτω - λίγο πριν την χρησιμοποιήσει.
Αλλάζουμε τη σειρά προκειμένου να υπάρχει πλήρης αντιστοιχία με το πρώτο μέρος της απόδειξης που προηγήθηκε.

1ον: Φέρνουμε την διχοτόμο της $\Gamma\hat{A}B$ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και την ΒΓ στο σημείο $\varDelta$.

Οπότε η χορδή ΔΒ αντιστοιχεί, όπως φαίνεται στο σχήμα, στην πλευρά ενός εγγεγραμμένου 12-γώνου.

Ισχύει: $\mathbf{\Delta\hat{A}B = \Gamma\hat{A}\varDelta = \Delta\hat{B}\varDelta}$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το ότι και οι δύο γωνίες βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$

και οι γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ορθές.
Οπότε τα τρίγωνα ΔΑΒ, (ΓΑ$\varDelta$) και ΔΒ$\varDelta$ είναι όμοια.

Συνεπώς ισχύει η ισότητα των λόγων: $\quad \frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{\Delta B}}\left(= \frac{\Gamma A}{\Gamma\varDelta}\right) = \frac{\mathbf{\Delta B}}{\mathbf{\Delta\varDelta}}$

Όμως με εφαρμογή της Πρότασης 3,VI
στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει $\frac{\Gamma A}{AB} = \frac{\Gamma\varDelta}{\varDelta B}$ οπότε και $\frac{\Gamma A}{\Gamma\varDelta} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{\varDelta B}}$
ενώ βάσει αντίστοιχης ιδιότητας των αναλογιών ισχύει. $\frac{\Gamma A}{\Gamma\varDelta} = \frac{AB}{\varDelta B} = \frac{\mathbf{\Gamma A + AB}}{\mathbf{\Gamma\varDelta + \varDelta B}} = \frac{\mathbf{\Gamma A + AB}}{\mathbf{\Gamma B}}$

Άρα $\frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{\Delta B}} = \frac{\mathbf{\Gamma A + AB}}{\mathbf{\Gamma B}}$ **και**

γι' αυτό [με πρόσθεση των σχέσεων *(1)* και *(2)* κατά μέλη η προηγούμενη σχέση δίνει:]

$$\frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{\Delta B}} < \frac{\mathbf{2911}}{\mathbf{780}} \quad (3)$$

$$\left(\text{Όμως} \quad \frac{AB^2}{\Delta B^2} \overset{\Pi.\Theta.}{=} \frac{\Delta A^2 + \Delta B^2}{\Delta B^2} < \frac{2911^2 + 780^2}{780^2} < \frac{9082321}{608400} \right)$$

και $$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{\Delta B}} < \frac{\mathbf{3013\frac{3}{4}}}{\mathbf{780}} \quad (4)$$

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση $\sqrt{908232} \cong 3013\frac{3}{4}$

2^{ον}: Φέρουμε την διχοτόμο της $\Delta\hat{A}B$ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε και την ΒΓ στο σημείο Ε.

Οπότε η χορδή ΕΒ αντιστοιχεί στην πλευρά ενός εγγεγραμμένου 24-γώνου.

Από τα όμοια τρίγωνα ΕΑΒ, ΔΑΕ και ΕΒΕ και μέσω της Πρότασης 3,VI προκύπτει η σχέση $\frac{EA}{EB} = \frac{\Delta A + AB}{\Delta B}$

και με πρόσθεση των σχέσεων *(3)* και *(4)* κατά μέλη βάσει της προηγούμενης σχέση:

ισχύει $$\frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{EB}} < \frac{\mathbf{5924\frac{3}{4}}}{\mathbf{780}} < \frac{\mathbf{5924\frac{3}{4} \times \frac{4}{13}}}{\mathbf{780 \times \frac{4}{13}}} = \frac{\mathbf{1823}}{\mathbf{240}} \quad (5)$$

$$\left(\text{Οπότε, σε αντιστοιχία με το προηγούμενο βήμα:} \quad \frac{AB^2}{EB^2} \overset{\Pi.\Theta.}{=} \frac{EA^2 + EB^2}{EB^2} < \frac{1823^2 + 240^2}{240^2} < \frac{3380929}{57600} \right)$$

άρα $$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{EB}} < \frac{\mathbf{1838\frac{9}{11}}}{\mathbf{240}} \quad (6)$$

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση $\sqrt{338092} \cong 1838\frac{9}{11}$

3^{ον}: Φέρουμε την διχοτόμο της $E\hat{A}B$ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ.

Οπότε η χορδή ΕΒ αντιστοιχεί στην πλευρά ενός εγγεγραμμένου 48-γώνου.

Από τα αντίστοιχα όμοια και την Πρόταση 3,VI προκύπτει η σχέση

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA + AB}{EB}$$

και με πρόσθεση των σχέσεων *(5)* και *(6)* κατά μέλη βάσει της προηγούμενης σχέση:

$$\frac{\mathbf{ZA}}{\mathbf{ZB}} < \left(\frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \right) \frac{\mathbf{3661\frac{9}{11} \times \frac{11}{40}}}{\mathbf{240 \times \frac{11}{40}}} = \frac{\mathbf{1007}}{\mathbf{66}} \quad (7)$$

$$\left(\text{Οπότε, σε αντιστοιχία με το προηγούμενο βήμα:} \quad \frac{AB^2}{ZB^2} \overset{\Pi.\Theta.}{=} \frac{ZA^2 + ZB^2}{ZB^2} < \frac{1007^2 + 66^2}{66^2} < \frac{1018405}{4356} \right)$$

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση $\sqrt{101840} \cong 1009\frac{1}{6}$

άρα $\dfrac{AB}{ZB} < \dfrac{1009\frac{1}{6}}{66}$ *(8)*

4^{ον}: Φέρουμε την διχοτόμο της $Z\hat{A}B$ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Η.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία των προηγούμενων βημάτων και με πρόσθεση των σχέσεων *(7)* και *(8)* κατά μέλη προκύπτει, όπως απευθείας κατάγράφεται στο πρωτότυπο:

Ισχύει: $\dfrac{HA}{HB} < \dfrac{2016\frac{1}{6}}{66}$

Και αφού:

$$\frac{AB^2}{HB^2} \overset{\text{Π.Θ.}}{=} \frac{HA^2+HB^2}{HB^2} < \frac{\left(2016\frac{1}{6}\right)^2+66^2}{66^2} < \frac{4069284\frac{1}{36}}{4356} \text{ ισχύει}$$

Εδώ ο Αρχιμήδης δίνει την προσέγγιση $\sqrt{4069284} \cong 2017\frac{1}{4}$

και: $\dfrac{AB}{HB} < \dfrac{2017\frac{1}{4}}{66}$

Η χορδή ΗΒ αντιστοιχεί στην πλευρά ενός εγγεγραμμένου 96-γώνου.

Άρα έχουμε $\dfrac{AB}{\text{περίμ.περγεγρ.96-γώνου}} < \dfrac{2017\frac{1}{4}}{66\times 96} = \dfrac{2017\frac{1}{4}}{6336}$

Και με αντιστροφή των λόγων: $\dfrac{\textbf{περίμ.εγγεγρ. 96−γώνου}}{\textbf{διάμετρο}} > \dfrac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\dfrac{10}{71}$

Ισχύει όμως $\dfrac{\textbf{περίμ.κύκλου}}{\textbf{διάμετρο}} > \dfrac{\textbf{περίμ.εγγεγρ. 96−γώνου}}{\textbf{διάμετρο}} > 3\dfrac{10}{71}$

Άρα έχουμε $\dfrac{\textbf{περίμ.κύκλου}}{\textbf{διάμετρο}} > 3\dfrac{10}{71}$

Δηλαδή απέδειξε ότι ισχύει:

$$3\frac{10}{71} < \frac{\textbf{περίμ.εγγ. 96−γώνου}}{\textbf{διάμετρο}} < \frac{\textbf{περίμ.κύκλου}}{\textbf{διάμετρο}} < \frac{\textbf{περίμ.περιγ. 96−γώνου}}{\textbf{διάμετρο}} < 3\frac{1}{7}$$

Οπότε

ισχύει $3\dfrac{10}{71} < \dfrac{\textbf{περίμ.κύκλου}}{\textbf{διάμετρο}} < 3\dfrac{1}{7}$.

Παρατηρήσεις:

Στα Μετρικά του ο **Ήρων** δίνει δύο επιπλέον πληροφορίες σχετικά με την Αρχιμήδεια μέτρηση του κύκλου:

α) Αναφέρει ότι στην «Κύκλου Μέτρησις» ο Αρχιμήδης είχε αποδείξει και μία επιπλέον πρόταση αντίστοιχη με την πρώτη, για κυκλικούς τομείς.[78]

β) Αναφέρει ότι είχαν βρεθεί καλύτερα όρια για την τιμή του π από τον Αρχιμήδη.[79]

Η πρώτη παρατήρηση θα δούμε στην συνέχεια ότι ενισχύεται ως αληθής από τις αραβικές μεταφράσεις του έργου καθώς και από ορισμένες λατινικές μεταφράσεις που προήλθαν από αραβικές. Συγκεκριμένα βλέπουμε την πρόταση που αναφέρει ο Ήρων στις μεταφράσεις αυτές να παρουσιάζεται ως πόρισμα της πρώτης πρότασης. Η πρόταση ή αλλιώς το πόρισμα αυτό λέει ότι το εμβαδό του τομέα ενός κύκλου, ισούται με το γινόμενο του μισού τόξου που κόβει από τον κύκλο επί την ακτίνα του κύκλου αυτού. Περισσότερα για την αναφορά του Ήρωνος την σύγχρονη απόδοση αυτής και τις μεταφράσεις που περιέχουν το πόρισμα θα παρουσιάσουμε στην παράγραφο 8.2.1.

Η δεύτερη παρατήρηση για την καλύτερη προσέγγιση του λόγου της περιμέτρου προς την διάμετρο, έχει γίνει αντικείμενο έρευνας διότι φαίνεται να δίνονται λανθασμένες τιμές από τον Ήρωνα ή τον αντιγραφέα και κατά πάσα πιθανότητα ούτε οι διορθωμένοι λόγοι δίνουν καλύτερη προσέγγιση, όπως συμπεραίνει ο Knorr στην αντίστοιχη εργασία του. Όσο αφορά δε την εύρεση μίας καλύτερης προσέγγισης του ζητούμενου λόγου, ο μεταγενέστερος του Ήρωνος, βασικός σχολιαστής του Αρχιμήδη, **Ευτόκιος**, στα σχόλιά του στο «Κύκλου μέτρησις» αναφέρει ότι ο **Απολλώνιος** πέτυχε καλύτερη προσέγγιση, χωρίς να αναφέρεται ωστόσο η μέθοδος που ακολούθησε.

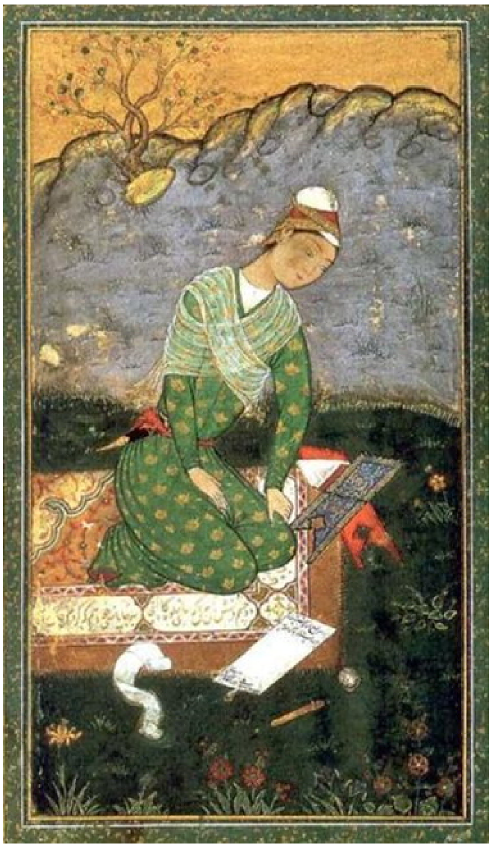
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον και μεγάλη συζήτηση μεταξύ των ερευνητών, στην οποία δεν θα επεκταθούμε όμως σε αυτήν την εργασία, έχει προκαλέσει το κάτω και το άνω φράγμα που δίνει ο Αρχιμήδης για την τιμή του $\sqrt{3}$, χωρίς δικαιολόγηση, στο πρώτο και δεύτερο μέρος της απόδειξης της τρίτης πρότασης του «Κύκλου μέτρησις». Στο έργο του Heath μπορεί κανείς να βρει αρκετές πληροφορίες για τις διάφορες απόψεις που έχουν διατυπωθεί. Ο Knorr στην εργασία που αναφέραμε προηγουμένως κάνει επίσης αναφορά στο ζήτημα, υποστηρίζοντας ότι οι προσεγγίσεις αυτές, που έχουν ανάπτυξη μεγάλη συζήτηση μεταξύ, προκύπτουν βάση της αρχής των το ενδιαφέρον των ερευνητών

[78] Ήρωνος, Μετρικά Ι, 37, 20-23

[79] Ηρωνος, Μετρικά Ι, 26, 8-14

6. Ο ΚΥΚΛΟΣ ΣΤΑ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΚΕΙΜΕΝΑ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΤΗΣ ΙΝΔΙΑΣ

6.1 ΚΕΙΜΕΝΑ ΑΣΤΡΟΜΟΜΙΚΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ (SIDDHANDAS)



Μετά την βεδική περίοδο οι πηγές για την ιστορία της μαθηματικής εξέλιξης στον ευρύτερο ινδικό πολιτισμό εστιάζουν στα κείμενα με αστρονομικό περιεχόμενο. Η μελέτη της αστρονομίας έχει μακραίωνη ιστορία στον πολιτισμό της Ινδίας. Ωστόσο παρουσιάζει κατά περιόδους μεγάλη ανομοιογένεια, τόσο εξαιτίας των διαφορετικών θρησκευτικών και φιλοσοφικών παραδόσεων που συνυπήρχαν στην ευρύτερη περιοχή της ινδικής χερσονήσου, όσο και εξαιτίας των επιρροών που δέχθηκαν από τις επιδρομές και κατακτήσεις γειτονικών λαών. Σε γενικές γραμμές θα παρατηρούσαμε ότι στα πρώιμα στάδια της ινδικής αστρονομίας είναι φανερή η επιρροή από βαβυλωνιακές πηγές, ενώ σε μεταγενέστερες εποχές παρατηρείται μία πρόσμειξη με ελληνιστικές αστρονομικές θεωρίες.

Από τα μέση τις πρώτης χιλιετίας, το καταστάλαγμα των διαφορετικών αστρονομικών θεωριών που αναπτύσσονταν, έδινε μορφή σε πραγματείες που αποκαλούνται **Σιντχάντας** (**Siddhandas**), όνομα που σημαίνει «εδραιωμένα αποτελέσματα» αλλά έχει παράλληλα την σημασία της «σχολής/παράδοσης» που υποστηρίζει την εκάστοτε θεωρία. Τα κείμενα αυτά έπαιρναν το όνομά τους αντίστοιχα από τον συγγραφέα ή την «σχολή» από την οποία προέρχονταν και σηματοδότησαν την αρχή μίας νέας περιόδου του ινδικού πολιτισμού που γνωρίζουμε ως κλασική περίοδος και που θα διήρκησε μέχρι και τα τέλη τον $8^{ο}$ αι. μ.Χ. Κατά την διάρκεια των 500 περίπου ετών που χαρακτηρίζονται ως κλασική περίοδος για την Ινδία, υπό την δυναστεία των Gupta και Harsha και των διαδόχων τους, σημειώθηκε ιδιαίτερη άνθηση των επιστημών, ιδρύθηκαν σπουδαία εκπαιδευτικά και ερευνητικά κέντρα όπως το πανεπιστήμιο Nalanda και αναδείχτηκαν σημαντικές προσωπικότητες των γραμμάτων, αλλά και ειδικότερα των μαθηματικών. Η μεγάλη αυτή ακμή φαίνεται να κάμπτεται από τον $8^{ο}$ μ.Χ. αιώνα μέχρι την ισλαμική επιδρομή στις αρχές του $10^{ου}$ αιώνα.

Ο **Daivajna Varāhamihira** (6ος αι. μ.Χ.) στο έργο του «Περί των 5 αστρονομικών θεωριών» (*Pancha-Siddhantika*) αναφέρεται σε πέντε Σιντχάντας[80], οι οποίες δεν σώζονται σήμερα, στην αρχική τους μορφή:

- στην Σούρια Σιντχάντα (*Surya-Siddhanta*)[81]
- στην Παϊταμάχα Σιντχάντα (*Paitamaha Siddhantas*), που φαίνεται να βασίζεται σε προγενέστερες πηγές και να σχετίζεται περισσότερο με την βεδική περίοδο,
- στις Πολίσα και Ρομάκα Σιντχάντας (*Paulisha και Romaka Siddhantas*) που είναι άμεσα βασισμένες στην ελληνιστική αστρονομία και
- στην Βασίστα Σιντχάντας (*Vasishta Siddhanta*).

Η χρονολόγηση των κειμένων αυτών δεν είναι κοινώς αποδεκτά ορισμένη. Από αυτά παλαιότερο θεωρείται το **Σούρια Σιντχάντα** (*Surya-Siddhanta*), αλλά όσο αφορά την μορφή στην οποία σώζονται σήμερα, εκτιμάται ότι στο σύνολό τους ανήκουν στους πρώτους αιώνες μ.Χ. Ενδεικτικά θα αναφερθούμε σε έναν από τους κανόνες της **Πολίσα Σιδχάντα** (*Paulisha Siddhantas*) όπως αυτός παρουσιάζεται μεταξύ άλλων από τον G.R.Kaye[82]:

«Η τετραγωνική ρίζα του δέκατου μέρους του τετραγώνου της περιφέρειας, η οποία περιέχει 360 μέρη, είναι η διάμετρος».

Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, και θεωρώντας C, d ως την περιφέρεια και την διάμετρο αντίστοιχα ενός κύκλου, ο κανόνας δίνει την εξής σχέση:

$$\sqrt{\frac{C^2}{10}} = d \Leftrightarrow \frac{C}{\sqrt{10}} = d \Leftrightarrow \frac{C}{d} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \pi_2 = \sqrt{10}$$

6.2 Η ARYABHATYA – – ΣΧΟΛΙΑ ΤΟΥ BHASKARA I

Το προγενέστερο και πλήρως διασωσμένο έργο που κατατάσσετε στις Σιντχάντα, αν και διαφοροποιείται σε αρκετά σημεία από τις άλλες, είναι αυτό του **Aryabhata** που γνωρίζουμε ότι γεννήθηκε το 476 μ.Χ.

Το κείμενο αυτό, που φέρει το όνομά του και γράφτηκε όπως σημειώνει ο ίδιος όταν ήταν σε ηλικία 23 ετών, δηλαδή το 499 μ.Χ, έμεινε γνωστό ως **Aryabhatiya** και κατέχει εξέχουσα θέση στην ινδική γραμματεία της κλασικής περιόδου ενώ σίγουρα αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά κείμενα του ινδικού πολιτισμού για την αστρονομία και τα μαθηματικά.

---

[80] Τα κείμενα αυτά αναφέρει και ο Άραβας μαθηματικός του $11^{ου}$ αι. Al-Biruni.

[81] Στην Surya-Siddhanta σώζεται ο πρώτος πίνακας ημιτόνων σε μορφή που ταυτίζεται με την σύγχρονη αντίστοιχη μαθηματική έννοια.

[82] G.R.Kaye, «Indian mathematics», Issis, vol.2, 1914.

Είναι γραμμένο σε έμμετρο λόγο και αποτελείται συνολικά από μόνο 108 στροφές πυκνού νοήματος. Στις στροφές αυτές συνοψίζονται οι βασικοί κανόνες λογισμού στην αστρονομία και τα μαθηματικά κατά τρόπο που δίνει την εντύπωση πως γίνεται αναφορά σε ήδη γνωστά θέματα, στα οποία έχει να προσθέσει δικές του προεκτάσεις ή διορθώσεις, χωρίς ωστόσο να αναφέρονται ξεκάθαρα οι πηγές του και χωρίς να δικαιολογούνται οι κανόνες ή τα αποτελέσματα που παραθέτονται.

Το **Aryabhatiya** χωρίζεται σε τέσσερα μέρη:

1. Gitikapada : **Εισαγωγή** στην οποία αναφέρεται σε μία δικιά του αριθμητική αναπαράσταση θεσιακού δεκαδικού συστήματος με γράμματα, έτσι ώστε τα σύμφωνα να αναπαριστούν ψηφία και τα φωνήεντα να προσδιορίζουν την δύναμη του δέκα. Επίσης δίνεται συνοπτικός πίνακας ημιτόνων.

2. Ganitapada : **Μαθηματικό περιεχόμενο** στο οποίο περιλαμβάνονται μέθοδοι υπολογισμών και επίλυσης εξισώσεων, και αυτά που στην συνέχεια θα μας απασχολήσουν. Δηλαδή, ο υπολογισμός της επιφάνειας του κύκλου, του όγκου της σφαίρας και ο υπολογισμός του λόγου της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρο του.

3. *Kalakriyapada* : Δηλαδή, *«***Υπολογισμός χρόνου***»*. Εδώ συναντάμε την υποδιαίρεση σε ημέρες, μήνες, χρόνους, σε σχέση με την κίνηση των πλανητών καθώς και την χρήση του συστήματος των έκκεντρων κύκλων και των επικύκλων του Ιππάρχου.

4. *Golapada* : Δηλαδή, *«***Σφαίρα***»*. Εδώ υποστηρίζεται μεταξύ άλλων ότι η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της, υπολογίζονται εκλείψεις και λύνονται προβλήματα τριγωνομετρίας.

Η Aryabhatiya είναι το πρώτο κείμενο στο οποίο αφιερώνεται ξεχωριστό κεφάλαιο στα μαθηματικά. Αξίζει δε να παρατηρήσουμε ότι στο δεύτερο μέρος του έργου, παρουσιάζονται μαθηματικές γνώσεις που δεν χρησιμοποιούνται στις αστρονομικές εφαρμογές. Το κείμενο αυτό μελετήθηκε και σχολιάστηκε από πληθώρα μελετητών του ινδικού αλλά και του αραβικού χώρου. Εμείς θα επικεντρωθούμε στο δεύτερο αυτό μέρος, όπου συγκεντρώνονται τα περισσότερα μαθηματικά που περιλαμβάνει το κείμενο, εστιάζοντας σε αυτά που αφορούν την μέτρηση του κύκλου, ενώ παράλληλα θα αναφερθούμε στον σχολιασμό που έγινε σ' αυτά από τον ινδό μαθηματικό **Bhāskara I**[83].

Ο Bhaskara I, που έδρασε ενάμιση αιώνα μετά τον Aryabhata, υπήρξε ο σημαντικότερος αστρονόμος και μαθηματικός της σχολής του, αλλά και ένας από τους σημαντικότερους της κλασικής περιόδου. Τα σχόλιά του στην Aryabhatiya που γράφτηκαν το 629 μ. Χ., είναι τα πρώτα σχόλια που σώζονται μέχρι σήμερα και η μετάφραση[84] που θα δώσουμε στηρίζεται στην δικιά του ερμηνεία. Αν και για την ζωή του γνωρίζουμε ελάχιστα, η συμβολή του στην ανάπτυξη των μαθηματικών, είναι σπουδαία όχι μόνο διότι τόσο επιμελώς ερμήνευσε το ιστορικά σημαντικό αυτό κείμενο αλλά και διότι στο άλλο έργο του, **Mahabhaskariya**, συναντάμε σημαντικά μαθηματικά βήματα εξέλιξης.

[83] Ο προσδιορισμός «πρώτος», συνηθίζεται για να μην συγχέεται με τον μεταγενέστερο και ομώνυμο αστρονόμο του 12ου αι. μ.Χ., που αντίστοιχα καταγράφεται ως Bhaskara II.

[84] A. Keller, «*Expounding the Mathematical Seed.: The Translation: A Translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya*», Vol. 1,(2006)

6.2.1 ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΟΥ – ΌΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ στην Aryabhatiya

Στην 7η στροφή του δεύτερου μέρους της Aryabhatiya, συναντάμε τον υπολογισμός της επιφάνειας του κύκλου μαζί με αυτόν του όγκου της σφαίρας:

(2.7αb) samapariṇāhasyārdhaṃ viṣkambhārdhahatam eva vṛttaphalam|
(2.7cd) tan nijamūlena hataṃ ghanagolaphalaṃ niravaśeṣam||

Μετάφραση:

(2.7ab) ***Το μισό της ομαλής περιφέρειας πολλαπλασιασμένο με την ημιδιάμετρο, μόνο, είναι η επιφάνεια του κύκλου***
(2.7cd) ***Αυτό πολλαπλασιασμένο με την ρίζα του, είναι ο όγκος του κυκλικού στερεού, χωρίς υπόλοιπο.***

Σύγχρονη απόδοση :

Το πρώτο μέρος αυτής της στροφής περιγράφει την σωστή σχέση:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}} \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}}$$

ενώ στο δεύτερο μέρος φαίνεται να λέει ότι ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με το εμβαδό του μέγιστου κύκλου της επί την τετραγωνική ρίζα αυτού του εμβαδού, χωρίς να θεωρεί ότι ο υπολογισμός αυτός είναι προσεγγιστικός. Με σύγχρονο συμβολισμό θα λέγαμε ότι υποστηρίζει ότι ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\cdot\sqrt{\mathbf{E}} \quad \text{ή αλλιώς} \quad \mathbf{V^2} = \mathbf{E^2}\cdot\mathbf{E}$$

Από τα σχόλια του Bhāskara I [85]**:**

Ο Bhāskara σημειώνει ότι στο πρώτο μέρος (2.7ab) η λέξη «μόνο» (***eva***) χρησιμοποιείται είτε για να συμπληρώσει την δομή του στίχου, είτε επειδή ο Aryabhata θεωρεί ότι η μέθοδος αυτή για τον υπολογισμό του εμβαδού είναι μοναδική. Στην συνέχεια συμπληρώνει ότι κάποιος που μπορεί να φέρει αντίρρηση, μπορεί να πει ότι υπάρχει και άλλη μέθοδος: αυτή που λέει ότι το ***«το τετράγωνο της ημιδιαμέτρου επί τρία»*** δίνει το επίσης το εμβαδό. Όμως **αυτή η μέθοδος είναι προσεγγιστική** και άρα ο ακριβής υπολογισμός είναι μόνο αυτός που δίνεται από τον στοίχο 2.7ab.

Εν' ολίγης ο Bhāskara σημειώνει ότι

- χρησιμοποιείται (με σύγχρονους όρους) και ο τύπος $\mathbf{E = 3\left(\frac{d}{2}\right)^2}$
- η σταθερά αυτού του τύπου, δηλαδή το $\pi_2 = 3$, είναι προσέγγιση.

Για το δεύτερο μέρος (2.7cd) και την φράση «χωρίς υπόλοιπο» (***niravaśesam***), Bhāskara σημειώνει απλά ότι αυτό σημαίνει ότι ο υπολογισμός είναι ακριβής (πράγμα που βέβαια δεν ισχύει) σε αντίθεση με μία άλλη μέθοδο που αφήνει υπόλοιπο. Η άλλη

---

[85] Keller, A., (2006) «*Expounding the Mathematical Seed, Volume 1: The Translation: A Translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya*», Science Networks. Historical Studies

αυτή μέθοδος είναι η εξής: ***«Αν κάποιος πάρει το μισό του κύβου της διαμέτρου πολλαπλασιασμένο επί εννιά, παίρνει τον όγκο της σφαίρας»***

Δηλαδή ο Bhāskara:

- δεν διορθώνει τον ισχυρισμό του δασκάλου του για τον όγκο της σφαίρας
- αναφέρει ότι χρησιμοποιείται (με σύγχρονους όρους) και ο τύπος $\mathbf{V}=\frac{9}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^3$
- θεωρεί ότι η τελευταία αυτή μέθοδος είναι προσεγγιστική.

Παρατηρήσεις :

Η μέθοδος για το εμβαδό του κύκλου είναι η σωστή μέθοδος που ξέρουμε ότι χρησιμοποιούνταν την ίδια περίοδο και στην Κίνα. Αντίστοιχη σχέση είδαμε ότι χρησιμοποιείτο (για το ημικύκλιο) και σε βαβυλωνιακές πινακίδες, ενώ η αυστηρή της απόδειξη γίνεται με την μέθοδο της εξάντλησης στο «Κύκλου Μέτρησις» του Αρχιμήδη. Το πώς προκύπτει η γνώση αυτής της μεθόδου, ωστόσο δεν αναφέρεται ούτε από τον Aryabhata, ούτε από τον Bhāskara.

Η μέθοδος που δίνεται για τον όγκο της σφαίρας, δεν είναι σωστή, αλλά παρατηρούμε ότι γίνεται μία προσπάθεια συσχέτισης του όγκου με το εμβαδό. Φαίνεται ότι ο όγκος υπολογίζεται από το εμβαδό κατά τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που υπολογίζεται το εμβαδό από τα μήκη του εκάστοτε σχήματος, κάτι που οδηγεί σε λανθασμένο συμπέρασμα και σε άλλη πρόταση στο ίδιο έργο[86]. Ανάλογοι συσχετισμοί παρατηρούνται και σε κινέζικα κείμενα της ίδιας περιόδου.

Οι δύο αντίστοιχοι τύποι πληροφορούμαστε ότι χρησιμοποιούνταν από τον Bhaskara, αν συσχετιστούν με τους σύγχρονους τύπους που ισχύουν για το εμβαδό κύκλου και τον όγκο σφαίρας αντίστοιχα, δίνουν $\boldsymbol{\pi_1 = 3}$ και $\boldsymbol{\pi_3 = \frac{27}{8} = 3{,}375}$.

6.2.2 ΣΧΕΣΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ - ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ στην Aryabhatiya

Στην 10η στροφή του δεύτερου μέρους της Aryabhatiya, συναντάμε τον γνωστό υπολογισμό του Aryabhata για τον λόγο της περιφέρειας προς την διάμετρο ενός κύκλου, δηλαδή τον υπολογισμό αυτού που έχουμε ορίσει ως π_1:

(2.10) caturadhikaṃ śatam aṣṭaguṇaṃ dvāṣaṣṭis tathā sahasrāṇām|
ayutadvayaviṣkambhasyāsanno vṛttapariṇāhaḥ||

Μετάφραση:

Το εκατό αυξημένο κατά τέσσερα, πολλαπλασιασμένο επί οκτώ
και ακόμα εξήντα δύο χιλιάδες |
είναι η προσέγγιση της περιφέρειας ενός κύκλου με διάμετρο δύο δεκάδες χιλιάδες. ||

Σύγχρονη απόδοση :

Αν d = 20000 τότε $C \cong (100 + 4) \cdot 8 + 62000 = 62832$,

δηλαδή με τη μορφή λόγου έχουμε ότι $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{d}} \cong \frac{\mathbf{62832}}{\mathbf{20000}}$ ή αλλιώς $\boldsymbol{\pi_1 \cong 3{,}1416}$

[86] Όταν ο όγκος κανονικής τριγωνικής πυραμίδας προκύπτει ως το ½ του γινομένου του εμβαδού της βάσης επί το ύψος.

<u>Από τα σχόλια του Bhāskara I</u> [87]**:**

Όπως παρατηρήσαμε και στα προηγούμενα σχόλια του, συνηθιζόταν ο διαχωρισμός σε ακριβείς και προσεγγιστικές τιμές ή σταθερές. Εδώ λοιπόν που γίνεται λόγος για «προσέγγιση» (***āsana***)[88] της τιμής της περιφέρειας, ο Bhāskara φροντίζει να σημειώσει, αν και αυτό όπως ο ίδιος λέει είναι προφανές, ότι πρόκειται για προσέγγιση της ακριβούς τιμής και όχι της προσεγγιστικής. Αν ωστόσο κάποιος αναρωτιέται γιατί δεν δίνεται η ακριβής τιμή της περιφέρειας, αντί για μία προσέγγισή της, η απάντηση που δίνεται από τον σχολιαστή είναι η εξής:

«Θεωρείται ότι ισχύει το εξής: Δεν υπάρχει μέθοδος υπολογισμού της ακριβούς τιμής της περιφέρειας (ενός κύκλου με γνωστή διάμετρο)»

Προκειμένου να υποστηρίξει τον ισχυρισμό του παραθέτει μεταξύ άλλων έναν κανόνα που αποδίδεται σε μία άλλη, προγενέστερη παράδοση και στην συνέχεια τον αντικρούει. Συγκεκριμένα αναφέρει τον εξής κανόνα:

«Η ρίζα του δεκαπλάσιου τετραγώνου της διαμέτρου
είναι η περιφέρεια του κύκλου»

<u>Σύγχρονη απόδοση</u> : $\mathbf{E}=\sqrt{10 \cdot d^2}$, δηλαδή $\pi_1=\sqrt{10}$

Αν και υποστηρίζει ότι θα αποδείξει τον αρχικό του ισχυρισμό, το μόνο που τεκμηριώνει είναι ότι και η παραπάνω τιμή δεν είναι ακριβής.

Συνοψίζοντας, ο Bhāskara στο σχόλιό του:

- Δεν σημειώνει πώς προέκυψε η προσεγγιστική τιμή $\pi_1 \cong 3{,}1416$ από τον Aryabhata.
- Δηλώνει ότι δεν υπάρχει ακριβής τιμή για το π_1, χωρίς να το τεκμηριώνει.
- Αναφέρει ότι χρησιμοποιείται (με σύγχρονους όρους) και ο τύπος $\mathbf{E}=\sqrt{10 d^2}$
- Δεν σημειώνει πώς προέκυψε η τιμή προσέγγιση $\pi_1 = \sqrt{10}$
- Δείχνει ότι η τιμή $\sqrt{10}$ για την περιφέρεια ενός κύκλου με μοναδιαία διάμετρο, δεν είναι ακριβής. Δηλαδή δείχνει, ότι το $\pi_1=\sqrt{10}$ είναι προσεγγιστικό.
- Δεν δείχνει ωστόσο, γιατί η αντίστοιχη τιμή του Aryabhata, $\pi_1 \cong 3{,}1416$ είναι καλύτερη προσέγγιση της ακριβούς τιμής.

<u>Παρατηρήσεις</u> :

Μέχρι σήμερα, δεν έχουμε αρκετά στοιχεία για το πώς προέκυψαν οι τιμές αυτές, αν και πολλές δημοσιεύσεις προτείνουν διαφορετικές ανακατασκευές με την χρήση πάντα εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων. Θα σημειώσουμε απλώς ότι η τιμή $\sqrt{10}$ σχετίζεται κυρίως με την ελληνιστική αλλά και την τζαϊνιστική[89] παράδοση στην Ινδία.

---

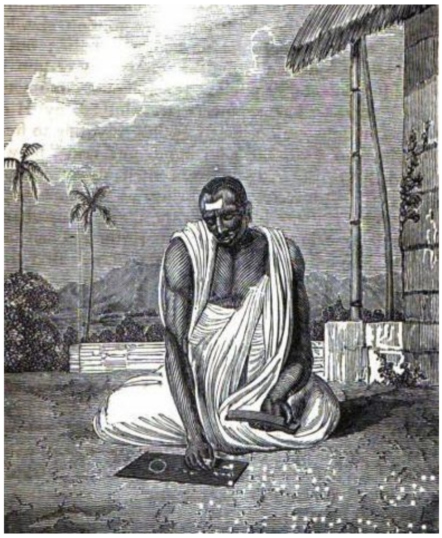
[87] Keller, A., (2006) «*Expounding the Mathematical Seed, Volume 1: The Translation: A Translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya*», Science Networks. Historical Studies

[88] Η λέξη ***āsana*** εντοπίζεται ως τελευταίο συνθετικό της πρώτης λέξης του δεύτερου στίχου.

[89] Ο τζαϊνισμός είναι θρησκεία που από τον 6^{o} αι. π.Χ. αποτελεί παρακλάδι της ινδουιστικής θρησκείας.

Την τιμή αυτή όπως θα δούμε στην συνέχεια χρησιμοποιούσε ως ακριβή και ο σπουδαίος μαθηματικός Brachmagupta.

6.3 ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ BRACHMAGUPTA



Ο **Brachmagupta** γεννήθηκε το 598 μ.Χ. και υπήρξε σύγχρονος του Bhāskara I. Μεταξύ άλλων, το 628 μ.Χ έγραψε και αυτός σιντχάντα με αστρονομικό και μαθηματικό περιεχόμενο που φέρει το όνομα ***Brahmasphutasiddhānta*** η οποία επίσης μεταφράστηκε στα Αραβικά και αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης για τους μεταγενέστερους αστρονόμους.

Υπάρχουν σημαντικότατες παρατηρήσεις που θα μπορούσαμε να κάνουμε για το μαθηματικό αυτό έργο, όπως για παράδειγμα ότι σ' αυτό συναντάμε για πρώτη φορά τη χρήση του μηδενός ως αριθμού, ενώ γίνονται πράξεις με αρνητικούς αριθμούς. Ωστόσο εδώ θα περιορίσουμε την αναφορά μας στον κανόνα που αφορά την μέτρηση του κύκλου και περιέχεται στο δωδέκατο μέρος του έργου αυτού:

***Brahmasphutasiddhānta,* 12.40 :**

«Η διάμετρος και το τετράγωνο της ακτίνας πολλαπλασιασμένα με το 3 είναι (αντίστοιχα) η πρακτική περιφέρεια και το εμβαδόν (του κύκλου). Οι ακριβείς (τιμές) είναι οι τετραγωνικές ρίζες των τετραγώνων αυτών των δύο πολλαπλασιασμένων με 10.»

Σύγχρονη απόδοση :

	Πρακτική τιμή	Ακριβής τιμή
Περιφέρεια:	$\mathbf{3 \cdot d}$	$\sqrt{\mathbf{10 \cdot d^2}}$
Εμβαδόν:	$\mathbf{3 \cdot r^2}$	$\sqrt{\mathbf{10 \cdot (r^2)^2}}$

Δηλαδή ο Brachmagupta θεωρεί σωστά ότι $\boldsymbol{\pi_1 = \pi_2 = 3}$, είναι μία προσεγγιστική σταθερά και λανθασμένα αντίστοιχα ότι $\boldsymbol{\pi_1 = \pi_2 = \sqrt{10}}$ είναι η ακριβής σταθερά.

7. Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΣΤΗΝ ΚΙΝΑ

Γνωρίζουμε ότι μέχρι το διάστημα που το έργο «**Εννέα Κεφάλαια**», πήρε την τελική του μορφή γύρω στον 1^{ο} αιώνα π.Χ. και τον 1^{ο} αιώνα μ.Χ. οι αρχαίοι Κινέζοι μετρούσαν την περιφέρεια του κύκλου σε σχέση με την διάμετρο ως 3:1., ή όπως αναχρονιστικά θα λέγαμε, η τιμή του π θεωρείτο ίση με 3.

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε σε Κινέζους μαθηματικούς που επιχείρησαν ο καθένας με διαφορετικά αποτελέσματα να βελτιώσουν την προσέγγιση 3:1, όπως αυτοί αναφέρονται στα «Αρχεία της Δυναστείας Sui»[90], ενώ θα σταθούμε ιδιαίτερα στους σχολιασμούς που έγιναν στο πρόβλημα 32, που αναφέραμε, σχετικά με την μέτρηση του κύκλου.

7.1 ΜΙΑ ΑΚΟΜΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΑΡΧΑΙΑ ΠΗΓΗ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΕΙ ΤΟ $\pi = 3$

周髀算经 **(Zhou bi suan jing** ή **Chou Pei)**

Το έργο αυτό αν και φτάνει σε μας, από αντιγραφές σχολιαστών όπως συμβαίνει με τα **«Εννέα Κεφάλαια»**, θεωρείται προγενέστερο και έχει, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα αρχαία κινέζικα κείμενα, την μορφή διαλόγου.

Συγκεκριμένα στο κείμενο που σώζεται συμπεριλαμβάνονται τα σχόλια των **Zhao Shuang** (3ος αι.), **Zhen Luan** (5ος αι.) και **Li Chunfeng** (6ος αι.). Στον τελευταίο οφείλεται η τελική μορφή του κειμένου, προκειμένου να συμπεριληφθεί «διορθωμένο» στην λίστα με τα κλασικά κείμενα το 656 μ.Χ. Πολύ αργότερα το κείμενο τυπώθηκε και σήμερα σώζεται μία τυπωμένη έκδοση του 12ου αι.

Αν και περιλαμβάνει μαθηματικές έννοιες με ιδιαίτερο ιστορικό ενδιαφέρον (π.χ. είναι το πρώτο κείμενο στο οποίο εμφανίζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα[91]), δεν έχει αμιγώς μαθηματικό περιεχόμενο. Το έργο περιλαμβάνει αρκετά μυθολογικά στοιχεία και πραγματεύεται μία αρχαία κινέζικη κοσμογονική θεωρία, άμεσα συνδεδεμένη με την αστρονομία, οπότε και εμπλέκει μαθηματικούς υπολογισμούς, φωτίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τις αρχαιότερες αριθμητικές τεχνικές.

Η αρχαιότερη θεωρία για την κοσμική δομή είναι αυτή της τετράγωνης γης και του ουράνιου θόλου και σ' αυτήν αναφέρεται και το Zhou bi suan jing. Σύμφωνα με αυτήν την θεωρία, ο ουρανός είναι σφαιρικός και η γη είναι τετράγωνη. Ο άνθρωπος πάνω στην επίπεδη τετράγωνη γη παρατηρεί το εσωτερικό αυτής της σφαίρας, τον «ουράνιο θόλο», και τα ουράνια σώματα που κινούνται σε κυκλικές τροχιές.

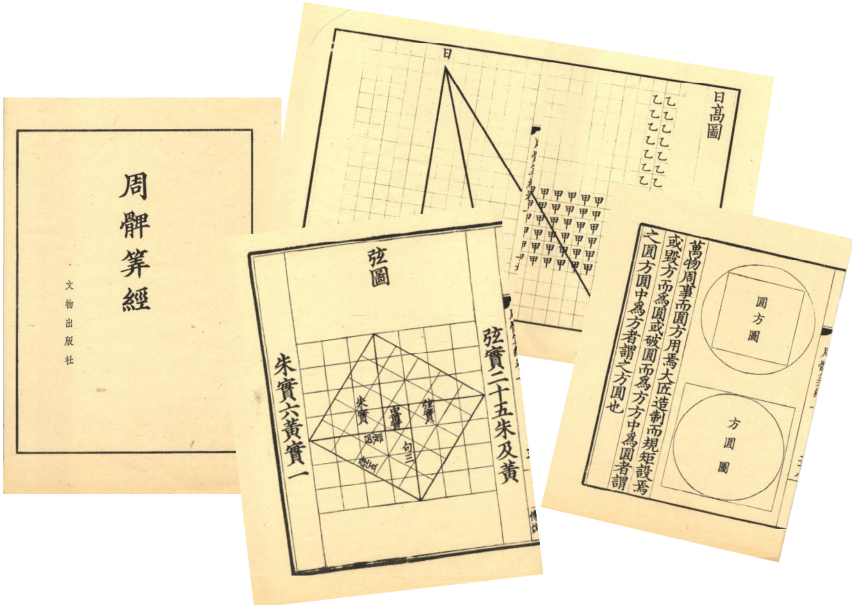
Σύμφωνα με αυτήν την θεωρία, ο ήλιος κινείται όλο το έτος σε κυκλική τροχιά ακολουθώντας επτά, διαφορετικής διαμέτρου, κυκλικά μονοπάτια (Qi Heng). Το εσωτερικό ή αλλιώς αυτό με την μικρότερη διάμετρο (αυτό που βρίσκεται πιο κοντά στην γη) ονομάζεται Nei Heng, δηλαδή «εσωτερικό μονοπάτι» και είναι η τροχιά πάνω στην οποία κινείται ο ήλιος κατά το θερινό ηλιοστάσιο (γύρω στις 23-23 Ιουνίου). Το εξωτερικό ονομάζεται αντίστοιχα Wai Heng, δηλαδή «εξωτερικό μονοπάτι και είναι η τροχιά πάνω στην οποία κινείται ο ήλιος κατά το χειμερινό ηλιοστάσιο (γύρω στις 23-23 Δεκεμβρίου). Το υπόλοιπο χρονικό διάστημα ο ήλιος κινείται σε τροχιές που ορίζονται από τα υπόλοιπα πέντε Qi Heng.

---

[90] Yoshio Mikami, "The development of mathematics in China and Japan", (1913)

[91] Στην βιβλιογραφία της ιστορίας των μαθηματικών για την Κίνα συχνά το Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρεται με την αντίστοιχη αρχαία κινέζικη ονομασία Κανόνας Gou-Gu.Gou λέγεται η μεγάλη κάθετη πλευρά και Gu αντίστοιχα η μικρή, σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Στο κείμενο προκειμένου να υπολογιστεί το μήκος των τροχιών αυτών του ήλιου, χρησιμοποιείται ως όργανο ο γνώμονας και οι μετρήσεις προκύπτουν από το μήκος της σκιάς που δημιουργεί ο ήλιος.



Σελίδες από τυπωμένη έκδοση του «Zhou bi suan jing» (1213)με τους γνωστούς σχολιασμούς.

<u>Απόσπασμα στο οποίο χρησιμοποιείται η αναλογία C:d =3:1</u> :

(...)
凡徑. 二十三萬八千里.
此夏至日道之徑也.
其周. 七十一萬四千里.
(...)
凡徑四十七萬六千里.
此冬至日道徑也.
其周百四十二萬八千里.
(...)

<u>Ελεύθερη απόδοση:</u>

(…)Στο χειμερινό ηλιοστάσιο η τροχιά του ήλιου έχει διάμετρο 238.000 μονάδες (li) και η περιφέρεια του αντιστοιχεί σε 714.000 μονάδες (li).
(…)Στο χειμερινό ηλιοστάσιο η τροχιά του ήλιου έχει διάμετρο 476.000 μονάδες (li) και η περιφέρεια του αντιστοιχεί σε 1.428.000 μονάδες (li).

<u>Παρατηρήσεις</u> :

Παρατηρούμε ότι δίνονται αντίστοιχα διάμετροι d1=238.000 και d2=476.000 και περιφέρειες C1=714.000 και C2=1.428.000, όπου ισχύει: $\boldsymbol{\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = 3}$

7.2 Κινεζοι Μαθηματικοι που Φαινεται οτι προτειναν διαφορετικες τιμες για το π

Liu Hsing (;) αρχές 1ου αι. μ.Χ.

Η πρώτη αναφορά σε μαθηματικό που διαφοροποιήθηκε από τα αρχαία κλασικά κείμενα όσον αφορά την μέτρηση του κύκλου, είναι για τον Liu Hsing (-23 μ.Χ.) Γνωρίζουμε ότι ασχολήθηκε με θέματα του ημερολογίου και πρότεινε το ημερολόγιο «San Tung». Δυστυχώς ωστόσο, δεν υπάρχουν ασφαλείς πληροφορίες για τον λόγο που χρησιμοποίησε ή για τον τρόπο με τον οποίο τον υπολόγισε.

Zhang Heng (張衡) τον 1ο αι. μ.Χ.

Ο Zhang Hen (78-139 μ.Χ.) υπήρξε μεταξύ άλλων σπουδαίος αστρονόμος, μαθηματικός και εφευρέτης. Έζησε στο δεύτερο μισό της Han Δυναστείας όπου και υπηρέτησε ως αυτοκρατορικός υπάλληλος. Είναι γνωστός για τις σπουδαίες εφευρέσεις που του αποδίδονται καθώς και για τις πρώτες γνωστές προσεγγίσεις του π που έχουν σωθεί στα κινέζικα μαθηματικά.

Συγκεκριμένα συγκρίνοντας τον μέγιστο ουράνιο κύκλο (ουράνιο ισημερινό) με την διάμετρό της γης συμπέρανε ότι όταν το πρώτο είναι 736 τότε το δεύτερο είναι 232. Δηλαδή θεώρησε ότι ο λόγος περιμέτρου προς διάμετρο είναι 736:232 και άρα με σύγχρονη ορολογία έδωσε στον αριθμό π την τιμή **3.1724**.

Παράλληλα στον ίδιο επιστήμονα αποδίδεται και η τιμή π = $\sqrt{10}$.

Wang Fan (王蕃) τον 3ο αι. μ.Χ.

Ο Wang Fan (227 —266 μ.Χ) αστρονόμος και μαθηματικός έζησε την περίοδο των Τριών Βασιλείων, στο Βασίλειο Wu και από διάφορες βιογραφικές και ιστορικές πηγές προκύπτει ότι ασχολήθηκε με την μέτρηση του κύκλου δίνοντας την δική του προσέγγιση για τον αμφισβητούμενο λόγο 3:1. Συγκεκριμένα μαθαίνουμε από τα ιστορικά αρχεία της Liu Song Δυναστείας, «Song shu», ότι: «αφού παρατήρησε ότι η διάμετρος ίση με 1 είναι λίγο μεγάλη για περίμετρο ίση με 3, διόρθωσε την περίμετρο σε 142 και την διάμετρο σε 45». Δηλαδή πρότεινε τον λόγο $\frac{142}{45}$ που αντιστοιχεί στην τιμή **π = 3, 1555**.

Άλλα στοιχεία δεν έχουμε για το πώς προέκυψε η τιμή αυτή. Διάφορες εικασίες έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς όπως και για τα χαμένα αποτελέσματα άλλων μαθηματικών αλλά είναι ως επί το πλείστον αστήριχτες.

Liu Hui (刘徽) τον 3^{o} αι. μ.Χ

Ο Liu Hui αποτελεί τόσο για την μέτρηση του κύκλου όσο και γενικότερα για την ιστορία των μαθηματικών στην Κίνα ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια. Για τον ίδιο γνωρίζουμε ελάχιστα πράγματα. Γνωρίζουμε την περίοδο και την περιοχή στην οποία έδρασε, και το έργο που άφησε πίσω του. Έζησε την ίδια περίοδο με τον Wang Fan αλλά στο βορειότερο από τα τρία Βασίλεια, το Βασίλειο Wei. Το όνομά του έχει συνδεθεί άρρηκτα με τα σχόλια του το 263 μ.Χ. στα «Εννέα Κεφάλαια» Σ' αυτόν επίσης αποδίδεται ένα μεταγενέστερο κλασικό κείμενο το «Hai-dao Suan-jing» (海岛算) στο οποίο δίνονται χρήσιμοι τρόποι για μετρήσεις μεγάλων διαστάσεων από απόσταση.

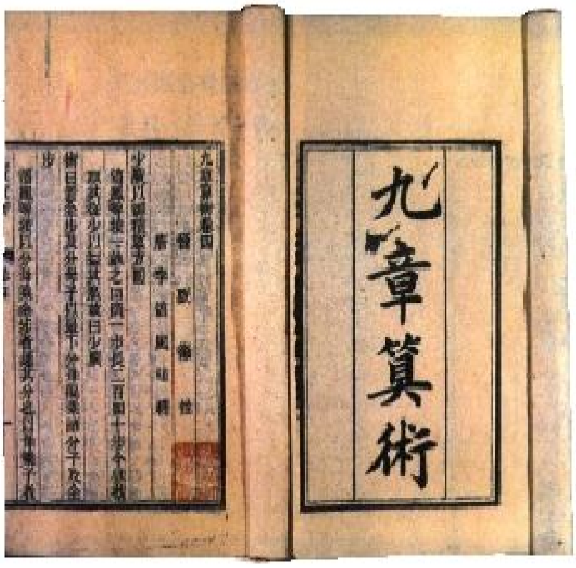
Η προσφορά του Liu Hui στην εξέλιξη των μαθηματικών στην Κίνα είναι ανεκτίμητη. Τα σχόλια του αποτελούν τομή σε σχέση με οποιοδήποτε προηγούμενο δείγμα κινέζικου μαθηματικού κειμένου. Το διαφορετικό στοιχείο που χαρακτηρίζει το έργο του και τον διαφοροποιεί από τους προγενέστερους μαθηματικούς είναι η φανερή του πρόθεση να δώσει πειστικά επιχειρήματα για το ότι η μεθοδολογία του στην επίλυση του εκάστοτε προβλήματος είναι σωστή. Ο τρόπος με τον οποίο το πετυχαίνει αυτό ο Liu δεν είναι σε καμία περίπτωση αυτό που γνωρίζουμε σήμερα ως απόδειξη. Ωστόσο η μεθοδικότητά του, η αναλυτική παρουσίαση, η συνοδευτική χρήση διαγραμμάτων (από τα οποία σώθηκαν δυστυχώς μόνο οι περιγραφές στο κείμενό του) δείχνουν το ότι, όπως και ο Ευκλείδης αλλά σε διαφορετικό πολιτισμικό πλαίσιο, θα πρέπει να υπήρξε ικανότατος δάσκαλος, ενώ τα συγγράμματά του υπήρξαν χρήσιμα μαθητικά εγχειρίδια βαρύνουσας σημασίας για μεγάλο χρονικό διάστημα στην Κίνα και την ευρύτερη περιοχή γύρω από αυτήν.

Ξεχωριστή θέση, μεταξύ των σχολιασμών του, κατέχει η μέθοδος την οποία προτείνει για την ακριβή μέτρηση του κύκλου και η διόρθωση του λόγου 3:1 που καλείται να σχολιάσει στο πρόβλημα 32 του πρώτου κεφαλαίου. Στην επόμενη παράγραφο θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τα σχόλια του Liu Hui στο πρόβλημα αυτό, όπως σώθηκαν από τον **Li Chunfeng** **(**李淳风**)** και τους συνεργάτες του, τον 7^{o} αι. μ.Χ, όταν του ζητήθηκε να διορθώσει τα κλασικά κείμενα προκειμένου να επανεκδοθούν για εκπαιδευτική χρήση.

Zu Chongzhi (祖冲之) τον 5^{o} αι. μ.Χ

Ο Zu Chongzhi μεταξύ άλλων, έμεινε στην ιστορία των κινέζικων μαθηματικών ως ο αστρολόγος μαθηματικός που πρότεινε την πιο ακριβή προσέγγιση για την τιμή του π. Από την ηλικία των 20 ετών διορίστηκε από τον αυτοκράτορα Liu Jun να υπηρετήσει στο Αυτοκρατορικό ινστιτούτο (Hualin Xueshen), το μεγαλύτερο ερευνητικό κέντρο του κράτους. Στο διάστημα αυτό, βασιζόμενος στο έργο και των προηγούμενων μελετητών, κυρίως σε αυτό του Liu Hui, κατέληξε στο ότι ο ζητούμενος λόγος βρίσκεται μεταξύ των τιμών 3.1215926 και 3.1415927, μία προσέγγιση που ξεπερνούσε κάθε άλλη της εποχής του. Λέγεται ότι στα έργα του χρησιμοποιούσε δύο τιμές για τον λόγο της περιφέρειας προς την διάμετρο. Μία «ανακριβή», το $\frac{22}{7}$ και μία «ακριβή» τον λόγο $\frac{355}{113}$.

7.3 ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.32 ΤΩΝ «ΕΝΝΕΑ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ»



Όπως είδαμε και πρωτύτερα το πρόβλημα στα «Εννέα κεφάλαια» έχει την εξής διατύπωση:

« Δίνεται ένα κυκλικό χωράφι, με περιφέρεια 181 bu και διάμετρο 60 1/3 bu.
Ποια είναι η επιφάνεια;
<u>*Απάντηση*</u>:
11mu 90 1/1 (τετραγωνικά) bu »
(Jiu Zhang Suan Shu)

Επειδή, όπως είπαμε 181 και 60 $\frac{1}{3}$ έχουν λόγο $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$, τα έξι πρώτα σχόλια (4 του Li Chunfeng και 2 του Liu), αφορούν τις διορθώσεις που θα μπορούσαν να γίνουν στις τιμές της εκφώνησης αλλά και σ' αυτήν της απάντησης, αν θεωρηθεί γνωστός κάποιος ακριβέστερος λόγος $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{d}}$.

Ο **Liu Hui** προτείνει τον λόγο $\frac{\mathbf{157}}{\mathbf{50}}$ και η ομάδα του **Li Chunfeng** προτείνουν ως «ακριβή» λόγο τον $\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{7}}$. Ο πρώτος στο σχόλιο που ακολουθεί θα εξηγήσει αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει ο λόγος που προτείνει, ενώ ο δεύτερος δεν αναφέρει τίποτα για τον λόγο που αποτελεί το Αρχιμήδειο άνω φράγμα και όπως φαίνεται, χρησιμοποιούταν ευρέως.

Το αρχαίο κείμενο συνεχίζει δίνοντας τέσσερεις διαφορετικές μεθόδους για τον υπολογισμό της κυκλικής επιφάνειας, στην κάθε μία από τις οποίες οι δύο γνωστοί σχολιαστές θα κάνουν ένα σχόλιο ο καθένας.

Εμείς εδώ θα εστιάσουμε στο εκτενές σχόλιο του Liu Hui, το οποίο πραγματεύεται μία καλύτερη προσέγγιση του λόγου της περιφέρειας προς την διάμετρο του κύκλου.

Ακολουθεί η ***μετάφραση***[92] του σχόλιου αυτού σε τονισμένη, πλάγια γραμματοσειρά (*με συμπληρώσεις του νοήματος εντός παρενθέσεων*) η οποία συνοδεύεται κατά διαστήματα από επεξηγήσεις με απλή γραμματοσειρά:

[92] Shen K., (1999), « The nine Chapters of the Mathematical Art», Oxford

«Παίρνοντας το μισό της περιφέρειας ως μήκος και την ακτίνα ως πλάτος, το γινόμενο τους δίνει την επιφάνεια σε *(τετραγωνικά)* ***bu. Αν δίνεται κύκλος με διάμετρο 2 chi, θεώρησε ένα κανονικό 6-γωνο εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Ο λόγος της διαμέτρου του κύκλου προς την περίμετρο είναι 1: 3.***

Επεξήγηση: Εδώ ο Liu παρατηρεί ότι ο λόγος που προϋποθέτει η εκφώνηση για την περίμετρο προς την διάμετρο, είναι σωστή για την περίμετρο του εγγεγραμμένου 6-γώνου προς την διάμετρο.

Στην συνέχεια θα επιχειρηματολογήσει συνοψίζοντας το περιεχόμενο της μεθόδου του, χωρίς την χρήση αριθμών, για να καταλήξει στο ότι η μεν 1^{η} μέθοδος, που προτείνει το αρχαίο κείμενο, είναι σωστή ο δε λόγος 3:1 είναι λάθος.

(1) Ξεκινάει δηλώνοντας:

«Όπως στο σχήμα, 3 φορές το γινόμενο της πλευράς του 6-γώνου επί την ακτίνα δίνει την επιφάνεια του 12-γωνου.

Διαιρώντας ξανά, τότε 6 φορές το γινόμενο της πλευράς του 12-γώνου επί την ακτίνα δίνει την επιφάνεια του 24-γωνου.»

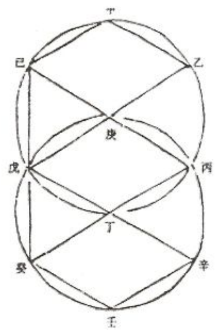
Επεξήγηση: Αυτό που υποστηρίζει, χωρίς περαιτέρω δικαιολόγηση εδώ ο Liu είναι ότι αν E_n, C_n και α_n συμβολίζουν αντίστοιχα το εμβαδό, την περίμετρο και την πλευρά ενός εγγεγραμμένου κανονικού n-γώνου, ισχύουν οι σχέσεις:

$E_{12} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} \times \alpha_6 \times R = 3 \times \alpha_6 \times R$ και αντίστοιχα

$E_{24} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{2}} \times \alpha_{12} \times R = 6 \times \alpha_{12} \times R$

και γενικότερα ισχύει η σχέση:

$E_{2n} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} \times \alpha_n \times R$ ή αλλιώς $E_{2n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \mathbf{C}_n \times R$



Το σχήμα στο οποίο αναφέρεται ο Liu Hui δεν σώζεται, όπως και κανένα άλλο δικό του σχήμα.

Ο Li Huang στα τέλη του 18ου αιώνα, στο έργο του *Jiu Zhang Suan Shu xi cao tu shuo,* έκανε λεπτομερή ανάλυση του αρχαίου κειμένου και των σχολίων του, αποκαθιστώντας κάποια από τα σχήματα του Liu Hui, όπως αυτό που φαίνεται στην εικόνα.

(2) Στην συνέχεια ισχυρίζεται ότι:

(α) «Όσο πιο λεπτά τα τμήματα *(ή αλλιώς όσο περισσότερες οι πλευρές)* ***που προκύπτουν από την διαίρεση, τόσο μικρότερη η απόκλιση*** *(η διαφορά της επιφάνειας του πολυγώνου από τον κύκλο).*

Διαιρώντας ξανά και ξανά μέχρι να μην είναι δυνατή άλλη διαίρεση, προκύπτει ένα κανονικό πολύγωνο του οποίου η περίμετρος συμπίπτει με την περιφέρεια του κύκλου, και η επιφάνειά του είναι αυτή του κύκλου, χωρίς να υπολείπεται κάποιο χωρίο.»

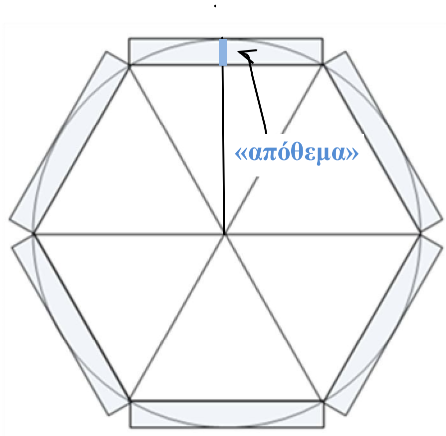
Επεξήγηση:

Δηλαδή η διαφορά του πολυγώνου με τον κύκλο μειώνεται όσο αυξάνονται οι πλευρές του και η περίμετρός του τείνει να συμπέσει με την περιφέρεια του κύκλου.

Αλλιώς με σύγχρονη ορολογία, αν C η περιφέρεια του κύκλου, θα λέγαμε ότι το C_n τείνει στο C.

Ο Liu Hui συνοδεύει τον ισχυρισμό αυτό με την παράγραφο που ακολουθεί, στην οποία αναφέρει ότι ο κύκλος (ως εμβαδό) βρίσκεται μεταξύ δύο άλλων χωρίων: μεταξύ του εκάστοτε εγγεγραμμένου πολυγώνου και του ίδιου του πολυγώνου όταν σ' αυτό έχουν προστεθεί κάποια κατάλληλα παραλληλόγραμμα.

(β) «Έξω από το** (κάθε) **κανονικό πολύγωνο υπάρχει ένα «απόθεμα». Το γινόμενο της πλευράς του πολυγώνου με το απόθεμα αυτό, δίνει μία επιφάνεια** (παραλλ/άμμου) **που υπερέχει** (του αντίστοιχου τμήματος του κύκλου)**.»



***« Όσο περισσότερες πλευρές, του πολυγώνου, το υπόλοιπο αυτό δεν υπάρχει πια** (δεν περισσεύει πια τμήμα της διαμέτρου) **και έτσι το πολύγωνο** (μαζί με τα παραλληλόγραμμα έξω από κάθε του πλευρά) **δεν υπερέχει πια** (της επιφάνειας) **του κύκλου**.»*

Επεξήγηση:
Αυτό που λέει εδώ ο Liu Hui είναι ότι η επιφάνεια του κύκλου είναι μικρότερη από αυτή του εγγεγραμμένου πολυγώνου αν στην τελευταία προστεθούν τα παραλληλόγραμμα που φαίνονται στο σχήμα. Όταν λοιπόν οι πλευρές διπλασιαστούν αρκετές φορές και τα παραλληλόγραμμα συνεπώς μικρύνουν πολύ, η συνολική αυτή επιφάνεια (του πολυγώνου μαζί με τα παραλληλόγραμμα) θα πλησιάζει πολύ στην επιφάνεια του κύκλου.

(3) Διατυπώνει τον γενικό κανόνα σε σχέση με αυτά που δήλωσε στο βήμα (1), για το εμβαδό του 12-γωνου και του 24-γωνου:

«Πάρε την περίμετρο** (του εγγεγραμμένου ν-γώνου) **και πολλαπλασίασε την με την ακτίνα: σύγκρινε την επιφάνεια** (που προέκυψε από το γινόμενο) **με την επιφάνεια του πολυγώνου που έχει διπλάσιες το πλήθος πλευρές** (του 2n-γώνου)**: είναι διπλάσια.»

Επεξήγηση:
Δηλαδή αυτό που ήδη συμπεράναμε στο βήμα (1) ότι εννοούσε, για την σχέση που συνδέει το εμβαδόν ενός κανονικού εγγεγραμμένου $3\times 2^{\kappa}$-γωνου, με την περίμετρο του $3\times 2^{\kappa-1}$-γωνου:

$$E_{2n} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} \times \alpha_n \times R \qquad \text{ή αλλιώς} \qquad E_{2n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\, \mathbf{C}_n \times R$$

Η σχέση αυτή θα αποτελέσει την βασική αρχή για την μέθοδο του Liu Hui και γι' αυτό το λόγο αναφέρθηκε στην εισαγωγή του σχολίου, στο (1) με δύο συγκεκριμένα παραδείγματα και ένα χαμένο σχήμα. Το (1) λοιπόν χρησίμευσε στο να γίνει κατανοητό αυτό που θέλει να γενικεύσει στην συνέχεια, κάνοντας την ροή του κειμένου σήμερα να φαίνεται ανακόλουθη.

(4) Χρησιμοποιώντας τώρα την γενική αρχή που διατύπωσε τελικά στο (3) βήμα και τον διπλό ισχυρισμό του βήματος (2), καταλήγει στην εξήγηση της σχέσης που δίνεται ως μέθοδος από το αρχαίο κείμενο:

«Γι' αυτό ισχύει *(ο κανόνας)*: ***«Το γινόμενο της μισής περιφέρειας επί την ακτίνα δίνει την επιφάνεια του κύκλου*** *(τετραγωνικά)* ***bu»***

Επεξήγηση: Δηλαδή αφού $E_{2n} = \frac{1}{2} C_n \times R$ και «για όσο περισσότερα n» το C_n τείνει στο C (λόγω του (2α)) και το E_{2n} τείνει στο E του κύκλου (από το (2β)), θα προκύψει ότι:

$$E = \frac{1}{2} C \times R$$

Τελικά ο Liu Hui κλείνει την εισαγωγή του συμπεραίνοντας τα εξής:

«Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, η ακριβής τιμή της περιμέτρου δεν είναι 3 αν η διάμετρος είναι 1. Όταν λέμε ότι η περίμετρος είναι 3 μιλάμε τελικά για την περίμετρο ενός 6-γώνου *(με διάμετρο 1)*. ***Το λάθος που γίνεται είναι παρόμοιο με το λάθος που προκύπτει αν η χορδή αντικαταστήσει το τόξο*** *(που δεν συμπίπτουν ποτέ)*.

Η παράδοση αυτή, ωστόσο, έχει περάσει από γενιά σε γενιά και κανένας δεν ενδιαφέρθηκε να την ελέγξει. Ακολουθώντας την παράδοση των προγόνων τους οι μαθητές μάθαιναν την λανθασμένη αρχαία αυτή μέθοδο, που επικράτησε. Χωρίς πειστική δικαιολόγηση είναι δύσκολη η αποδοχή.

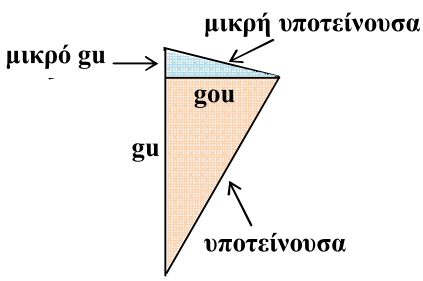
Γενικά τα σχήματα είναι είτε καμπυλόγραμμα είτε ευθύγραμμα. Η μελέτη των σχέσεων ενός κύκλου και του περιγεγραμμένου τετραγώνου μπορεί να οδηγήσει σε ευρύτερες εφαρμογές.

Ας εξακριβώσουμε τα δεδομένα αυτά με διαγράμματα για πιο ακριβή προσδιορισμό των σχέσεων. Ισχυρισμοί χωρίς τεκμηρίωση δεν είναι ισχυροί, οπότε οι σημειώσεις δίνονται ακολούθως σε έκταση.»

Αφού όπως είδαμε έδειξε με τον προηγούμενο τρόπο ότι η $1^η$ μέθοδος του κειμένου είναι σωστή ενώ ο λόγος λανθασμένος, προχωράει στον υπολογισμό ενός λόγου που να πλησιάζει περισσότερο στις αληθινές τιμές της περιμέτρου και της διαμέτρου.

<u>Σημειώσεις</u>:

1) Το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι γνωστό την περίοδο που ο Liu Hui συγγράφει τα σχόλιά του και αποκαλείται **μέθοδος «gou-gu»** παίρνοντας το όνομά της από της δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που καλούνται gou και gu αντίστοιχα. Συγκεκριμένα το **gu** αναφέρεται στο **ύψος** (ή αλλιώς τον γνώμονα) και το **gou** αναφέρεται στην **βάση** (ή αλλιώς την σκιά του γνώμονα).



Στα σχήματά τους οι κινέζοι δεν χρησιμοποιούσαν γράμματα και οι διατυπώσεις τους ήταν περιφραστικές. Όταν υπήρχαν, όπως στην περίπτωση που θα συναντήσουμε τώρα, παραπάνω από δύο τρίγωνα, χρησιμοποιούσαν επίθετα για να προσδιορίσουν σε ποιο gou ή gu αναφέρονται (μικρό gou κ.τ.λ.).

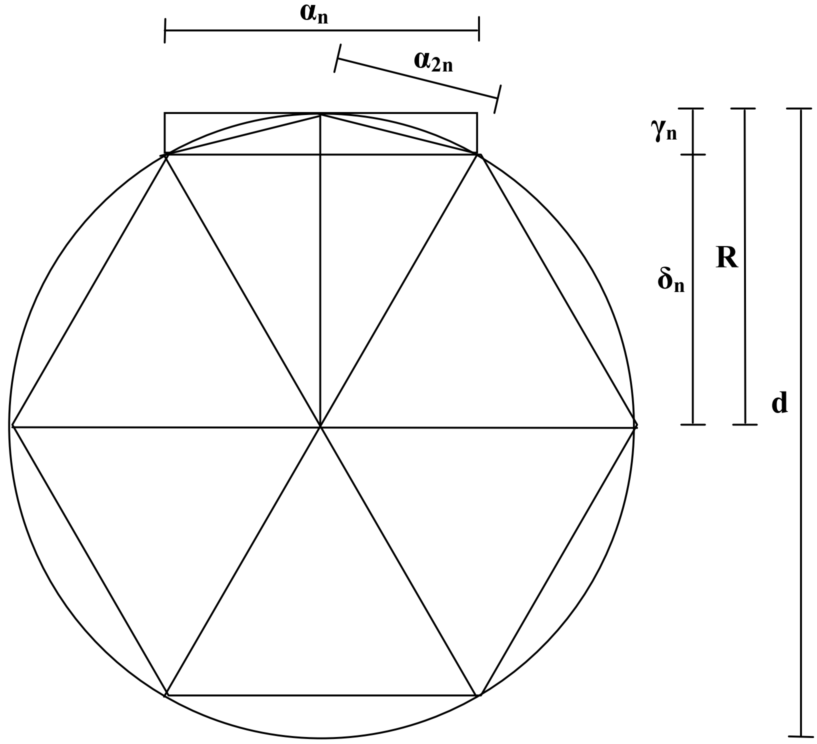
2) Για να παρακολουθήσουμε τους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν για τον υπολογισμό του 12-γώνου από το 6-γωνο, αλλά και τους επόμενους (γενικότερα του $3\times 2^{\kappa}$-γωνου από το $3\times 2^{\kappa-1}$-γωνου) ας θεωρήσουμε με σύγχρονο συμβολισμό ότι σε κύκλο με ακτίνα R και διάμετρο d = 2R, για κάθε κανονικό εγγεγραμμένο n-γωνο, με $n = 3\times 2^{\kappa}$, έχουμε:

$\mathbf{E_n}$: εμβαδόν
$\boldsymbol{\alpha_n}$: πλευρά
$\mathbf{C_n}$: περίμετρος
$\boldsymbol{\gamma_n}$: απόθεμα

και

$\boldsymbol{\delta_n} = R - \gamma_n$,

όπως φαίνεται στο σχήμα.



Για συγκεκριμένο n, το 2n-γωνο θα είναι αυτό που έχει τις διπλάσιες πλευρές με αντίστοιχα στοιχεία:

$\mathbf{E_{2n}}$: εμβαδόν
$\boldsymbol{\alpha_{2n}}$: πλευρά

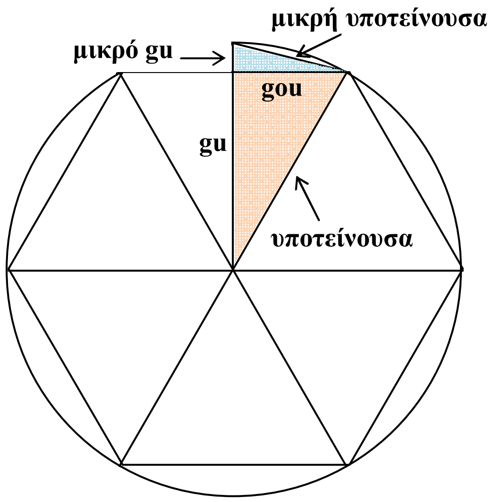
3) Στους υπολογισμούς χρησιμοποιείται η «μέθοδος gou-gu» σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.

Σε ένα μεγάλο (το κόκκινο του σχήματος), όπου:

«gu» : δ_n,
«gou» : $\alpha_n/2$
και **«υποτείνουσα»**: R

και σε ένα μικρότερο (το μπλε του σχήματος), όπου:

«μικρό gu» : γ_n,
«μικρό gou» ή «gou»: $\alpha_n/2$
και **«μικρή υποτείνουσα»**: α_{2n}



4) Τέλος να σημειώσουμε ότι πρόκειται για δεκαδικό θεσιακό σύστημα στο οποίο το μηδέν δεν αναγράφεται αλλά μένει κενό στην αντίστοιχη θέση.

Για τις μονάδες που συναντάμε ισχύει:
1 chi = 10 cun = 100 fen = 1.000 li = 10.000 hao = 100.000 miao = 1.000.000 hu
οπότε ο αριθμός για παράδειγμα 0,8660253 γράφεται:

8 cun, 6 fen, 6 li, (καθόλου *hao*)*, 2 miao και 5* $^{3}/_{10}$ *hu*

<u>Ο κανόνας υπολογισμού του 12-γωνου:</u>

«Έστω ότι η διάμετρος είναι 2 chi, και η ακτίνα, 1 chi, είναι η υποτείνουσα και το μισό της πλευράς του 6-γώνου *(που είναι κι αυτή 1 chi)*, ***5 cun είναι το gou, τώρα βρες το gu. Από το τετράγωνο της υποτείνουσας*** (*1 τετραγωνικό chi*) ***αφαίρεσε το τετράγωνο του gou, είναι 267.949.193.445*** (*τετραγωνικά*) ***hu και το αποτέλεσμα είναι 75*** (*τετραγωνικά*) ***cun. Βρες την τετραγωνική ρίζα μέχρι το miao ή το hu***[93] ***και ένα ψηφίο κάτω με δεκαδικό κλάσμα του μικρότερου ψηφίου π.χ.: $^2/_5$hu. Η ρίζα είναι 8 cun, 6 fen, 6 li, 2 miao και $5\,^2/_5$ hu, η οποία διαφέρει από την ακτίνα κατά 1 cun, 3 fen, 3 li, 9 hao, 7 miao και $4\,^3/_5$ hu. Ο τελευταίος αριθμός είναι το μικρό gu.*** **Αν το μισό της πλευράς του 6-γώνου είναι το μικρό gou,** ***βρες την μικρή υποτείνουσα. Το τετράγωνο της είναι 267.949.193.445*** (*τετραγωνικά*) ***hu, όπου το υπόλοιπο***[94] ***παραλήφθηκε.*** **Η τετραγωνική ρίζα, τώρα του τελευταίου, δίνει την πλευρά του** (*εγγεγραμμένου*) **12-γωνου.»**

<u>Επεξήγηση</u>:

Στον συγκεκριμένο υπολογισμό έχουμε **<u>n = 6</u>**, και θεωρούμε κύκλο ακτίνας **R=1.**

1) Αφού το εγγεγραμμένο πολύγωνο είναι εξάγωνο, έχουμε $\alpha_6 = R = 1$.

Οπότε ισχύει: $\frac{\alpha_6}{2} = 5\ cun$ (= **0,5**)

2) Στο μεγάλο τρίγωνο, έχουμε:

«υποτείνουσα»: R και **«gou»** : $\frac{\alpha_6}{2}$

Υπολογίζεται το τετράγωνο του «gu», δηλαδή του δ_6:

$$(\delta_6)^2 = R^2 - \left(\frac{\alpha_6}{2}\right)^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \text{ τετραγωνικά } cun \ (= \mathbf{0{,}75})$$

3) Εξάγεται η τετραγωνική ρίζα μέχρι το εκατομμυριοστό της μονάδας οπότε προκύπτει:

«gu» : $\delta_6 = 8\ cun,\ 6\ fen,\ 6\ li,\ 2\ miao$ *και* $5\,^2/_5\ hu = 866025\,^2/_5\ hu$ (= **0,8660254**)

4) Ισχύει:

$\gamma_6 = R - \delta_6 = 1\ cun,\ 3\ fen,\ 3\ li,\ 9\ hao,\ 7\ miao$ *και* $4\,^3/_5\ hu = 133974\,^3/_5\ hu$

(= **0,1339746**)

5) Στο μικρό τρίγωνο, έχουμε:

«μικρό gu» : γ_6 και **«μικρό gou»**: $\frac{\alpha_6}{2}$

Υπολογίζεται το τετράγωνο της «μικρής υποτείνουσας»:

$$(\alpha_{12})^2 = (\gamma_6)^2 + \left(\frac{\alpha_6}{2}\right)^2 = 267.949.193.445 \text{ τετραγωνικά } hu \ (= \mathbf{0{,}267949193445})$$

---

[93] μέχρι το εκατοντάκις χιλιοστό ή το εκατομμυριοστό της μονάδας ή αλλιώς μέχρι το 5^o ή το 6^o δεκαδικό ψηφίο

[94] το τελικό δεκαδικό κλάσμα

<u>Ο κανόνας υπολογισμού του 24-γωνου:</u>

«Όπως προηγουμένως, αν η ακτίνα είναι η υποτείνουσα** (και) **η μισή πλευρά είναι το gou, βρες τώρα το gu. Ένα τέταρτο του τετραγώνου της μικρής υποτείνουσας[95] είναι 66.987.298.361** (τετραγωνικά) **hu, όπου το υπόλοιπο παραλήφθηκε. Θεώρησε ότι αυτό είναι το τετράγωνο του gou και αφαίρεσε το από το τετράγωνο της υποτείνουσας. Βρες την τετραγωνική ρίζα αυτού που απομένει, η οποία είναι 9 cun, 6 fen, 5 li, 9 hao, 2 miao και** $5\,{}^{4}\!/_{5}$ **hu. Αφαιρώντας το από την ακτίνα παίρνουμε την διαφορά 3 fen, 4 li, 7 miao και** $4\,{}^{1}\!/_{5}$ **hu που είναι το μικρό gu. **Αν το μισό της πλευράς του 6-γώνου είναι το μικρό gou,** ***βρες την μικρή υποτείνουσα. Το τετράγωνο της είναι 68.148.349.466*** (*τετραγωνικά*) ***hu, όπου το υπόλοιπο παραλήφθηκε.*** **Η τετραγωνική ρίζα, τώρα του τελευταίου, δίνει την πλευρά του** (*εγγεγραμμένου*) **24-γωνου.»**

<u>Επεξήγηση</u>:
Στον συγκεκριμένο υπολογισμό έχουμε **<u>n = 12</u>**

1) Ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right)^2 = \frac{(\alpha_{12})^2}{4} = \mathit{66.987.298.361}\ \textit{τετραγωνικά hu}\ (= \mathbf{0{,}066987298361})$$

2) Στο μεγάλο τρίγωνο, έχουμε:

«υποτείνουσα»: R = *1 chi* (= 1) και «gou» : $\frac{\alpha_{12}}{2}$

Υπολογίζεται το τετράγωνο του «gu», δηλαδή του δ_{12}, αλλά **δεν αναγράφεται στο κείμενο**:

$$(\delta_{12})^2 = R^2 - \left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right)^2 = (1.000.000)^2 - \mathit{66.987.298.361}$$

$$= \mathit{933.012.701.639}\ \textit{τετραγωνικά hu}\ (= 0{,}933012701639)$$

3) Εξάγεται η τετραγωνική ρίζα μέχρι το εκατομμυριοστό της μονάδας οπότε προκύπτει:

«gu» : δ_{12} = *9 cun, 6 fen, 5 li, 9 hao, 2 miao και* $5\,{}^{4}\!/_{5}$ *hu = 965925* ${}^{4}\!/_{5}$ *hu*
(= **0,9659258**)

4) Ισχύει:

$\boldsymbol{\gamma_{12}} = R - \delta_{12}$ = *3 fen, 4 li, 7 miao και 4* ${}^{1}\!/_{5}$ *hu* (= **0,0340742**)

5) Στο μικρό τρίγωνο, έχουμε:

«μικρό gu» : γ_{12} και **«μικρό gou»**: $\frac{\alpha_{12}}{2}$

Υπολογίζεται το τετράγωνο της «μικρής υποτείνουσας»:

$$(\alpha_{24})^2 = (\gamma_{12})^2 + \left(\frac{\alpha_{12}}{2}\right)^2 = \mathit{68.148.349.466}\ \textit{τετραγωνικά hu}\ (=\mathbf{0{,}068148349466})$$

[95] Εννοεί το ένα τέταρτο της τελευταίας τιμής που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα.

<u>Σημειώσεις</u>:

Βλέπουμε ότι και στους δύο υπολογισμούς που προηγήθηκαν, για το 12-γωνο και το 24-γωνο, υπολογίστηκε το τετράγωνο της πλευράς του εκάστοτε πολυγώνου και όχι το μήκος της, δηλαδή το $(\alpha_{2n})^2$ για n = 6 και 12 αντίστοιχα και όχι το α_{2n}. Δηλαδή αποφεύχθηκε η εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας και το τετράγωνο χρησιμοποιήθηκε έντεχνα στο επόμενο βήμα.

Στον υπολογισμό του 48-γώνου και του 96-γωνου στον οποίο και σταματάει ο Liu Hui θα υπολογίσει το μήκος της πλευράς δηλαδή το α_{2n} για n = 24 και 48 αντίστοιχα.

<u>Ο κανόνας υπολογισμού του 48-γωνου:</u>

Στο σημείο αυτό παραλείπουμε το πρωτότυπο και δίνουμε κατευθείαν τα αποτελέσματα που προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως στα δύο προηγούμενα βήματα.
Εδώ έχουμε **<u>n = 24</u>** :

$$\left(\frac{\boldsymbol{\alpha_{24}}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \frac{(\alpha_{24})^2}{4} = \textit{17.037.087.366 τετραγωνικά hu } (= \mathbf{0{,}017037087366})$$

$$\boldsymbol{\delta_{24}} = \textit{9 cun, 9 fen, 1 li, 4 hao, 4 miao και } 4\,{}^{4}\!/_{5} \textit{ hu } (= \mathbf{0{,}9914448})$$

$$\boldsymbol{\gamma_{24}} = R - \delta_{24} = \textit{8 li, 5 hao, 5 miao και } 5\,{}^{1}\!/_{5} \textit{ hu } (= \mathbf{0{,}0085552})$$

$$(\boldsymbol{\alpha_{48}})^2 = (\gamma_{24})^2 + \left(\frac{\alpha_{24}}{2}\right)^2 = \textit{17.110.278.813 τετραγωνικά hu } (= \mathbf{0{,}017110278813})$$

και άρα

$$\boldsymbol{\alpha_{48}} = \textit{6 fen, 5 li, 4 hao, 3 miao και 8 hu } (= \mathbf{0{,}065438})$$

Εδώ ο Liu Hui συμπληρώνει:

«Αυτή είναι η πλευρά του 48-γωνου, η οποία όταν πολλαπλασιαστεί με την ακτίνα, 1 chi και μετά *(πολλ/στεί και)* ***με 24, δίνει μία επιφάνεια ίση με 3.139.344 εκατομμύρια*** *(τετραγωνικά)* ***hu. Διαιρώντας την με 10 δισεκατομμύρια παίρνουμε*** $\boldsymbol{313\frac{584}{625}}$ *(τετραγωνικά)* ***cun που είναι η πλευρά του 96-γωνο. »***

<u>Επεξήγηση</u>:

Εδώ χρησιμοποιείται η βασική αρχή που έχει διατυπωθεί εξ' αρχής:

$$E_{2n} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} \times \alpha_n \times R$$

όπου για n = 48 δίνει: $E_{96} = 24 \times \alpha_{48} \times R$

και άρα η επιφάνεια που υπολογίστηκε είναι αυτή του εγγεγραμμένου 96-γώνου σε κύκλο ακτίνας R = 1.

$$\mathbf{E_{96}} = \textit{3.139.344.000.000 τετραγωνικά hu}$$

$$= 314\frac{584}{625} \textit{ τετραγωνικά cun } (= \mathbf{3{,}139344})$$

Ο κανόνας υπολογισμού του 96-γωνου:

Παραλείπουμε πάλι το πρωτότυπο δίνοντας κατευθείαν τα αποτελέσματα μέχρι το σημείο που υπολογίζεται το τετράγωνο της πλευράς του 96-γώνου, όπου ακολουθείται η ίδια ακριβώς διαδικασία.

Εδώ έχουμε **n = 48** :

$$\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_{48}}{\mathbf{2}}\right)^2 = \frac{(\alpha_{48})^2}{4} = \textit{4.277.569.703 τετραγωνικά hu } (= \mathbf{0{,}004277569703})$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{48}} = \textit{9 cun, 9 fen, 7 li, 8 hao, 5 miao και } 8\tfrac{9}{10} \textit{ hu } (= \mathbf{0{,}9978589})$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{48}} = \mathrm{R} - \delta_{48} = \textit{2 li, 1 hao, 4 miao και } 1\tfrac{1}{10} \textit{ hu } (= \mathbf{0{,}0021411})$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{96}})^2 = (\gamma_{48})^2 + \left(\frac{\alpha_{24}}{2}\right)^2 = \textit{4.282.154.012 τετραγωνικά hu } (= \mathbf{0{,}00428215401221})$$

και άρα

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{96}} = \textit{6 fen, 5 li, 4 hao, 3 miao και 8 hu } (= \mathbf{0{,}065438})$$

Από την τιμή με ανάλογο τρόπο με την προηγούμενη φορά, προκύπτει η επιφάνεια του 192-γωνου:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbf{192}} &= 48 \times \alpha_{96} \times \mathrm{R} \\ &= \textit{3.141.024.000.000 τετραγωνικά hu} \\ &= 314\tfrac{64}{625} \textit{ τετραγωνικά cun } (= \mathbf{3{,}141024})\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας συμπληρώνει:

«Όταν η επιφάνεια του 96-γωνου αφαιρεθεί από αυτήν του 192-γωνου παίρνουμε $\frac{105}{625}$ *(τετραγωνικά)* ***cun και αυτό λέγεται διαφορά επιφανειών. Διπλασιάζοντάς την παίρνουμε*** $\frac{210}{625}$ *(τετραγωνικά)* ***cun, που είναι η συνολική επιφάνεια των 96 παραλληλογράμμων, που βρίσκονται εκτός του 96-γώνου με πλευρές ίσες με το απόθεμα και την πλευρά του 96-γωνου αντίστοιχα. Προσθέτοντας την συνολική αυτή επιφάνεια σ' αυτήν του 96-γώνου, παίρνουμε*** $314\frac{169}{625}$ *(τετραγωνικά)* ***cun, που είναι μεγαλύτερη*** *(επιφάνεια)* ***από τον κύκλο.»***

Επεξήγηση:

Ορίζει εδώ την ***«Διαφορά επιφανειών»:*** $\mathbf{\Delta_n = E_{2n} - E_n}$

Εδώ έχουμε: $\Delta_{96} = \mathrm{E}_{192} - \mathrm{E}_{96} = \frac{105}{625}$ *(τετραγωνικά) cun*

Αυτό που δηλώνει χωρίς επεξήγηση ο Liu Hui είναι ότι ισχύει

$$\mathbf{2\Delta_n = E_{n\text{-παραλληλογράμμων}}}$$

Και εδώ έχουμε: $\mathrm{E}_{96\text{-παραλληλογράμμων}} = \frac{210}{625}$ *(τετραγωνικά) cun*

Αν το συνολικό εμβαδό των παραλληλογράμμων αυτών προστεθεί σε αυτό του n-γωνου παίρνουμε ένα εμβαδό μεγαλύτερο από αυτό του κύκλου ενώ το ίδιο είναι μικρότερο του κύκλου και παίρνουμε την ανισότητα:

$$\mathbf{E_n < E_{κύκλου} < E_n + 2\,\Delta_n}$$

που για n = 96 δίνει: $314\frac{584}{625} < E_{κύκλου} < 314\frac{584}{625} + \frac{210}{625}$

Δηλαδή : $\mathbf{3{,}139344 < E_{κύκλου} < 3{,}142704}$

Συνεχίζοντας συμπληρώνει:

«***Η επιφάνεια του κύκλου διαιρούμενη με την ακτίνα, 1 chi , και διπλασιασμένη δίνει περιφέρεια 6 chi, 2 cun, 8 fen*** (τετραγωνικές μονάδες). »

__Επεξήγηση__:

Χρησιμοποιώντας την σχέση που δίνει η μέθοδος και που έδειξε ότι ισχύει στην εισαγωγή του.

$$E = \frac{1}{2} C \times R \Rightarrow C = 2\frac{C}{R} \Rightarrow \ \mathbf{C} = \textit{6 chi, 2 cun, 8 fen}\ (= \mathbf{6{,}28})$$

Συνεχίζοντας διαβάζουμε:

«***Το τετράγωνο της διαμέτρου δίνει την επιφάνεια του περιγεγραμμένου τετραγώνου, 400*** *(τετραγωνικά)* ***cun. Συγκρίνοντας με την επιφάνεια του εσωτερικού κύκλου η σχέση που συνδέει τις επιφάνειες είναι 157*** *(επιφάνεια κύκλου)* ***και 200*** *(επιφάνεια τετραγώνου)*. *(Με άλλα λόγια)* ***η επιφάνεια του περιγεγραμμένου τετραγώνου 200, περιέχει έναν εγγεγραμμένο κύκλο 157, που είναι*** *(όμως)* ***λίγο μικρότερος. Στο σχήμα του τμήματος κύκλου[96], το τετράγωνο περιέχει έναν εγγεγραμμένο κύκλο που με την σειρά του περιέχει ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο και η επιφάνεια του εσωτερικού κύκλου είναι μισή της επιφάνειας του εξωτερικού. Οπότε, η επιφάνεια του κύκλου 157 περιέχει εγγεγραμμένο τετράγωνο 100.***»

Επίσης η σχέση της διαμέτρου 2 chi με την περίμετρο 6 chi, 2 cun, 8 fen, δίνει την σχέση περιφέρεια 157 και διάμετρος 50. Σημείωσε ότι η τελευταία είναι λίγο μικρότερη *(από την αληθινή τιμή)*.»

__Επεξήγηση__:

Δίνονται οι λόγοι: $\mathbf{\frac{E}{d^2} = \frac{157}{200}}$ και $\mathbf{\frac{C}{d} = \frac{157}{50}}$

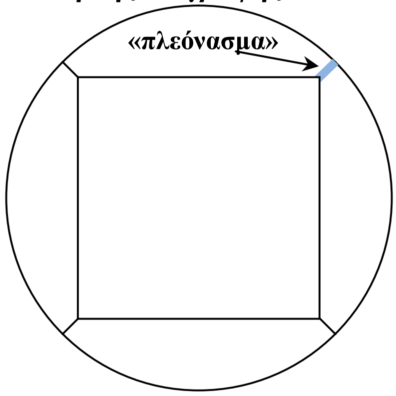
Αμέσως μετά συνεχίζει αναφέροντας:

«***Στο Βασιλικό Οπλοστάσιο της Δυναστείας Jin*** (256-420 μ.Χ.) ***φυλασσόταν ένα ορειχάλκινο χυτό από την βασιλεία του Wang Mang της Δυναστείας Xin*** (9-24 μ.Χ.),

[96] Το σχήμα αυτό επίσης δεν έχει σωθεί. Βλέπε σχήμα ….

πάνω στο οποίο ήταν γραμμένο: «2 νόμιμες πρότυπες μονάδες HU. Το εσωτερικό τετράγωνο είναι 1 τετραγωνικό chi *(και)* ***εξωτερικά είναι ένας κύκλος. Υπάρχει πλεόνασμα*** (μεσοδιάστημα μεταξύ του τετραγώνου και του εξωτερικού κύκλου) ***9 li 5 hao. Η κυκλική βάση έχει επιφάνεια 162*** *(τετραγωνικά)* ***cun. Το βάθος είναι 1 chi. Χωράει 1620*** *(κυβικά)* ***cun. Ο όγκος του HU ορίζεται ως 10 dou.»***

Παίρνοντας την προαναφερόμενη αναλογία *(157:50)*, ***προκύπτει επιφάνεια βάσης 161*** *(τετραγωνικά)* ***cun και περισσότερο, περίπου ίδια με αυτή της επιγραφής.»***



<u>Επεξήγηση</u>:

O Liu Hui επιβεβαιώνει εδώ την αναλογία $\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{d}}=\frac{\mathbf{157}}{\mathbf{50}}$, που έχει προτείνει προηγουμένως (ως κάτω φράγμα θα λέγαμε του αριθμού π) με μία επιγραφή που βρίσκεται σε ένα ορειχάλκινο σκεύος κυκλικής βάση που είχε σχεδιασμένο πιθανώς έναν κύκλο και ένα τετράγωνο στο εσωτερικό του (όχι εγγεγραμμένο).

Τέλος διαβάζουμε τα εξής:

Η διαφορά επιφανειών $\frac{105}{625}$ *(μεταξύ του 96-γωνου και του 192-γωνου)* ***είναι μικρή. Με τον λόγο που προκύπτει από το 12-γωνο πάρε το*** $\frac{36}{625}$ ***από την διαφορά επιφανειών και πρόσθεσέ το στην επιφάνεια του 192-γωνου. Πάρε το άθροισμα ως επιφάνεια του κύκλου, που είναι*** $314\frac{4}{25}$ *(τετραγωνικά)* ***cun. Η διάμετρος στο τετράγωνο δίνει την επιφάνεια του*** *(περιγεγραμμένου στον κύκλο)* ***τετραγώνου,*** $400\frac{4}{25}$ *(τετραγωνικά)* ***cun. Αν λοιπόν η επιφάνεια του τετραγώνου είναι 5000, αυτή του εγγεγραμμένου κύκλου θα είναι 3927 και αν η επιφάνεια του κύκλου είναι 3927, αυτή του εγγεγραμμένου τετραγώνου θα είναι 2500. Διαιρώντας την επιφάνεια του κύκλου*** $314\frac{4}{25}$ *(τετραγωνικά)* ***cun με την ακτίνα 1 chi και διπλασιάζοντάς το, παίρνουμε 6 chi, 2 cun,*** $8\frac{8}{25}$ ***fen ως περιφέρεια. Η σχέση της*** *(περιμέτρου)* ***λοιπόν με την διάμετρο είναι 3927 προς 1250. Αυτός ο λόγος είναι αρκετά ακριβής. Ωστόσο μία τέτοια μέθοδος είναι δύσκολη στην χρήση. Υπολόγισε την πλευρά του 1536-γωνου για την επιφάνεια του 3072-γωνου. Με παράληψη του υπολοίπου, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα που εκτιμήσαμε, που επαληθεύεται σωστό.***

<u>Επεξήγηση</u>:

Εδώ προτείνεται μία καλύτερη προσέγγιση ($\pi_1=\frac{3927}{1250}=3{,}1416$), ωστόσο κρίνεται ότι δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστη. Επίσης είναι προφανές ότι οι τελικοί συλλογισμοί στα πλαίσια μίας επιπλέον επιβεβαίωσης, αναφέρονται σε πολύγωνα πολύ περισσότερων πλευρών.

Σε σύγχρονη απόδοση, ο γενικός τύπος που φαίνεται να χρησιμοποιεί ο Liu Hui, είναι της μορφής:

$$\alpha_{2n}=\sqrt{\left[\mathrm{R}-\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{1}{4}(\alpha_n)^2}\right]^2+\frac{1}{4}(\alpha_n)^2}$$

$$E_{2n}=\frac{n}{2}\alpha_n\cdot\mathrm{R}$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ LIU HUI ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΑΥΤΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Αυτό που γενικά εκτιμάται από τους ερευνητές, είναι ότι η το έργο του Hiu Lui, είναι ανεξάρτητο από αυτό του Αρχιμήδη, χωρίς ωστόσο αυτό να είναι απόλυτα τεκμηριωμένο και καθολικά αποδεκτό από την επιστημονική κοινότητα. Ωστόσο η ομοιότητες των δύο μεθόδων είναι εμφανής όσο αφορά την προσέγγιση με κανονικά πολύγωνα. Πέρα από αυτή την γενικού χαρακτήρα παρατήρηση και χωρίς να ασχολούμαστε περαιτέρω με το ζήτημα της μετάδοσης, στο σημείο αυτό θα παρατηρήσουμε κάποιες από τις βασικές διαφορές και ομοιότητες που παρουσιάζουν οι δύο μέθοδοι.

Αρχικά να πούμε ότι παρά το γεγονός ότι και οι δύο αναζητούν μία ποσοτική εκτίμηση του λόγου της περιφέρειας προς την διάμετρο του κύκλου, ο μεν Αρχιμήδης δίνει με μαθηματική αυστηρότητα, δύο λόγους μεταξύ των οποίων κυμαίνεται ο ζητούμενος λόγος, ο δε Hiu Lui, καταλήγει σε έναν λόγο που θεωρεί καλύτερη προσέγγιση. Παρόλα αυτά βέβαια και όπως παρατηρήσαμε, έχει βρει και αυτός, με τις «ανισοτικές σχέσεις» που έμμεσα ορίζονται στο έργο του, άνω και κάτω φράγμα για τον ζητούμενο λόγο.

Σημαντική ωστόσο διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων είναι το τελείως διαφορετικό πλαίσιο στο οποία ο καθένας από αυτούς θεωρεί ότι έχει αποδείξει την πρότασή του. Αυτό που εμείς σήμερα θεωρούμε ως «απόδειξη» έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με την μέθοδο του Αρχιμήδη και σίγουρα απέχει από την τεκμηρίωση του Liu Hui, που ωστόσο είναι εξαιρετικά αποτελεσματική και επιμελώς παρουσιασμένη.

Μάλιστα να παρατηρήσουμε ότι στο μεγαλύτερο μέρος της, η παρουσίαση του Liu Hui εντοπίζεται σε μία καλύτερη προσέγγιση από τον λόγο 3:1 και δέχεται σχεδόν αξιωματικά την πρόταση που συνάντησε στο κείμενο που σχολιάζει για το εμβαδόν του κύκλου σε σχέση με την περιφέρεια και την ακτίνα του, κρίνοντας την βέβαια ως σωστή. Αντιθέτως ο Αρχιμήδης αποδεικνύει την πρόταση αυτή, όπως έχουμε δει με τρόπο που δεν επιδέχεται καμία απολύτως αμφισβήτηση, απαγωγικά και μέσω της μεθόδου της εξάντλησης.

Και οι δύο προσεγγίζουν το ζήτημα μέσω κανονικών πολυγώνων, ωστόσο ενώ ο Αρχιμήδης συγκρίνει την περίμετρο των εγγεγραμμένων και των περιγεγραμμένων πολυγώνων με την περιφέρεια του κύκλου, ο Liu Hui φτάνει στο ίδιο αποτέλεσμα συγκρίνοντας τα εμβαδά των εγγεγραμμένων πολυγώνων και μόνο με αυτό του κύκλου, χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την συνδετική πρόταση που έχει θεωρήσει σωστή.

Γυρνώντας τώρα στο ζήτημα της μετάδοση του Αρχιμήδειου έργου στην Κίνα, θα αναφέρουμε ότι είναι τεκμηριωμένα διαπιστωμένο μέσα από σωζόμενες πηγές. Συγκεκριμένα να πούμε ότι το ίδιο το όνομα του Αρχιμήδη καταγράφεται σε κινέζικο κείμενο πρώτη φορά σε μία μετάφραση στα τέλη του 16^{ου} αιώνα[97], χωρίς αυτό βέβαια να σημαίνει ότι πτυχές του έργου του δεν ήταν γνωστές σε προγενέστερες περιόδους, Από εκείνη την περίοδο και έπειτα συναντάμε στην Κίνα, γεωμετρικές αποδεικτικές διαδικασίες στο πνεύμα της ευκλείδειας διδασκαλίας. Ας δούμε σύντομα κάποια στοιχεία της μετάβασης αυτής.

Η ευκλείδεια γεωμετρία εισάγεται στην Κίνα στα τέλη του 16^{ου} αιώνα από ιησουίτες ιεραπόστολους. Με επικεφαλή τον μαθηματικό και αστρονόμο **Matteo Ricci** (1552-1610) και στα πλαίσια της επίτευξη του στόχου της, η ιεραποστολή εστίασε στην αναμόρφωση του ημερολογίου, που θα εξυπηρετούσε σημαντικότατες ανάγκες και θα έδινε ιδιαίτερη φήμη στους δυτικούς λόγιους.

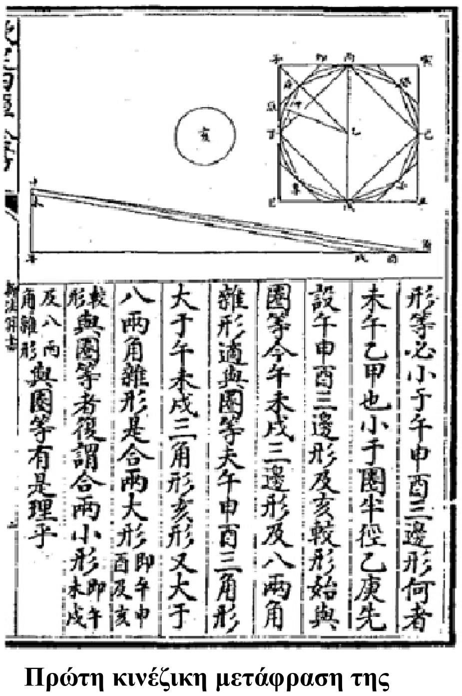
---

[97] J.C. Martzloff, J. Gernet, J. Dhombres, (2006), *«A History of Chinese Mathematics»,* Spinger Verlag

Μετά τον θάνατο του M. Ricci, ξεκίνησε από τους Giacomo Rho και Adam Scall μία πενταετή (1630-1635) μεταφραστική προσπάθεια που περιλάμβανε όλες τις μαθηματικές θεωρητικές γνώσεις, αλλά και την τεχνογνωσία που απαιτείτο για την αστρονομική μελέτη. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν το έργο με τίτλο «Αστρονομική-ημερολογιακή πραγματεία της εποχής του Chongzhen» (Chongzhen lishu), στο οποίο περιλαμβάνονταν περιγραφές υπολογιστικών οργάνων, προτάσεις και πίνακες τριγωνομετρίας, προτάσεις που αφορούν τα πολύεδρα, τις κωνικές τομές και το π.

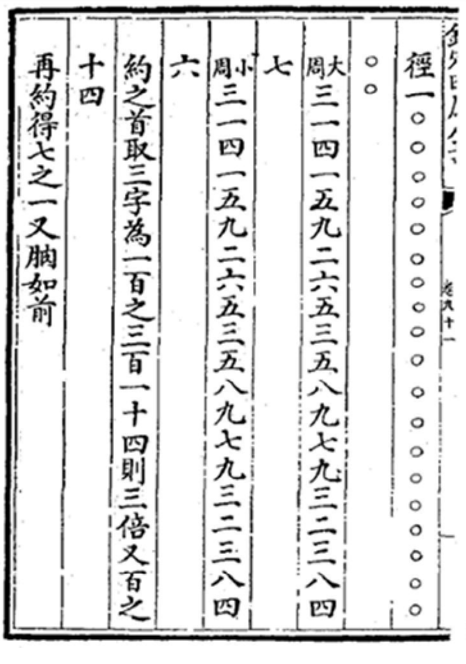
Μεταξύ των έργων που αποτελούσαν το Chongzhen lishu ήταν και το έργο με τίτλο «Ολοκληρωμένη ερμηνεία της επιπεδομετρίας και στερεομετρίας» (**Celiang quanyi***)* που εκδόθηκε το **1635** στο οποίο περιεχόταν πλήρης μετάφραση της πραγματεία «Κύκλου Μέτρησις» του Αρχιμήδη.

Matteo Ricci (1552-1610)



形等必小于午申酉三邊形何者
未午乙甲也小于圜半徑乙庚先
設午申酉三邊形及亥較形始與
圜等今午未戌三邊形及八兩角
雜形適與圜等夫午申酉三角形
大于午未戌三角形亥形又大于
八兩角雜形是合兩大形即午申酉及亥
較形與圜等者復謂合兩小形即午未戌
及八兩角雜形與圜等有是理乎

Πρώτη κινέζικη μετάφραση της «Κύκλου Μέτρησις» του Αρχιμήδη Celiang quanyi (1635)



徑一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇
大周三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四
七
小周三一四一五九二六五三五八九七九三二三八四
六
約之首取三字為一百之三百一十四則三倍又百之
十四
再約得七之一又朒如前

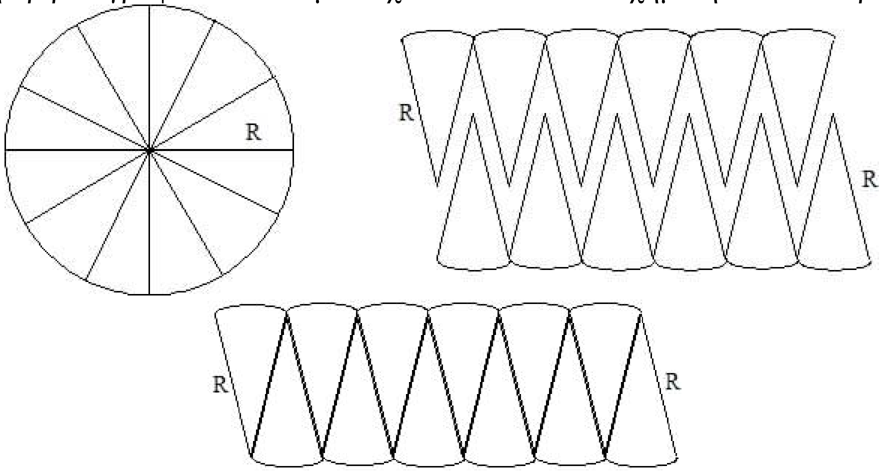
Ο υπολογισμός του π Celiang quanyi (1635)

Στο έργο αυτό δίνονται και χωρίς απόδειξη, δίνονται τα μεγάλης ακρίβειας όρια για την τιμή του π:

$$3{,}14159265358979323846 < \pi < 3{,}14159265358979323847$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Στην βιβλιογραφία συναντάμε συχνά το ακόλουθο σχήμα ή κάποιο παρόμοιό του:



Πρόκειται για την διαίρεση του κύκλου σε ίσους κυκλικούς τομείς οι οποίοι στην συνέχεια ανασυντίθενται και σχηματίζουν όπως φαίνεται ένα σχήμα που πλησιάζει την μορφή ενός παραλληλογράμμου.

Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όσο αφορά την διδακτική της χρησιμότητα. Το σύνθετο γνωστικό αντικείμενο της μέτρησης του κύκλου σε ένα πρώτο επίπεδο εξοικείωσης ανάγεται στον υπολογισμό ενός γνωστού σχήματος, ενώ παράλληλα τίθεται μία γόνιμη βάση για να διαπραγματευτεί αργότερα η έννοια της απόδειξης.

圜面積圖說

凡圜形之輻線與一直角三角形之小邊線度等而圜之周界與三角形之大邊線度等則此直角三角形之面積與圜形之面積相等也何以見之甲圜之輻線與三角形之小邊等者即如等邊衆界形之中垂線與三角形之小邊等也甲圜之周界與三角形之大邊等者即如等邊衆界形之各界共度與三角形之大邊等也今此甲圜形相等之丙

Συχνά η μέθοδος αυτή αναφέρεται ως προερχόμενη από την κινέζικη παράδοση[98]. Να σημειώσουμε ωστόσο ότι η μέθοδος της μέτρησης του κύκλου όπως περιγράφεται μέσα στα «Εννέα κεφάλαια» δεν περιέχει την περιγραφή ενός τέτοιου μετασχηματισμού. Τα σχήματα που συνόδευαν ωστόσο τα σχόλια του Hiu Lui, τα οποία δυστυχώς δεν σώζονται, φαίνεται ότι περιλάμβαναν αντίστοιχα παραστατικές αποδόσεις βασισμένες στην λεγόμενη «**αρχή της συμπλήρωσης**» (“out-in” complementary principle).

Μάλιστα από το κείμενο, που σε πολλά σημεία λειτουργεί απλώς συνοδευτικά, προκύπτει ότι τα σχήματα αυτά ήταν χρωματισμένα με τρόπο που να βοηθάει την ερμηνεία της εκάστοτε μεθόδου

Χαρακτηριστικό παράδειγμα, αποτελεί το σχήμα που περιγράφεται στο σχολιασμό των προβλημάτων 1.35-6 των «Εννέα κεφαλαίων» στο οποίο δίνεται η μέθοδος για τον υπολογισμό κυκλικού τμήματος. Ανακατασκευή αυτού του σχήματος, έγινε από τον **Dai Zhen**, στα τέλη του **17ου αιώνα** και αυτή η ανακατασκευή, συχνά παρερμηνεύεται ως σχήμα του Liu Hui και μάλιστα για την μέτρηση του κύκλου. Στην συνέχεια παρουσιάζεται το πρόβλημα 1.32 και η περιγραφή της μεθόδου μέσω του συγκεκριμένου σχήματος.

---

[98] Παρόμοια μέθοδο για την πειραματική μέτρηση του κύκλου θα συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο από τον Franco της Λιέγης (Liège) στις αρχές του 11ου αιώνα.

7.4 Σχολια Στα Προβληματα 1.35 - 1.36 των «Εννεα Κεφαλαιων»

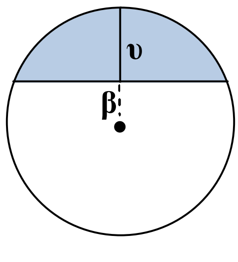
Στα προβλήματα που ακολουθούν τα οποία έχουμε ήδη αναφέρει στην παράγραφο 2.4.2, δίνεται η μέθοδος υπολογισμού κυκλικού τμήματος, η οποία συναντάται ίδια και στα βαβυλωνιακά μαθηματικά αλλά αναφέρεται επίσης και στα Μετρικά του Ήρωνος. Εδώ θα δούμε τον σχολιασμό του Liu Hui, που παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με αυτόν του Ήρωνος, αλλά και το σχήμα που προαναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Θυμίζουμε την εκφώνηση των δύο προβλημάτων:

<u>Πρόβλημα 1.35</u>
<u>Δεδομένα</u>: Δοσμένου τώρα ενός κυκλικού τμήματος, του οποίου η χορδή είναι 30 bu και και ύψους[99] 15 bu
<u>Ερώτηση</u>: Πες: Ποια είναι η επιφάνεια;
<u>Απάντηση</u>: Κάποιος είπε: 1 mu 97 $\frac{1}{2}$ (τετραγωνικά) bu

<u>Πρόβλημα 1.36</u>
<u>Δεδομένα</u>: Δοσμένου ενός άλλου κυκλικού τμήματος, του οποίου η χορδή είναι 78 $\frac{1}{2}$ bu και ύψους 13 $\frac{7}{9}$ bu
<u>Ερώτηση</u>: Πες: Ποια είναι η επιφάνεια;
<u>Απάντηση</u>: Κάποιος είπε: 2 mu 155 $\frac{56}{81}$ (τετραγωνικά) bu

<u>Μέθοδος:</u> Πάρε την χορδή, πολλαπλασίασέ την με το ύψος, (ύψωσε) στο τετράγωνο το ύψος, πρόσθεσε, διαίρεσε στα δύο.

<u>Σύγχρονη απόδοση</u> :



$$E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = (\boldsymbol{\beta\cdot\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}^2)\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\beta\cdot\upsilon} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\upsilon}^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\upsilon})\cdot\boldsymbol{\upsilon}$$

Όπου, **β**: η χορδή και
υ: το ύψος του κυκλικού τμήματος όπως φαίνονται στο σχήμα.

Σχόλιο του Liu Hui:

Σε ένα τετράγωνο εγγράφεται ένας κύκλος. Η επιφάνεια του εγγεγραμμένου (στον κύκλο) 12-γωνου είναι τρία τέταρτα της επιφάνειας του περιγεγραμμένου τετραγώνου. Επομένως η κόκκινη επιφάνεια είναι το ένα τέταρτο του εξωτερικού τετραγώνου.
Θεωρούμενο ως ημικύκλιο, το κυκλικό τμήμα μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
«Πάρε την χορδή, πολλαπλασίασέ την με το ύψος, διαίρεσε στα δύο», (που) είναι η κίτρινη περιοχή, «(ύψωσε) στο τετράγωνο το ύψος, διαίρεσε στα δύο» (που) είναι δύο φορές όσο η μπλε περιοχή. Ενώνοντας την κίτρινη και δύο μπλε περιοχές προκύπτει ένα πολύγωνο, η επιφάνεια του οποίου είναι (ίση με) το μισό του 12-γώνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο. Οι γραμμές του πολυγώνου δεν βγαίνουν έξω από το

[99] Σε μία πιο πιστή απόδοση του κειμένου, το ύψος που αναφέρουμε εδώ, μεταφράζεται ως «βέλος», κατ' αναλογία με τους όρους «τόξο» και «χορδή».

(κυκλικό) τμήμα, οπότε η επιφάνεια είναι πιο μικρή. Η αναλογία 3 προς 1 για τον Κανόνα του Κυκλικού Χωρίου (1.32), δίνει την επιφάνεια του 12-γώνου, που είναι πιο μικρό (από τον κύκλο). Ομοίως, εδώ κάποιος παίρνει την επιφάνεια του μισού 12-γώνου που είναι εγγεγραμμένου στο ημικύκλιου.

Επεξήγηση:

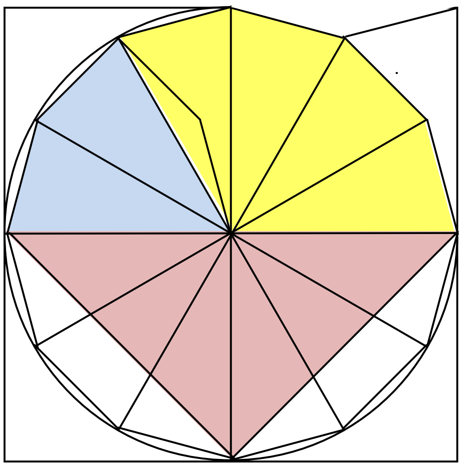
Το σχήμα που περιγράφεται στο κείμενο δεν σώζεται όπως και τα υπόλοιπα σχήματα του Liu Hui. Το **1774**, ωστόσο, ο Κινέζος μελετητής της Qing δυναστείας, **Dai Zhen** (1724-1777), αντιγράφοντας και επανεκδίδοντας τα «Εννέα Κεφάλαια» συμπεριέλαβε ανακατασκευές των σχημάτων συνοδευόμενες από δικά του σχόλια.

Dai Zhen 1724-1774)

Εικονογράφηση με σχολιασμό του Dai Zhen σε επανέκδοση των «Εννέα Κεφαλαίων» (1774)

Στα σχόλιά του για το συγκεκριμένο πρόβλημα, ο Dai Zhen, σημειώνει:

«Σύμφωνα με τα σχόλια του Liu Hui: Επιβεβαιώνουμε μέσω του παραδείγματος του ημικυκλίου. Εφαρμόζουμε «**αρχή της συμπλήρωσης**» Η κίτρινη περιοχή ισούται με το ένα τέταρτο του μεγάλου τετραγώνου, η μπλε περιοχή με το ένα όγδοο. Η κίτρινη και οι μπλε περιοχές μαζί, (ισούνται με) τα τρία τέταρτα του μισού μεγάλου τετραγώνου. Όσο δε για την κόκκινη περιοχή, αυτή είναι ίση με την κίτρινη. Οι αρχαίοι θεωρούσαν το 12-γωνο ως προσέγγιση του (περιγεγραμμένου) κύκλου, ενώ εδώ θεωρούμε το ημικύκλιο ως μία συγκεκριμένη περίπτωση κυκλικού τμήματος. Είναι προφανές ότι ο Κανόνας των Εννέα Κεφαλαίων είναι ανακριβής.



Η ανακατασκευή του Dai Zhen με τα χρώματα που αναφέρονται στο κείμενο

Αυτό που εξηγείται από την ανασύνθεση των παραπάνω σχολιασμών είναι το εξής:

Ο Κανόνας που προτείνεται στα εννέα Κεφάλαια δεν είναι ακριβής διότι θεωρεί ότι π = 3. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση: στην περίπτωση που το κυκλικό τμήμα είναι το ημικύκλιο, δίνει ακριβώς το εμβαδό του μισού εγγεγραμμένου 12-γώνου. Αυτό που αποδεικνύεται με τον έξυπνο τρόπο της «αρχής της συμπλήρωσης» είναι ακριβώς αυτή η παρατήρηση. Θεωρείται δηλαδή ότι αν αποδειχθεί ότι όντως ο κανόνας στην περίπτωση του ημικυκλίου δίνει το μισό 12-γωνο, τότε θα έχει δειχθεί ότι ο κανόνας είναι εσφαλμένος όπως ακριβώς συνέβαινε και με τον Κανόνα για το εμβαδό του κύκλου που θεωρούσε το π = 3.

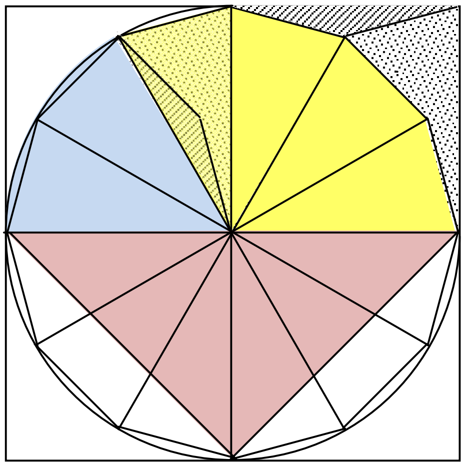
Πώς αποδεικνύεται η παρατήρηση αυτή:

Ο Κανόνας $\mathrm{E}_{\textbf{κυκλικού τμήματος}} = (\boldsymbol{\beta\cdot\upsilon} + \boldsymbol{\upsilon}^2)\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\beta\cdot\upsilon} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\upsilon}^2$ για βάση 9 ή αλλιώς χορδή ίση με την διάμετρο (β = 2R) και ύψος ίσο με την ακτίνα (υ = R) γίνεται:

$$\mathrm{E}_{\textbf{κυκλικού τμήματος}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{2R\cdot R} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{R}^{\mathbf{2}}$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι το εμβαδό ενός τριγώνου και ο δεύτερος είναι το εμβαδό μισού τετραγώνου. Αυτό που θα δείξουμε τώρα είναι ότι ο πρώτος όρος είναι ίσος με την κίτρινη περιοχή και ο δεύτερος είναι ίσος με την μπλε οπότε και το εμβαδό που υποτίθεται ότι πρέπει να υπολογίζει το ημικύκλιο θα έχουμε δείξει ότι υπολογίζει απλά το μισό 12-γωνο.

Ο πρώτος όρος ($\frac{1}{2}$ 2R·R**)** είναι το κόκκινο τρίγωνο. Το κόκκινο τρίγωνο όμως ισούται με το ένα τέταρτο του περιγεγραμμένου στον κύκλο τετράγωνο. Αρκεί να δείξω ότι η κίτρινη περιοχή είναι και αυτή ίση με το τέταρτο του περιγεγραμμένου τετραγώνου. Και όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα αυτό ισχύει.



Τέλος ο δεύτερος όρος ($\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,R^2$) είναι όντως ίσος με την μπλε περιοχή αφού η τελευταία είναι μισή της κίτρινης και άρα το μισό του R^2.

Κατ' αυτόν τον τρόπο και διατηρώντας την κινέζικη μέθοδο παρουσίασης δείξαμε ότι το

$$\mathrm{E}_{\text{κυκλικού τμήματος}} = \frac{1}{2}\,2R\cdot R + \frac{1}{2}\,R^2,$$

δεν δίνει το ημικύκλιο αλλά κάτι μικρότερο από αυτό και άρα στην περίπτωση του ημικυκλίου ο κανόνας δεν είναι ακριβής

Στη συνέχεια των σχολίων του ο Liu Hui διατυπώνει ότι στην περίπτωση των κυκλικών τμημάτων που είναι μικρότερα του ημικυκλίου η ίδια μέθοδος παρουσιάζει μεγαλύτερη απόκλιση.

8. Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΣΤΟΥΣ ΜΕΣΑΙΩΝΙΚΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ

Το μαθηματικό έργο του Αρχιμήδη άργησε να εκτιμηθεί και τα έργα του για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα μετά την συγγραφή τους δεν ήταν ευρύτερα διαθέσιμα.

Οι πραγματείες του όπως ήδη έχουμε αναφέρει, «δημοσι-εύονταν» από τον ίδιο στα πλαίσια της αλληλογραφίας του με επιστήμονες της εποχής του και όπως είναι φυσικό το κείμενό τους δεν ήταν κατάλληλο για διδακτική χρήση στην αρχική του μορφή. Αναφορές του **Ήρωνα** (10 – 70 μ.Χ) του **Πάππου** (290 –350 μ.Χ.) και του **Θέωνος** (335 – 405 μ.Χ) μας κάνουν να συμπεράνουμε ότι τα έργα του βρίσκονταν στην Αλεξάνδρεια μέχρι και τα τέλη του 4ου αιώνα μ.Χ. Παρόλα αυτά εικάζεται ότι μέχρι εκείνη την εποχή δεν υπήρξαν οργανωμένα σε συλλογές όπως συνέβη αρκετά αργότερα και αυτό συντέλεσε στο να χαθούν όσα από αυτά δεν ήταν σε συχνή χρήση.

Το έργο «Κύκλου Μέτρησις» και τα δύο βιβλία «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», φαίνεται ότι συγκέντρωσαν εξαρχής την προσοχή και είναι αυτά, μαζί με το «Περί επιπέδων ισορροπιών» που σχολιάστηκαν από τον **Ευτόκιο τον Ασκαλωνίτη**[100] στα τέλη του 4ου αιώνα. Τα έργα αυτά μαζί με τα σχόλια του Ευτόκιου, λίγο αργότερα, διδάχτηκαν στην σχολή του **Ισίδωρου του Μιλήσιου**[101] και ενδεχομένως να είναι εκείνο το διάστημα

[100] Ο Ευτόκιος συνέγραψε σχόλια και για τα κωνικά του Απολλωνίου.

[101] Πρόκειται για τον γνωστό αρχιτέκτονα που μαζί με τον Ανθέμιο από τις Τράλλεις, ανέλαβαν την ανοικοδόμηση του ναού της Αγίας Σοφίας στην Κωνσταντινούπολη επί Ιουστινιανού. Στον δεύτερο αφιερώνεται από τον Ευτόκιο το έργο του για τα Κωνικά του Απολλωνίου.

στο οποίο έγινε η πλήρης μετατροπή της δωρικής διαλέκτου του Αρχιμήδη στα έργα αυτά.

Η πρώτη γνωστή μας συλλογή έργων του Αρχιμήδη προέρχεται από τις αρχές του 9^{ου} αιώνα στο Βυζάντιο, όταν ο **Λέων ο Φιλόσοφος** (ή αλλιώς Λέων ο Μαθηματικός), που διεύθυνε τον νεοσύστατο πανεπιστήμιο της Κωνσταντινούπολης, συγκέντρωσε το σύνολο των σωζόμενων τότε χειρογράφων. Η συλλογή αυτή που είναι γνωστή σήμερα στην βιβλιογραφία ως **κώδικας Α**, από την ονομασία που της έδωσε ο **Heiberg**, περιείχε όλα σχεδόν τα μαθηματικά έργα του Αρχιμήδη[102] μεταξύ των οποίων και το «Κύκλου Μέτρησις». Αυτή η συλλογή και οι αντιγραφές που προέρχονται απ' αυτήν ήταν τα μοναδικά διαθέσιμα κείμενα στην ελληνική γλώσσα μέχρι τις αρχές του 20^{ου} αιώνα που βρέθηκε το φημισμένο «παλίμψηστο» στο οποίο περιέχονται επιπλέον έργα στην ελληνική[103].

Την ίδια περίοδο στον Ισλαμικό κόσμο (8^{ος} -10^{ος} αι.) σημειώνεται έντονη μεταφραστική κίνηση μέσω της περσικής ή και κατευθείαν από την ελληνική, έργων αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων. Οι Άραβες φαίνεται το διάστημα αυτό να έχουν στην διάθεσή τους το «Κύκλου μέτρησης» και το «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» με σχόλια του Ευτόκιου στο δεύτερο και πιθανώς και στο πρώτο. Το «**Κύκλου Μέτρησις**» είναι από τα πρώτα ελληνικά έργα που μεταφράστηκαν στην αραβική γλώσσα μετά τα **Στοιχεία του Ευκλείδη** και την **Μεγίστη του Πτολεμαίου**. Δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια σε ποιους αποδίδονται οι δύο βασικές μεταφράσεις του έργου αυτού και αν έγιναν από την συριακή ή την ελληνική γλώσσα, αλλά είναι γνωστό ότι η επικρατούσα έκδοση αποδίδεται στον **Thabit Ibn Qurra**, ενώ αντιγραφές αυτής σώζονται από τον μαθηματικό του 13^{ου} αιώνα **Nasīr al-Dīn al-Ṭūsī**.

Το πρώτο μισό του 9^{ου} αι. και ενώ η αρχιμήδεια πραγματεία ήταν ήδη διαθέσιμη στην αραβική γλώσσα, συγγράφεται επίσης από τους αδερφούς **Banū Mūsā** ένα έργο με τίτλο «Το βιβλίο για την μέτρηση των επίπεδων και σφαιρικών σχημάτων», το οποίο περιέχει μεταξύ άλλων τις δύο βασικές προτάσεις του «Κύκλου Μέτρησις». Το έργο υπήρξε χρήσιμο εγχειρίδιο τόσο για τους Άραβες, που μαθαίνουμε ότι το αντέγραψαν αρκετές φορές όσο και στην Δύση στην οποία μεταφράστηκε τον 12^{ο} αιώνα ως **Verba filiorum** (ή Liber trium fratrum) από τον **Gerard of Cremona**.

Τόσο η μετάφραση του έργου των Banū Mūsā, όσο και η ίδια η πραγματεία «Κύκλου Μέτρησην» μεταφράζονται από την αραβική στην λατινική γλώσσα τον 12^{ο} αιώνα αρχικά από τον **Plato του Tivoli** και τον **Gerard of Cremona.** Μάλιστα η «Κύκλου Μέτρησιν», είναι το πρώτο έργο του Αρχιμήδη που μεταφράζεται στα λατινικά. Λίγο αργότερα, στις αρχές του 13^{ου} αιώνα, ο **William του Moerbeke** μεταφράζει το σύνολο του κώδικα Α στην λατινική από τα σωζόμενα ελληνικά χειρόγραφα, που έχουν ήδη περάσει από την Κωνσταντινούπολη στα χέρια των Ενετών.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα γίνει σύντομα αναφορά στα μαθηματικά του ισλαμικού χώρου, η ανάπτυξη των οποίων ταυτίζεται χρονικά με τον μεσαίωνα της Δύσης, θα παρουσιαστεί τμήμα του έργου των Banū Mūsā, θα γίνει αναφορά σε κάποια χαρακτηριστικά σημεία των λατινικών μεταφράσεων και τέλος θα δούμε κάποιες από τις επιρροές των μεταφράσεων αυτών στη Δύση, όσο αφορά τον «τετραγωνισμό του κύκλου» αλλά και την ακριβέστερων υπολογισμών του π.

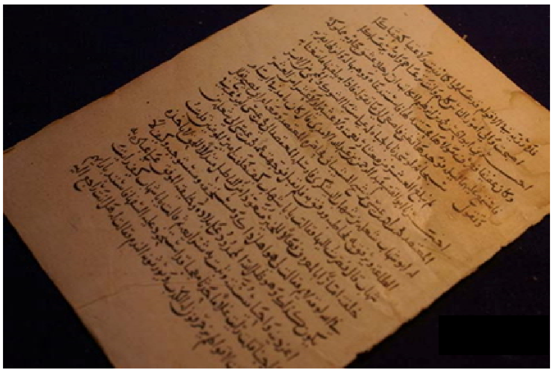
[102]

[103] Το «*Περί των Μηχανικών Θεωρημάτων*» (η λεγόμενη *Μέθοδος*), το «*Περί των επιπλεόντων Σωμάτων*» (ή *Οχουμενων*) και το «*Στομάχιον*».

8.1 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΙΣΛΑΜΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Προκειμένου να γίνουν ευδιάκριτα τα χωρικά και χρονικά όρια αυτής της περιόδου καθώς και τα χαρακτηριστικά της είναι αναγκαία η αναφορά σε κάποιους από τους ιστορικούς παράγοντες που αφορούν την καταγωγή και την διαμόρφωση των στοιχείων αυτών.

Η ισλαμική επικράτεια, άρρηκτα συνδεδεμένη με την αντίστοιχη θρησκεία ξεκινάει από τα μέσα του $7^{ου}$ αι. στην μέση Ανατολή με την επιστροφή του Μωάμεθ στην Μέκκα, κυριαρχεί σε όλη την αραβική χερσόνησο ενώ σύντομα εισβάλει και κατακτά το Περσικό κράτος. Ήδη ωστόσο στην Περσία η δυναστεία των Σασσανιδών είχε αναπτύξει ένα σημαντικό πολιτισμικό κέντρο με τεράστια κληρονομιά και είχε προχωρήσει τις σχέσεις της με τα αντίστοιχα κέντρα τις Ινδίας και της Κίνας, ενώ φαίνεται να αξιοποιούσε ήδη τις επιστημονικές και φιλοσοφικές γνώσεις των ελληνιστικών χρόνων. Μέχρι τα μέσα του $8^{ου}$ αι. με το Χαλιφάτο των Ομεϊάδων ή Ομεγιά (Umayyads), η επικράτεια είχε εξαπλωθεί προς την δύση στην βόρεια Αφρική και μέχρι την Ιβηρική Χερσόνησο και προς την Ανατολή μέχρι τα σύνορα με την Ινδία και την Άπω Ανατολή, ενώ πρωτεύουσα ήταν η Δαμασκός.



Χειρόγραφο από την εποχή των Αββασιδών

Λόγιοι στον Οίκο της Σοφίας, Βαγδάτη, Εικονογράφηση του $14^{ου}$ αι.

Με την ίδρυση του Χαλιφάτου των Αβασσιδών (Abbasids) που διήρκεσε μέχρι την εισβολή των Μογγόλων το 1250, η πρωτεύουσα μεταφέρεται στη Βαγδάτη και ξεκινάει η Χρυσή περίοδος του ισλαμικού πολιτισμού. Ο χαλίφης Harun al-Rashid ιδρύει στην Βαγδάτη την περίφημη βιβλιοθήκη που συγκέντρωσε τον πλούτο των κειμένων που βρίσκονταν διασκορπισμένα σε όλη την επικράτεια. Στην συνέχεια ο γιός του Al-Mamun ιδρύει τον Οίκο τη Σοφίας (Bayt al-Hikmah) που εκτός της βιβλιοθήκης περιλαμβάνει αστεροσκοπείο και χώρο διδασκαλίας ενώ αποτελεί το μεταφραστικό και ερευνητικό κέντρο που έδωσε την ώθηση στην ανάπτυξη των επιστημών. Από την αρχή της ίδρυσης του σπουδαίου αυτού κέντρου στους κόλπους του συγκεντρώνονται ερευνητές που άφησαν το όνομά τους στην ιστορία όπως ο Al-Khowarismi, οι αδελφοί Musa, ο Al-Kindi, ο Thabit ibn Qurra κ.α

Η εσωτερική διάσπαση του Χαλιφάτου, από τον 10ο αιώνα και μετά, που οδήγησε στην ίδρυση δύο νέων κυρίως πόλων: αυτού στη Κόρδοβα (νέο χαλιφάτο των Ομεγιά) και αυτού στο Κάιρο (χαλιφάτο των Φατιμίδων – Faimidids), αποδυνάμωσε σταδιακά την Βαγδάτη, μέχρι την άλωσή της το 1250. Οι τελευταίοι χαλίφηδες των Αβασσιδών, μεταφέρονται στην Αίγυπτο μέχρι να παραδοθεί τελικά επίσημα ο τίτλος του Χαλίφη του

Islam στον Selim I το 1517 και να διαδεχτεί την αραβική επικράτεια η Οθωμανική αυτοκρατορία.

Έχοντας ορίσει τον «ισλαμικό χώρο», θα δούμε ότι οι ερευνητές που θα μας απασχολήσουν στην ενότητα αυτή δεν ήταν όλοι Άραβες αλλά και ούτε ήταν όλοι ισλαμιστές. Τα έργα που μας απασχολήσουν, γράφηκαν και σε γλώσσες έτερες της αραβικής, λόγου χάριν πολλά ήταν αρχικά τουλάχιστον γραμμένα στην περσική γλώσσα. Έτσι λοιπόν καταλαβαίνουμε ότι οι τίτλοι «**Αραβικά**» ή «**Ισλαμικά μαθηματικά**» και πόσο μάλλον τίτλοι όπως «**Μαθηματικά των Αράβων**» ή «**του Ισλάμ**», αποτυγχάνουν να αποδώσουν την πραγματική διάσταση του αντικειμένου στο οποίο αναφέρονται.

O Al-Tūsī στο γραφείο του στο αστεροσκοπείο της Maragha, το 1259. Εικονογράφηση του 16ου αι. που (British Library, Λονδίνο)

Ο ισλαμικός πολιτισμός όπως εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς από τα έργα που διαφύλαξε, ανέπτυξε και διέδωσε, είναι ένα κράμα διαπολιτισμικής συνένωσης, με στοιχεία παρμένα από διάφορες περιοχές και περιόδους. Όσο αφορά δε τα μαθηματικά, τρεις βασικές παραδόσεις είναι αυτές που χαρακτηρίζουν την προσέγγιση και συμβολή των ερευνητών: τα ελληνικά μαθηματικά, τα ινδικά μαθηματικά και τα τεχνικά- επαγγελματικά μαθηματικά. Την λεγόμενη ελληνική παράδοση αποτελούν η αξιωματική θεμελίωση και τα Στοιχεία του Ευκλείδη, έργα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου, τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου καθώς και τα πρακτικά εγχειρίδια του Ήρωνα αλλά και οι απαρχές της τριγωνομετρίας. Η ινδική αντίστοιχα παράδοση εκτός από τα αντίστοιχα αστρονομικά κυρίως έργα, που περιέχουν και εξελίσσουν έννοιες της τριγωνομετρίας, εμπεριέχει αλγεβρικές μεθόδους που στα χέρια των Αράβων θα πάρουν την μορφή αλλά και την σύγχρονη έννοια που τους αποδίδεται σήμερα. Κυρίως όμως η ινδική παράδοση είναι αυτή που θα εισάγει το λεγόμενο ινδικό-αραβικό σύστημα αρίθμησης, η επινόηση του μηδενός και το δεκαδικό, θεσιακό σύστημα με τον συμβολισμό που παραλλαγμένος θα περάσει αρκετά αργότερα και στην δύση, φτάνοντας ως τις μέρες μας. Τέλος με τον όρο τεχνικά – επαγγελματικά μαθηματικά εννοούνται οι υπολογισμοί αλλά και οι γεωμετρικές μέθοδοι, τμήμα μίας προφορικής παράδοσης που έμεινε ζωντανή μέσα από τις πρακτικές των εμπόρων, των λογιστών, των αρχιτεκτόνων, των καλλιτεχνών που φιλοτεχνούσαν γεωμετρικά μοτίβα και άλλων επαγγελμάτων, τεχνικές που μετουσιώθηκαν σταδιακά σε θεωρητική επιστήμη.

8.1.1 Σημαντικοι μαθηματικοι του Ισλαμικου Κοσμου και αναφορες τους στην μετρηση του Κυκλου

Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850 μ.Χ)

Είναι ο πρώτος και σπουδαιότερος ίσως μαθηματικός του ισλαμικού χώρου,
Πέρσης στην καταγωγή έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στη Βαγδάτη και δραστηριοποιήθηκε στον Οίκο της Σοφίας από τις αρχές της ίδρυσής της.

Το σπουδαίο έργο του με τίτλο «Al-Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa-l-muqābala» δηλαδή «Το συνοπτικό βιβλίο για τον υπολογισμό με την συμπλήρωση και την εξισορρόπηση» που συχνά συναντάμε με το συντομευμένο όνομα «**Al-jabr**» έδωσε το όνομα «Αλγεβρα» στον αντίστοιχο κλάδο των μαθηματικών, δίνοντας για πρώτη φορά συστηματοποιημένα τις μεθόδους επίλυσης πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Επίσης από παράφραση του ονόματός του προκύπτει ο όρος «αλγόριθμος». Αν και η συμβολή του είναι τεράστια τόσο στα μαθηματικά του πολιτισμού του όσο και σε αυτά της Δύσης, εδώ θα περιοριστούμε στην αναφορά του στην μέτρηση του κύκλου.

Σελίδα από το σωζόμενο χειρόγραφο του έργου του al-Khwārizmī «Al-jabr»

Στο δεύτερο μέρος του προαναφερόμενου έργου, περιλαμβάνει κανόνες υπολογισμού του εμβαδού και του όγκου γεωμετρικών σχημάτων, από τους οποίους αυτοί που αφορούν την επιφάνεια και περιφέρεια του κύκλου, σε σύγχρονη απόδοση είναι οι εξής:

$$\mathbf{C = \frac{22}{7}\, d}$$

$$\mathbf{A = \left(1 - \frac{3}{14}\right) d^2}$$

Στο έργο του συναντάμε τρείς διαφορετικές τιμές για τον λόγο της περιφέρειας προς την διάμετρο $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ και $\frac{62832}{20000}$. Την πρώτη την αναφέρει ως προσεγγιστική και τις άλλες δύο ως τιμές που χρησιμοποιούνται από τους γεωμέτρες και τους αστρονόμους αντίστοιχα.

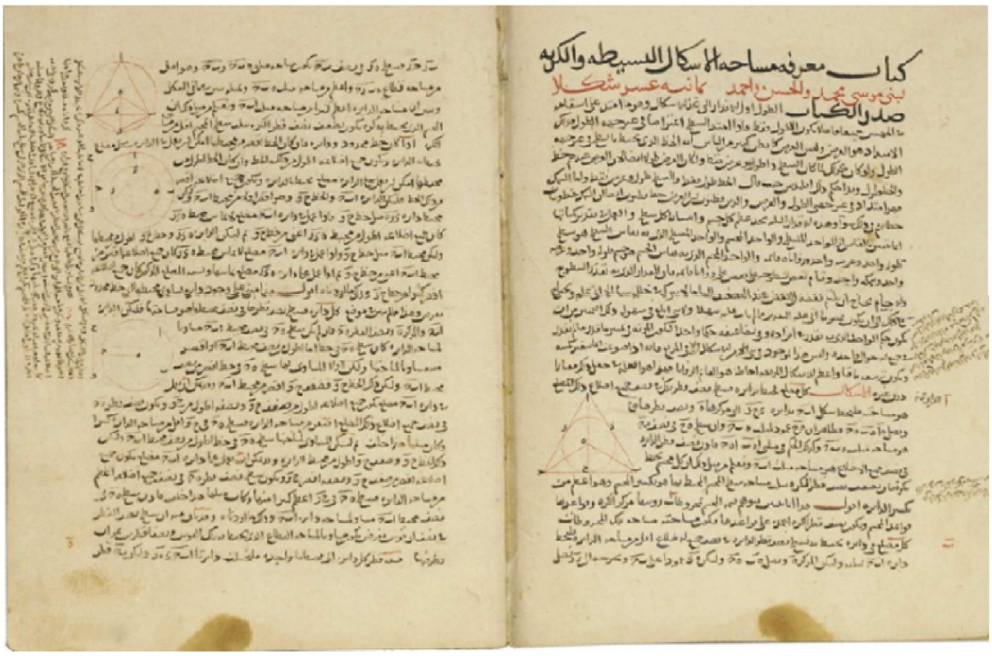
Οι αδερφοί Banū Mūsā (803-873 μ.Χ.)

Ο Musa Ibn Shakir έζησε στην Βαγδάτη στα πρώτα χρόνια της ίδρυσης του χαλιφάτο των Αβασσιδών και υπήρξε στενός ακόλουθος του χαλίφη Al-Mamun.

Μετά τον θάνατό του οι τρεις γιοι του που τότε ήταν σε πολύ νεαρή ηλικία έμειναν υπό την προστασία του χαλίφη. Την μόρφωση τους ανέλαβε ο αστρονόμος Yaḥyā ibn Abī Manṣūr και από νωρίς ήρθαν σε επαφή με τους σημαντικότερους μελετητές της εποχής από τον Οίκο της Σοφίας. Οι **Banū Mūsā,** ή αλλιώς οι **«τρεις αδελφοί»** όπως έμειναν στην ιστορία, δηλαδή οι **Muhamad**, **Ahmad** και **al-Hassan** εξελίχθησαν σε σπουδαίες προσωπικότητες του πολιτιστικού κέντρου αυτού και άφησαν σπουδαίο ερευνητικό έργο πίσω τους.

Αφιερώθηκαν στην αναζήτηση ελληνικών επιστημονικών χειρογράφων την μετάφραση των οποίων, όπως και άλλοι σύγχρονοι ερευνητές, φαίνεται ότι ανέθεταν αρχικά σε έμπειρους μεταφραστές. Λέγεται πως ένας από τους τρεις σε κάποιο ταξίδι του προς αναζήτηση χειρογράφων, συνάντησε, εκτίμησε και προσέλαβε τον μετέπειτα συνεργάτη τους, **Thābit ibn Qurra** από την Harran της Μεσοποταμίας, εκτιμώντας την γλωσσομάθεια και τις ικανότητές του.

Οι αδερφοί Banū Mūsā , μεταξύ άλλων συνέγραψαν το έργο «Tahrir Kitab Ma'rifa Misaha al-Ashkal al-Basita wal-Kurriyya li Banu Musa», δηλαδή **«Το βιβλίο της γνώσης για την μέτρηση των επίπεδων και σφαιρικών σχημάτων»** για το οποίο εκτενέστερη αναφορά γίνεται στην επόμενη παράγραφο, μέσω της μετάφρασής του στα λατινικά.



Χειρόγραφο του 13ου αιώνα. Αντίγραφο της συλλογής αστρονομικών και μαθηματικών έργων από τον Al-Tusi, με τίτλο: «*Majmu'at al-mutawassitat*» Στις δύο αυτές σελίδες βλέπουμε τις τέσσερεις πρώτες πρωτάσεις του έργου των Manu Basa, «*Tahrir Kitab Ma'rifa Misaha al-Ashkal al-Basita wal-Kurriyya*»για την μέτρηση του κύκλου.

al-Kindi (805-873 μ.Χ.)

Γεννήθηκε στις αρχές του $9^{ου}$ αιώνα στην πόλη Κούφα (Kufah, σύγχρονο Ιράκ) και θεωρείται ένας από τους πολυμαθέστερους και πολυγραφότερους μελετητές της περιόδου. Ασχολήθηκε μεταξύ άλλων με την φιλοσοφία, την λογική, την γεωμετρία, την αριθμητική, την αστρονομία, την μουσική αλλά και την ιατρική. Μεγάλωσε και σπούδασε αρχικά στην γενέτειρά του, που αποτελούσε σημαντικό κέντρο της εποχής και στην συνέχεια δραστηριοποιήθηκε στην Βαγδάτη, όπου και έζησε μέχρι το τέλος της ζωής του. Αρχικά στην πόλη αυτή έχαιρε της προστασίας του χαλίφη al-Mamun καθώς και του διαδόχου του al-Mutasim, και εργάστηκε στον Οίκο της Σοφίας ως επικεφαλής μίας μεγάλης και ικανής, όπως φαίνεται ομάδας μεταφραστών που στο όνομά του μετέφρασαν πολλά έργα ελλήνων φιλοσόφων και φυσικών επιστημόνων από την κλασική και την ελληνιστική περίοδο.

Πέραν του μεταφραστικού του έργου, ο al-Kindi έμεινε στην ιστορία με το προσωνύμιο «**ο Άραβας φιλόσοφος**» και υπήρξε από τους πρώτους ισλαμιστές των γραμμάτων που υποστήριξε και επιχειρηματολόγησε την συμβατότητα της φιλοσοφίας με το θεολογικό δόγμα.

Οι επιρροές που διαφαίνονται στα κείμενα που του αποδίδονται άμεσα, είναι κυρίως από τους αριστοτελικούς σχολιαστές αλλά και από την νεοπλατωνική φιλοσοφία. Ενδεικτικά θα αναφέρουμε ένα απόσπασμα από το κείμενο που του αποδίδεται με τίτλο «Περί του συνόλου των έργων του Αριστοτέλη και των προαπαιτούμενων για την εμπέδωση της φιλοσοφίας» (*Fi Kammiya Kutub Aristutalis wa ma yohtaju ilaihi fi tahsil al-falsafa*), που του αποδίδεται:

«(…) Αυτά, λοιπόν είναι τα έργα (του Αριστοτέλη) που αναφέραμε προηγουμένως και αυτά είναι τα έργα για τα οποία πρέπει να έχει γνώση ένας τέλειος φιλόσοφος, αφού μελετήσει πρώτα τα μαθηματικά (…)
Διότι όποιος χωρίς την γνώση των μαθηματικών – και σε αυτά περιλαμβάνω την αριθμητική, την γεωμετρία, την αστρονομία και την μουσική – προσπαθήσει να χρησιμοποιήσει τα έργα αυτά στη ζωή του, δεν θα είναι ικανός να τελειοποιήσει την κατανόησή τους, και όλες του οι προσπάθειες θα τον οδηγήσουν μόνο στο να επαναλαμβάνει όσα μπορεί να ανακαλέσει στην μνήμη του.
Η απόκτηση δε, βαθιάς γνώσης και κατανόησης τους, είναι πράγμα ανέφικτο, αν δεν έχει (κάποιος) ισχυρή βάση στα μαθηματικά.»

Οι γενικότερη ιδεολογία του Al-Kindi δεν ταυτιζόταν πάντα με την κυρίαρχη ιδεολογία των Αβασσιδών. Οι απόψεις του τον έφεραν σε σύγκρουση με σύγχρονους επιφανείς μελετητές της Βαγδάτης και έπεσε σε δυσμένεια όταν, από το 847 μ.Χ., ανατράπηκε η κυρίαρχη ιδεολογία που είχε επιβάλει ο ιδρυτής του Οίκου της Σοφίας. Παρόλα αυτά στους μετέπειτα χρόνους υπήρξαν σημαντικά παραδείγματα φιλοσόφων που υποστήριξαν, ανέπτυξαν αλλά και διαφοροποίησαν το ρεύμα της διδασκαλίας του, με χαρακτηριστικό το παράδειγμα του **al-Farabi**.

Στα έργα που του αποδίδονται από τις λίστες του **Al-Nadim (*Kitab al-fihrist,*** 987 μ.Χ.) συμπεριλαμβάνονται 60 τίτλοι μαθηματικού περιεχομένου. Συχνά τα έργα αυτά είναι υπό την μορφή επιστολών προς επιφανή μέλη της κοινωνίας των Αβασιδών, στις οποίες πραγματεύεται συγκεκριμένα θέματα άλλοτε συντόμως και άλλοτε εκτενώς.

Αν και τα περισσότερα από αυτά τα έργα δεν σώζονται σήμερα, πρόσφατα (1993) δημοσιεύτηκε[104] μία επιστολή που έχει ως θέμα την τρίτη πρόταση του Αρχιμήδη από την πραγματεία «Κύκλου μέτρησις». Αποδέκτης της επιστολής αυτής είναι ο **Yuhanna Ibn Masawayh** (777–857 μ.Χ), επιφανής γιατρός της αυλής εκείνη την περίοδο, ο οποίος φαίνεται να έχει ζητήσει από τον Al-Kindi διευκρινήσεις επί της μεθόδου του Αρχιμήδη. Η επιστολή ξεκινάει ως εξής[105]:

«Είθε ο Θεός να σε οδηγήσει στην αλήθεια που διώχνει κάθε τύφλωση,
και είθε να σε γλιτώσει από τις αμφιβολίες που αφήνουν τα δεινά να μεγαλώνουν.
Έχω κατανοήσει το αίτημά σου: να αναπτύξω την πρόταση του Αρχιμήδη για την προσέγγιση του λόγου μεταξύ της περιφέρειας ενός κύκλου και της διαμέτρου του, εκτενώς, έτσι ώστε να μπορέσεις να την κατανοήσεις. Ο Αρχιμήδης δεν αφήνει στην πρότασή του το πλεονέκτημα σε κάποιον να την συμπληρώσει, μέσω της γεωμετρίας –ούτε σε αυτούς που σπουδάζουν γεωμετρία – οι οποίοι έχουν φτάσει σε τέτοιο επίπεδο. Αλλά για κάποιον που δεν είναι δεξιοτέχνης (στην γεωμετρία) είναι απαραίτητο να επεξηγηθεί η πρόταση, να τραβήξει την προσοχή του σε κάθε περίπτωση, σε ένα μονοπάτι που θα τον οδηγήσει στην κατανόηση. Είναι δυνατόν στην περίπτωση αυτή να επεκταθεί αυτή (η πρόταση) και να επεξηγηθεί κατά τρόπο που δεν είναι απαραίτητος στην τέχνη αυτή (της γεωμετρίας) για κάποιον που είναι εξοικειωμένος μαζί της. Έγραψα στο σημείο αυτό όσα θεωρούσα απαραίτητα, Ζητώ από τον Θεό να σε συνδράμει. Αυτός είναι ο Κύριος της έμπνευσής σου.
Θέλουμε να βρούμε έναν λόγο κοντά σ' αυτόν της περιφέρειας προς την διάμετρο.
(…)»

Αυτή η εισαγωγική σημείωση είναι ίσως αντιπροσωπευτική όχι μόνο για την συγκεκριμένη απόδοση του έργου του Αρχιμήδη, αλλά και για πολλές άλλες αραβικές και λατινικές αργότερα μεταφράσεις του ίδιου έργου κατά τον μεσαίωνα, στις οποίες δεν προστίθεται ουσιαστικά τίποτα επιπλέον πέρα από αναφορές στα αντίστοιχα χωρία από τα Στοιχεία του Ευκλείδη, διευκρινήσεις για τους υπολογισμούς καθώς και συμπλήρωση των λογικών βημάτων των αποδείξεων, όπου αυτό κρινόταν απαραίτητο.

Ωστόσο όπως ακριβώς συμβαίνει και με πολλά άλλα μαθηματικά κείμενα που στηρίζονται σε ελληνικές και ελληνιστικές μεταφράσεις από την ελληνική ή την συριακή γλώσσα στα αραβικά συναντάμε εκφράσεις αλγεβρικού χαρακτήρα που δεν συμβαδίζουν με την μαθηματική γλώσσα των αρχικών δημιουργών τους. Συγκεκριμένα στο συγκεκριμένο κείμενο, οι αριθμητικοί υπολογισμοί διαφέρουν από αυτούς του σχολιαστή του Αρχιμήδη Ευτόκιου, ενώ συμπεριλαμβάνονται λόγοι ευθυγράμμων τμημάτων προς αριθμούς και το αντίστροφο, εκφράσεις δηλαδή που οι μαθηματικοί της ελληνιστικής παράδοσης δεν θα ήταν δυνατόν να αποδεχτούν.

Thābit ibn Qurra (836-901 μ.Χ)

Ο **Al-Sābi' Thābit ibn Qurra al-Harrānī**, δηλαδή ο Σαββαίος[106] στο θρήσκευμα, Thābit ibn Qurra από την Χαρράν της Μεσοποταμίας, είχε μητρική του γλώσσα τα συριακά, γνώριζε όμως άριστα ελληνικά και αραβικά. Τον νεαρό αργυροχόο συνάντησαν και προσκάλεσαν στην Βαγδάτη οι αδερφοί Banu Mūsā, όπως ήδη αναφέραμε. Η μαθητεία του κοντά στους τρεις

[104] R Rashed, al-Kindi's commentary on Archimedes' The measurement of the circle, *Arabic Sci. Philos.* **3** (1) (1993), 7-53.
[105] Η μετάφραση βασίζεται στο ίδιο άρθρο του R Rashed.
[106] Οι Σαββαίοι κατάγονταν τους από τους βαβυλώνιους αστρολάτρες

αδελφούς Banū Mūsā, ανέδειξε τον Thābit ibn Qurra σε ένα εξαίρετο διανοούμενο, μαθηματικό, αστρονόμο, μηχανικό, ιατρό και φιλόσοφο, ο οποίος μετέφρασε από τα ελληνικά και τα συριακά στα αραβικά και σχολίασε έργα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Ειδικότερα στα μαθηματικά, μετέφρασε πολλά έργα αρχαίων, ελληνικά κείμενα, μεταξύ των οποίων και τα *Κωνικά* του Απολλωνίου, ενώ συνέγραψε σχόλια στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και στη *Μαθηματικήν σύνταξιν* του Πτολεμαίου. Προκύπτει επίσης ότι διόρθωσε και επανέκδωσε αρκετά έργα, τα οποία στην συνέχεια υπήρξαν ιδιαίτερα διαδεδομένα και αντιγράφηκαν αρκετές φορές, όπως συνέβη και με το **«Κύκλου Μέτρησις»**.

Τα σωζόμενα σήμερα αραβικά χειρόγραφα του «Κύκλου Μέτρησις», είναι αντίγραφα του μεταγενέστερου μαθηματικού **Al-Tūsī**, βασισμένα στο έργο του Thābit ibn Qurra. Επίσης σ' αυτόν αποδίδεται έργο με παρόμοιο όνομα με αυτό που αναφέραμε ότι συνέγραψαν οι Banū Mūsā.

al - Haytham (965-1039 μ.Χ)

Από τους πλέον γνωστούς στην Δύση επιστήμονες του ευρύτερου ισλαμικού χώρου ο Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham al-Basri, έμεινε γνωστός με το παραφρασμένο όνομα **Αλχαζέν** (από το επωνύμιο al-Hasan). Η δράση του εκτίνεται σε πολλούς τομείς της επιστήμης, με σημαντικότερο ίσως το έργο του στην οπτική και αναφορές τον θέλουν να δραστηριοποιείται τόσο στην Βαγδάτη, όσο και στο Κάιρο και την Ιβηρική χερσόνησο.

Το όνομά του, μεταξύ άλλων, συνδέθηκε με τους **μηνίσκους** του Ιπποκράτη (lunes of Alhazen). Γνωρίζουμε ότι ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό των μηνίσκων. Δεν γνωρίζουμε ωστόσο αν και με ποιον τρόπο συνέδεσε την εργασία του αυτή με τον τετραγωνισμό του κύκλου όπως λέγεται ότι έκανε, αφού το αντίστοιχο έργο του δεν σώθηκε.

al -Biruni (973-1048 μ.Χ)

Πέρσης πολυμαθής επιστήμονας, του 11ου αιώνα, που άφησε πλούσιο και σημαντικό έργο σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς των επιστημών. Γνωρίζουμε ότι ταξίδεψε στην νότια και κεντρική Ασία και ασχολήθηκε εξίσου με τις θετικές και τις ανθρωπιστικές επιστήμες. Έγραψε στην περσική και αραβική γλώσσα, ενώ γνώριζε επίσης ελληνικά και σανσκριτικά. Οι ιστορικές και ανθρωπολογικές μελέτες του παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ενώ θεωρείται ο πρώτος μουσουλμάνος επιστήμονας που μελέτησε και έγραψε για την ινδική και βραχμανική παράδοση.

Εισήγαγε πολλές από τις διάφορες τοπικές ινδικές παραδόσεις των μαθηματικών στα αραβικά. Αν και η σύγχρονη έρευνα δεν έχει ολοκληρωμένη εικόνα για τις μεταβάσεις αυτές, στα κείμενά του γίνεται φανερό το ενδιαφέρον τουλάχιστον για τις υπολογιστικές μεθόδους και τις τεχνικές που κυρίως αφορούν στην αστρονομία.

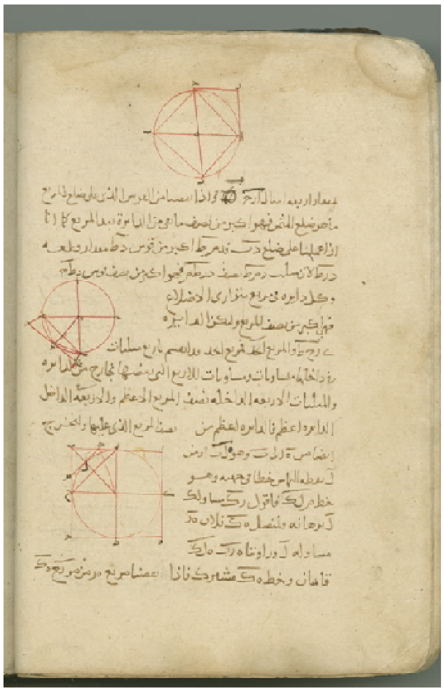
Ο Al-Birouni παραθέτει στα έργα του διάφορες ινδικές και μη, τιμές για τον σύγχρονο αριθμό π και δηλώνει ότι ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να εκφραστεί επακριβώς ως λόγος δύο άλλων.

Στο έργο του «Al-Qanun al-Masudi, Abu Al-Rayhan», δηλαδή στον «Κανόνα του al-Masudi», ένα έργο που αναφέρεται στις μέχρι τότε γνωστές αστρονομικές θεωρίες και τους αριθμητικούς και γεωμετρικούς κανόνες που απαιτούνται για την μελέτη των ουράνιων σωμάτων. Στο πέμπτο κεφάλαιο του τρίτου βιβλίου που φέρει τον τίτλο «Για τον λόγο μεταξύ της περιφέρειας και της διαμέτρου», υπολογίζει τις περιφέρειες ενός περιγεγραμμένου και ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο πολυγώνου, βρίσκοντας τον αριθμητικό μέσο και υπολογίζοντας το π = 3,14174…

Naṣīr al-Dīn al-Tūsī (1201-1274 μ.Χ)

Ένας από τους πλέον αναγνωρισμένους επιστήμονες του ισλαμικού χώρου, αστρονόμος, μαθηματικός, θεολόγος, φυσικός. Με δική του προτροπή ο Μογγόλος κατακτητής Hulagu Khan, το 1259, χρηματοδότησε την ανέγερση του πειραματικού παρατηρητηρίου, στην περσική πόλη Maragha. Επανδρωμένο με τους πλέον έμπειρους αστρονόμους της εποχής, το νέο αυτό ίδρυμα δίδαξε και ανέδειξε μία νέα γενιά ερευνητών. Ο ίδιος ο **al-Tūsī**, είχε πλούσιο συγγραφικό έργο (πάνω από 100 συγγράμματα του αποδίδονται) ενώ σ' αυτόν αποδίδονται τα σωζόμενα χειρόγραφα του «Κύκλου Μέτρησις» και του έργου των Banū Mūsā για τις μετρήσεις επίπεδων και σφαιρικών επιφανειών που θα δούμε στην συνέχεια.

Ο Al-Tūsī συγγράφει στο αστεροσκοπείο της Maragha, το 1259. Εικονογράφηση του 16^{ου} αι. που (British Library, Λονδίνο)



Η σελίδα αυτή είναι από ένα μεταγενέστερο αντίγραφο των σχολίων στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Στο σημείο αυτό αναφέρεται στην μέθοδο εξάντλησης

Jamshīd al-Kashī (1380- 29)

O Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd al-Kāshī, είναι ένας από τους τελευταίους εκπρόσωπους αυτής της περιόδου. Περσικής καταγωγής, ο al-Kāshī, όπως συνήθως αποκαλείται, γεννήθηκε στην περιοχή Kashan του σύγχρονου Ιράν, από την οποία και πήρε το όνομά του.

Τα τελευταία χρόνια της ζωής του, τα οποία υπήρξαν ιδιαίτερα παραγωγικά, εργάστηκε και δίδαξε στην φημισμένη σχολή που ιδρύθηκε στην Σαμαρκάνδη (**Samarkand**), πρωτεύουσα της αυτοκρατορίας που είχε δημιουργήσει με τις κατακτήσεις του ο Ταμερλάνος, από τον επίσης μαθηματικό και αστρονόμο, απόγονό του Ταμερλάνου, **Ulugh Beg** γύρα στα **1420**. Στο ίδρυμα αυτό κατασκευάστηκε επίσης σημαντικό αστρονομικό παρατηρητήριο που σώζεται μέχρι σήμερα. Εκεί μεταξύ άλλων ο al-Kāshī, συνέγραψε την περίφημη «Πραγματεία για την Περιφέρεια» (***al-Risali al-mohitije***), το **1924**, στην οποία υπολογίζει την περιφέρεια κύκλου με εξαιρετική για την εποχή εκείνη ακρίβεια.

Αν και στην εργασία αυτή δεν περιλαμβάνονται γενικά μετρήσεις που βασίζονται σε τριγωνομετρικές προτάσεις, θα αναφέρουμε σύντομα κάποια από τα στοιχεία της σημαντικής πραγματείας, βασισμένοι στην παράδοση του μαθήματος «Ιστορίας μαθηματικών» του καθηγητή **Μ. Λάμπρου**[107] το 2003:

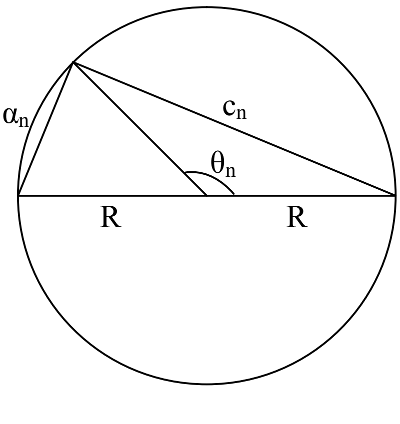
α) αποδεικνύει την ταυτότητα $\eta\mu(45^o + \frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1+\eta\mu\theta}{2}}$

β) Θέτει $\theta_n = 180^o - \frac{360^o}{3\cdot 2^n}$ και c_n: χορδή τόξου γωνίας θ_n (n = 1, 2,…) σε κύκλο ακτίνας R.

Ισχύει δηλαδή $c_n = 2R\cdot\eta\mu\frac{\theta_n}{2}$ και από την υπόθεση για το θ_n και από το α) έπεται ότι: $c_n = \sqrt{R(2R + c_{n-1})}$

γ) Επαγωγικά διαπιστώνεται ότι γενικά ισχύει:

$$c_n = \underbrace{R\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots. + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}_{n - \text{ριζικά}}$$



δ) Θέτει α_n = χορδή τόξου $(180^o - \theta_n)$

= χορδή τόξου $(\frac{360^o}{3\cdot 2^n})$

Άρα α_n = πλευρά κανονικού $3\cdot 2^n$ – γώνου

Έτσι από Πυθαγόρειο θεώρημα: $(\alpha_n)^2 + (c_n)^2 = (2R)^2$, οπότε $\alpha_n = \sqrt{4R^2 - (c_n)^2}$

και από το γ) προκύπτει: $$\alpha_n = \underbrace{R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots. + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}_{n - \text{ριζικά}}$$

[107] Μαθηματικό Τμήμα Σχολής Θετικών επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

ε) Επειδή η α_n είναι η πλευρά κανονικού $3{\cdot}2^n$ – γώνου, η περίμετρος αυτού θα είναι προφανώς, $3{\cdot}2^n \cdot \alpha_n$. Για μεγάλα n, όμως, η περίμετρος αυτή είναι όσο κοντά θέλουμε στο μήκος της περιφέρειας του κύκλου. Άρα $2\pi R \cong 3{\cdot}2^n \cdot \alpha_n$ και για R = 1

έχουμε: $$2\pi \cong 3 \cdot 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots . + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}})$$

Παίρνοντας n = 28 και βέβαια μετά από πολλές πράξεις, λόγο των ριζών, στο **εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης**, ο al-Kāshī κατέληξε στην τιμή:

2π = 06, 16 59 28 34 51 46 15 50

Την τιμή αυτή μετέτρεψε στην συνέχεια, και αυτό έχει ιδιαίτερη αξία, στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, παίρνοντας το αποτέλεσμα:

2π = 6.2831853071795865

Γνωρίζουμε ωστόσο ότι υπολόγισε στο δεκαδικό σύστημα την περιφέρεια και για R = 2, 3, …, 10 και με τα αποτελέσματα αυτά συνέταξε έναν μετρολογικό πίνακα που φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί.

Ο πίνακας αυτός είναι γραμμένος σε χαρτί και φυλάσσεται σήμερα στην βιβλιοθήκη του τεμένους του Ιμάμ Ρεζά, στην πόλη Mashad του ανατολικού Ιράν.

Στην δεξιά στήλη φαίνονται από πάνω προς τα κάτω οι αριθμοί 1 μέχρι και 10 με αύξουσα σειρά, Τα δεκαδικά αυτά ψηφία (με το μηδέν να σημειώνεται με μία τελεία), δεν απέχουν πολύ από τα σύγχρονα δεκαδικά ψηφία. Η πρώτη γραμμή δίνει την περιφέρεια κύκλου με ακτίνα R=1, δηλαδή την τιμή για το σύγχρονο 2π, η δεύτερη με R = 2, δηλαδή ισούται αντίστοιχα με 4π και ούτω καθεξής. Οι αριθμοί διαβάζονται (σε αντίθεση με το κείμενο) από τα αριστερά προς τα δεξιά όπως τους γνωρίζουμε. Στην 5η γραμμή όπου και σημειώνεται και ένα βέλος (➤) στο διπλανό σχήμα, ο αριθμός παριστάνει την περιφέρεια κύκλου ακτίνας R = 5, δηλαδή δίνει την τιμή 10π και διαβάζουμε ότι αυτό ισούται με:

3 1, 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2

Το αποτέλεσμα των υπολογισμών του δίνει σωστά τα πρώτα 17 δεκαδικά ψηφία του σύγχρονου αριθμού π και ξεπερνούσε σε ακρίβεια τους υπολογισμούς κάθε άλλου μέχρι εκείνη την περίοδο, μάλιστα ο ίδιος ο al-Kāshī σημειώνει στο έργο του ότι στόχος του είναι να υπολογίσει την περιφέρεια του «κόσμου» (σύμπαντος) με απόκλιση μίας «τρίχας αλόγου» (περσική μονάδα μέτρησης μήκους ≅ 0, 7mm).

8.2 Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΣΤΗΝ ΔΥΣΗ

8.2.1 ΟΙ ΠΡΩΤΕΣ ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΙΣ ΤΟΥ «ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ» ΣΤΑ ΛΑΤΙΝΙΚΑ

α) Από τα αραβικά:

Όπως ήδη αναφέραμε στην εισαγωγή η πρώτη επαφή του Δυτικού κόσμου με το έργο του Αρχιμήδη, ήταν μέσω της μετάφρασης του «Κύκλου Μέτρησις» από τα αραβικά στα λατινικά. Η πρώτη μετάφραση έγινε από τον **Plato από το Tivoli** της Ιταλίας, το διάστημα **1134-45** στην Βαρκελώνη της Ισπανίας. Τα χειρόγραφα που σώζονται σήμερα από την μετάφραση αυτή ένα του 13^{ου} αιώνα και δύο αντίγραφα του 16^{ου} αιώνα. Στα χειρόγραφα αυτά η 3^{η} πρόταση δεν είναι ολοκληρωμένα παρουσιασμένη και υπάρχουν αρκετά λάθη στους υπολογισμούς.

Μεσαιωνική απεικόνιση μοναχού κατά την διάρκεια εργασίας του στην αίθουσα αντιγραφέων ενός μοναστηριού. Στην εικόνα φαίνονται αρκετές λεπτομέρειες για τον εξοπλισμό αυτής της δραστηριότητας.

Η επόμενη μετάφραση του έργου, που υπήρξε αναμφισβήτητα πιο αναγνωρισμένη και διαδεδομένη, έγινε στο Τολέδο της Ιταλίας **στα τέλη του 12^{ου} αιώνα**, αποδίδεται με μεγάλη πιθανότητα στον **Gerard από την Cremona** της βόρειας Ιταλίας, και φέρει τον τίτλο «**De Mensura Circuli**». Η μετάφραση αυτή αντιγράφηκε αρκετές φορές και σήμερα υπάρχουν τουλάχιστον 12 χειρόγραφα που αποδεικνύεται ότι απορρέουν απ' αυτήν, αν και φέρουν διαφορετικούς τίτλους.

Το σημαντικότερο ίσως χαρακτηριστικό της μετάφρασης αυτής είναι ότι **την πρώτη πρόταση ακολουθούν δύο πορίσματα που δεν συναντάμε στις μεταφράσεις που προέρχονται από τα ελληνικά χειρόγραφα**. Μάλιστα το ένα από αυτά αφορά στο εμβαδό κυκλικού τομέα σε συνάρτηση με το τόξο του τομέα και την ακτίνα του κύκλου.

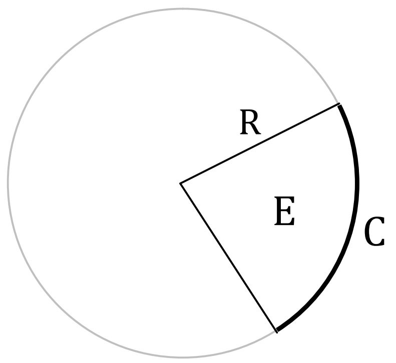
Ο **Ήρων ο Αλεξανδρινός** στα Μετρικά αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης απέδειξε το λήμμα αυτό στο έργο του «Κύκλου Μέτρησις»:

(…) δέδεικται δὲ Ἀρχιμήδει ἐν τῇ τοῦ κύκλου
μετρήσει, ὅτι πᾶς τομεὺς ἥμισύς ἐστι τοῦ περιεχομένου
ὑπό τε τῆς τοῦ τομέως περιφερείας καὶ τῆς ἐκ τοῦ
κέντρου τοῦ κύκλου, οὗ ἔστιν ὁ τομεύς· (…)

Ήρωνος, Μετρικά Ι, 37, 20-23)

Ας δούμε το δεύτερο αυτό πόρισμα που αναφέρει ο Ήρων, όπως αυτό παρουσιάζεται σε ένα από τα πρώτα χειρόγραφα[108] που απορρέουν από την μετάφραση του Gerard of Cremona, και το οποίο έχει εκδοθεί το 1964 από τον Marshall Clagett:

[Corollarium II:] ***Et propter hoc erit multiplication medietis diametric in medietatem portionis circumferentie area gigure que continetur ab illa portione et duabus lineis egredientibus a duabus axtemitatibus portionis ad centrum. Et illud est cuius voluimus declarationem.***



<u>Μετάφραση</u>:

Και αναλόγως, το γινόμενο της ακτίνας και του μισού ενός τόξου από την περιφέρεια, ισούται με την επιφάνεια του σχήματος (κυκλικού τομέα) το οποίο περιέχεται από το τόξο αυτό και τις δύο ακτίνες που φέρονται από τα άκρα του τόξου. Και αυτό είναι που θέλαμε να δείξουμε. Δηλαδή: $\mathbf{E = R \cdot \frac{C}{2}}$

Το πρώτο πόρισμα με αρκετά πιο σύνθετη διατύπωση συμπεραίνει αμέσως μετά την απόδειξη της πρώτης πρότασης του έργου, ότι το γινόμενο της ακτίνας επί την ημιπεριφέρεια του κύκλου δίνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει επιφάνεια όση ο κύκλος.

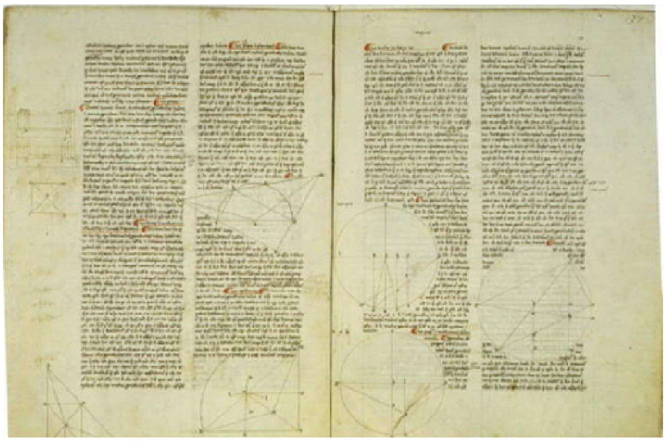
Το γεγονός ότι η μετάφραση του Gerard από την Cremona περιέχει, όπως φαίνεται έστω από τα αρχικά της αντίγραφα, τα δύο πορίσματα αυτά της 1^{ης} πρότασης, καταδεικνύει, όπως υποστηρίζει ο Clagett[109], ότι το αραβικό κείμενο στο οποίο στηρίζεται, προέρχεται από μία παράδοση έτερη της βυζαντινής, στην οποία ανήκει ο κώδικας Α.

β) Από τα ελληνικά:

Λίγο αργότερα στα μέσα του 13^{ου} αιώνα και ενώ οι προηγούμενες μεταφράσεις φαίνεται να έχουν επηρεάσει αρκετές σύγχρονες πραγματείες, δίνοντας μία αρκετά περιορισμένη εικόνα του έργου του Αρχιμήδη, μεταφράζεται στα λατινικά το σύνολο των σωζόμενων μέχρι τότε έργων του Αρχιμήδη. Η μετάφραση αυτή αποδίδεται στον

[108] Paris, BN lat. 9335, 28V – 29V, 14C.
[109] M. Clagett, (1964) Archimedes in the Middle Ages. Vol I: The Arabo-Latin Tradition. Madison: University of Wisconsin Press, σελ. 32

Φλαμανδό δομινικανό, **William από το Moerbeke**[110] και έλαβε χώρα το **1269** στο παλάτι του πάπα στην ιταλική πόλη Viterbo. Για την μετάφραση αυτή χρησιμοποιήθηκαν τα ελληνικά χειρόγραφα, ο λεγόμενος κώδικας Α, που μέχρι εκείνη την στιγμή είχαν περάσει στα χέρια της Δύσης, μετά την Δ' Σταυροφορία και την λαφυραγώγηση των βιβλιοθηκών της Κωνσταντινούπολης.

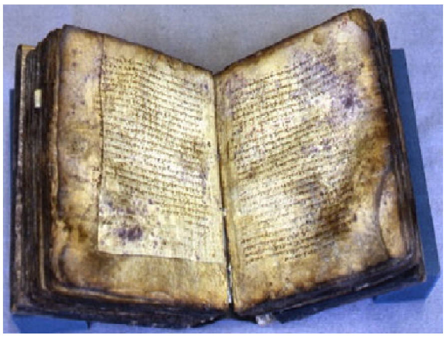


Λατινική μετάφραση των Απαντων του Αρχιμήδη από τον William of Moerbeke (περίπου 1270)

Ο William του Moerbeke είχε στην διάθεση του **δύο ελληνικά χειρόγραφα, τα ίχνη των όποιων χάνονται το 1311 και τον 16º αιώνα αντίστοιχα**. Το δεύτερο από αυτά και μέχρι που χάθηκε αντιγράφηκε αρκετές φορές, κάποια αντίγραφα του οποίου, σώθηκαν μέχρι σήμερα.

Η πλέον διαδεδομένη έκδοση των απάντων του Αρχιμήδη στην λατινική γλώσσα έγινε στα τέλη της μεσαιωνικής περιόδου, από τον Sento **Cassiano Cremonensis** και συμπεριελάμβανε επίσης τα σωζόμενα σχόλια του Ευτόκιου. Το έργο του τυπώθηκε το **1544** και αποτέλεσε την κύρια βιβλιογραφία της Αναγέννησης.

Ο επόμενος πιο άξιος μελετητής του έργου του Αρχιμήδη υπήρξε ο **Heiberg**, πέντε αιώνες αργότερα, το έργο του οποίου υπήρξε καθοριστικό στην συλλογή και έκδοση των έργων του Αρχιμήδη, καθώς και στην ιχνηλάτηση της διαδρομής τους μέχρι την σύγχρονη εποχή (**πρώτη έκδοση 1880-1).** Μάλιστα ο ίδιος είναι υπεύθυνος για την αναγνώριση ενός επιπλέον, χαμένου ελληνικού χειρογράφου του 10ου αιώνα που περιείχε μεταξύ άλλων την άγνωστη μέχρι τότε μηχανική μέθοδο με την οποία ο Αρχιμήδης ανακάλυπτε την ισχύ των θεωρημάτων που στη συνέχεια αποδείκνυε, κάτω από ένα θρησκευτικό κείμενο, που εν είδη παλίμψηστου είχε καλύψει το σπουδαίο αυτό έργο. Το κείμενο αυτό έγινε προσπάθεια με τα ελάχιστα μέσα της εποχής, να αντιγραφεί και μεταφραστεί από τον Heiberg, που τελικά το συμπεριέλαβε στην δεύτερη έκδοση του έργου του (**1910-5**), ενώ μετά από δαιδαλώδη διαδρομή βρίσκεται σήμερα στην διάθεση σύγχρονων ερευνητών και μία νέα έκδοση αναμένεται να αποδώσει με ακρίβεια το περιεχόμενό του.



Και άλλα σημαντικά έργα ακολούθησαν το παράδειγμα του Heiberg [**Heath (1897), Clagett (1964), Dijksterhuis (1987), Σταμάτης (1970-3), Netz (2204)**], όμως εμείς θα εστιάσουμε στο ρόλο των πρώτων λατινικών μεταφράσεων, πριν την μετάβαση στη «σύγχρονη ανάλυση». Το έργο του Heiberg, στο σύνολό του, αν εξαιρέσουμε τον λεγόμενο κώδικα C, όπως ο ίδιος αναφέρει το ελληνικό χειρόγραφο που ανακάλυψε αργότερα, βασίστηκε σε έργα που προέρχονταν από την μετάφραση του William του Moerbeke Μέχρι και από ελληνικά αντίγραφα του δεύτερου χειρογράφου που ο ίδιος χρησιμοποίησε στην μετάφρασή του.

[110] Η περιοχή Moerbeke σήμερα αποτελεί δήμο του σύγχρονου Βελγίου.

Αν και ο Heiberg στο έργο του υποστηρίζει ότι η πρώτη αυτή μετάφραση των ελληνικών χειρογράφων, δεν είχε καμία επιρροή στους Μεσαιωνικούς χρόνους, ο Clagett εύστοχα σημειώνει ότι το άγνωστο μέχρι τότε έργο του Αρχιμήδη **«Περι ελίκων»**, αξιοποιήθηκε εκ νέου και συνέβαλε στην εμφάνιση συνθετικών πραγματειών με θέμα τον «τετραγωνισμό του κύκλου». Σε μία τέτοια πραγματεία θα αναφερθούμε στην παράγραφο 8.2.3.

Τέλος να σημειώσουμε ότι η μετάφραση του «Κύκλου Μέτρησις» μαζί με αυτήν του «Τετραγωνισμού παραβολικού χωρίου» από τον William του Moerbeke, υπήρξαν τα πρώτα τυπωμένα έργα του Αρχιμήδη, τα οποία δημοσιεύτηκαν στην Βενετία το 1503.

8.2.2 «VERBA FILIORUM» των **Banū Mūsā**

Την ίδια εποχή που έγιναν οι πρώτες μεταφράσεις του «Κύκλου Μέτρησις» από την αραβική στην λατινική γλώσσα, μεταφράστηκε, επίσης από τον **Gerard of Cremona**, ένα δημοφιλές στον αραβικό χώρο έργο των αδελφών **Muhamad**, **Ahmad** και **al-Hassan ibn Mūsā ibn Shakir** (Banū Mūsā), με τίτλο *«Kitab marifat masakhat al-ashkal Kitab marifat masakhat al-ashkal»,* δηλαδή «Το βιβλίο για την μέτρηση των επίπεδων και σφαιρικών σχημάτων». Ο λατινικός τίτλος της μετάφρασης του έργου αυτού είναι «***Verba filiorum Moysi filii Sekir, i.e. Maumeti, Hameti, Hasen***.»[111], και συνήθως αναφέρεται προς συντομία ως «Verba filiorum».

Σ' αυτό πραγματεύονται μεταξύ άλλων η μέτρηση του κύκλου και της σφαίρας βασισμένη στο Αρχιμήδειο έργο, το πρόβλημα της εύρεσης μέσων αναλόγων και το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας, το θεώρημα του Ήρωνος για το εμβαδό τριγώνου και μέθοδοι υπολογισμού κυβικών ριζών.

Το έργο αυτό όσο αφορά την μελέτη της μέτρησης του κύκλου παρουσιάζει ενδιαφέρον στα εξής σημεία:

1. Παρουσιάζει την 1η πρόταση του «Κύκλου Μέτρησις» με ελαφρώς διαφοροποιημένο τρόπο.
2. Περιέχει την απόδειξη της 3ης πρότασης με υπολογισμούς που θυμίζουν αυτούς των σχολίων του Ευτόκιου.
3. Εισήγαγε την έκφραση $\mathbf{E = \pi\, r^2}$, συμπληρώνοντας την Αρχιμήδεια $E = \frac{1}{2} C \cdot r$, για τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου
4. Αντί για το σύγχρονο σύμβολο π, οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν την έκφραση **«η ποσότητα που αν πολλαπλασιαστεί με την διάμετρο, παράγει την περιφέρεια»**

[111] Στον μεσαιωνικό κατάλογο που περιλαμβάνει τους τίτλους των μεταφραστικών έργων του Gerard of Cremona, καταχωρείται ως *Liber trium fratrum (de geometria).*

Το κείμενο των Banū Mūsā δεν σώζεται σήμερα στα αραβικά, αλλά γνωρίζουμε από λίστες με αραβικά έργα που στοιχειοθετήθηκαν μετά τον 10^{ο} αιώνα[112], ότι χρησίμευσε ως διδακτικό εγχειρίδιο και αντιγράφηκε αρκετές φορές. Ο Al-Tūsī, τον 13^{ο} αιώνα, το διασκεύασε για τον ίδιο λόγο. Σήμερα σώζονται μεταγενέστερα αντίγραφα από το αντίστοιχο έργο του Al-Tūsī. Ωστόσο εκτιμάται ότι η απόδοση του Al-Tūsī, λόγω του διδακτικού σκοπού που καλείτο να εξυπηρετήσει, δεν είχε ως πρώτο μέλημα την διατήρηση της αρχικής μορφής του έργου των Banū Mūsā, αλλά σε πολλά σημεία το νόημα είναι συνεπτυγμένο και επικεντρώνεται στην κατανόηση των εννοιών.

Η μετάφραση του Gerard of Cremona προηγείται προφανώς από το χειρόγραφο του Al-Tūsī και γίνεται πιθανώς από το ίδιο το κείμενο των Al-Tūsī. Εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε **αποσπάσματα από το έργο** αυτό τις που αφορούν την μέτρηση του κύκλου, βασιζόμενοι στην μετάφραση του Marshall Clagett[113], που μελέτησε και τα οκτώ σωζόμενα χειρόγραφα της μετάφρασης του Gerard of Cremona.

Παραθέτουμε εδώ το πρώτο μέρος του εισαγωγικού σημειώματος έτσι ώστε να πάρουμε μία εικόνα της πρόθεσης και οπτικής των συγγραφέων:

<u>Μετάφραση</u>[114] (Εισαγωγή):

«Επειδή έχουμε δει (1) ότι υπάρχει ανάγκη εφαρμογής της γνώσης για την μέτρηση της επιφάνειας σχημάτων ή του όγκου στερεών και έχουμε δει (2) ότι υπάρχουν μερικά πράγματα, η γνώση των οποίων είναι απαραίτητη για αυτόν τον τομέα μάθησης, αλλά τα οποία – όπως μας φαίνεται – κανένας μέχρι την εποχή μας δεν κατανοεί και [(3) ότι] υπάρχουν κάποια πράγματα που ακολουθούμε επειδή κάποιοι από τους αρχαίους που έζησαν στο παρελθόν επιδίωξαν να κατανοήσουν και ακόμα η γνώση δεν έφτασε σε μας, ούτε κανένας από αυτούς που έχουμε ερευνήσει (φαίνεται να) κατανοεί και [(4) ότι] υπάρχουν κάποια πράγματα τα οποία κάποιοι από τους πρώτους σοφούς κατανόησαν και έγραψαν γι' αυτά στα βιβλία τους, αλλά η γνώση των οποίων, αν και φτάνει μέχρι εμάς, δεν είναι συνήθης στην εποχή μας – για όλους αυτούς τους λόγους, μας φάνηκε ότι έπρεπε να συνθέσουμε ένα βιβλίο στο οποίο να παρουσιάζουμε τα απαραίτητα μέρη αυτής της γνώσης που μας έγινε φανερή.(…)»

Το πρώτο πράγμα που παρουσιάζεται στο γεωμετρικό αυτό έργο είναι η μέτρηση του κύκλου. Σε αντιστοιχία με το έργο του Αρχιμήδη η πρώτη πρόταση που αποδεικνύεται είναι αυτή που αναφέρεται στο εμβαδό του κύκλου σε σχέση με την περιφέρεια και την ακτίνα. Ωστόσο ενώ ο Αρχιμήδης συγκρίνει τον κύκλο με ένα ορθογώνιο τρίγωνο, στο «Verba filiorum» η πρόταση αναφέρεται στο γινόμενο της ακτίνας με την ημιπεριφέρεια. Πριν διατυπωθεί η πρόταση αυτή και για να είναι δυνατή η απόδειξή της διατυπώνονται τρεις προτάσεις που δηλώνονται χωρίς απόδειξη και λειτουργούν στην συνέχεια από τις ακόλουθες προτάσεις ως αξιώματα. Οι πρώτες δύο αναφέρονται στις περιμέτρους εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε κύκλο κανονικά πολύγωνων:

[112] Όπως οι κατάλογοι του Ibn al-Nadim στο έργο «Kitab al-fihrist» του 10^{ου} αιώνα.
[113] M. Clagett, (1964), σελ. 238-279
[114] M. Clagett, (1964), σελ. 239

<u>Μετάφραση</u>[115]:

I. «Για κάθε (κανονικό) πολύγωνο που περιέχει έναν κύκλο, το γινόμενο της ακτίνας του κύκλου με το μισό της περιμέτρου του πολυγώνου που περιέχει τον κύκλο είναι η επιφάνεια του πολυγώνου.»[116]

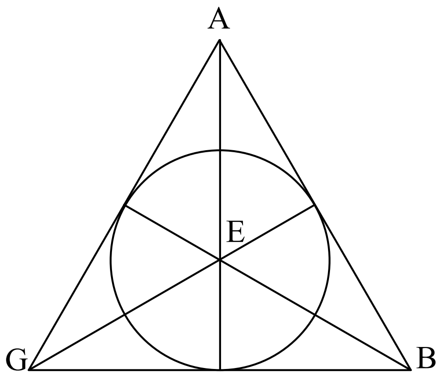
<u>Παρατηρήσεις</u>:
Η πρόταση δεν αποδεικνύεται γενικά αλλά μόνο για την περίπτωση του κανονικού περιγεγραμμένου τριγώνου ως εξής:
τριγώνου

$\frac{1}{2}$ EH· GB = △ GEB

$\frac{1}{2}$ EH· AB = △ BEA

$\frac{1}{2}$ EH· AG = △ AEG

Άρα EH· $\frac{1}{2}$(GB + AB + AG) = △ ABG



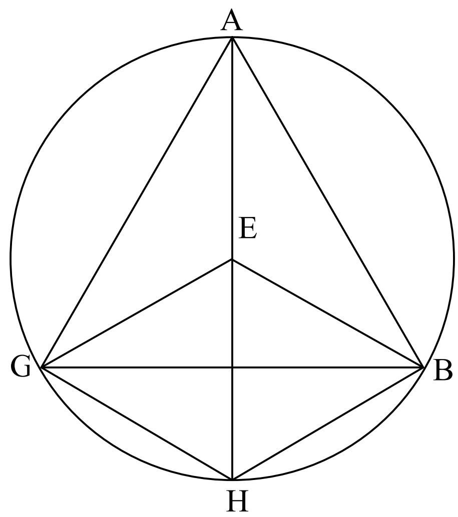
<u>Μετάφραση</u>[117]:

II. «Το γινόμενο της ακτίνας ενός κύκλου με το μισό της περιμέτρου κάθε κανονικού πολυγώνου που περιέχεται σε κύκλο είναι μικρότερο από την επιφάνεια του κύκλου.»[118]

<u>Παρατηρήσεις</u>:

Αντίστοιχα με την πρώτη, η δεύτερη πρόταση δεν αποδεικνύεται γενικά αλλά μόνο για την περίπτωση του κανονικού εγγεγραμμένου τριγώνου ως εξής:

Φέρουμε από το κέντρο E, τις γραμμές EB και EG και την κάθετη στην GB που την τέμνει στο K και προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο H.
Φέρνουμε και τις γραμμές GH και HB.
Οπότε ισχύει:
EH· $\frac{1}{2}$ BG = (△ TBG + △ BHG)



---

[115] M. Clagett, (1964), σελ. 247-9

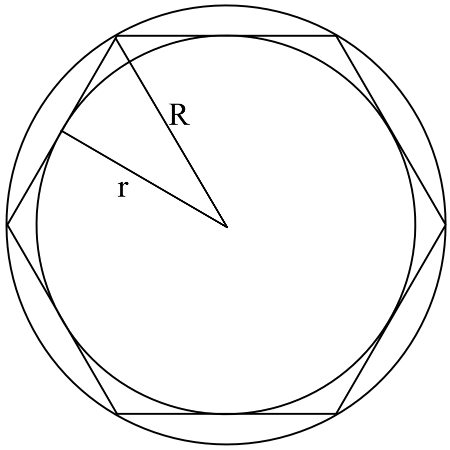
[116] Ακολουθεί αντίστοιχο Λήμμα για κανονικό στερεό περιγεγραμμένο σε σφαίρα:
Το γινόμενο της ακτίνας της σφαίρας επί το $\frac{1}{3}$ της επιφάνειάς του περιγεγραμμένου στερεού είναι ο όγκος του στερεού.

[117] M. Clagett, (1964), σελ. 251-3

[118] Ακολουθεί αντίστοιχο Λήμμα για κανονικό στερεό εγγεγραμμένο σε σφαίρα:
Το γινόμενο της ακτίνας της σφαίρας επί το $\frac{1}{3}$ της επιφάνειας του εγγεγραμμένου στερεού δίνει πάντα μέγεθος μικρότερο του όγκου της σφαίρας.

Στην συνέχεια δηλώνεται ότι:
«Με τρόπο αντίστοιχο γίνεται γνωστό ότι»
$\mathrm{EH}\cdot \frac{1}{2}(\mathrm{GB} + \mathrm{AB} + \mathrm{AG}) <$ κύκλο ABG

<u>Σύγχρονη απόδοση</u>:



Δηλαδή αν:

P_n: περιφέρεια ενός κανονικού n-γώνου και
R: η ακτίνα του περιγεγραμμένου
στο n-γωνο κύκλου
r: η ακτίνα του εγγραμμένου
στο n-γωνο κύκλου

Ισχύουν: **I.** $\mathbf{R\cdot \frac{1}{2} P_n < E_{\text{κύκλου}}}$

II. $\mathbf{r\cdot \frac{1}{2} P_n = E_{n\text{-γώνου}}}$

Το τρίτο θεώρημα έχει δύο σκέλη και θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια προς αντικατάσταση της μεθόδου της εξάντλησης αφού αφορά την δυνατότητα κατασκευής ενός κανονικού πολυγώνου υπό δεδομένες προϋποθέσεις. Ας δούμε όμως πως διατυπώνεται το θεώρημα αυτό στο κείμενο:

<u>Μετάφραση</u>[119]:

III. «Δοσμένου ευθυγράμμου τμήματος και κύκλου:
(i) Αν το ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο από την περιφέρεια του κύκλου τότε είναι δυνατό να κατασκευαστεί εγγεγραμμένο[120] (κανονικό) πολύγωνο του οποίου η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.[121]
(ii) Αν το ευθύγραμμο τμήμα είναι μεγαλύτερο από την περιφέρεια του κύκλου τότε είναι δυνατό να κατασκευαστεί περιγεγραμμένο[122] (κανονικό) πολύγωνο του οποίου η περίμετρος είναι μικρότερη από το δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.»

[119] M. Clagett, (1964), σελ. 253
[120] Η λέξη «εγγεγραμμένο» στο κείμενο περιγράφεται με την φράση «μέσα στον κύκλο πολύγωνο που περιβάλλεται απ' αυτόν».
[121] Να σημειώσουμε ακόμα ότι την συγκεκριμένη πρόταση των Στοιχείων χρησιμοποίησε και **Legendre** το **1794** προσθέτοντας της το λήμμα που προκύπτει από την ίδια, ότι δηλαδή δοθέντων δύο κύκλων είναι δυνατή και η κατασκευή περιγεγραμμένου πολυγώνου στον μικρότερο από αυτούς, χωρίς αυτό να ακουμπάει τον μεγαλύτερο, για να αποδείξει την πρόταση XII. 2. Η απόδειξή του αυτή συμπεριλήφθηκε στην πολύ διαδεδομένη έκδοση των Στοιχείων από τον Legendre που αποτέλεσε διδακτικό εγχειρίδιο για περισσότερο από έναν αιώνα. Στην ίδια έκδοση ο Legendre αποδεικνύει ότι το π είναι άρρητος, αλλά και ότι το π^2 είναι επίσης άρρητος ενώ έκανε νύξη για την υπερβατικότητα του αριθμού αυτού.
[122] Η λέξη «περιγεγραμμένο» στο κείμενο περιγράφεται με την φράση «έξω από τον κύκλο πολύγωνο που τον περιβάλλει».

<u>Σύγχρονη απόδοση</u>:

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ℓ και κύκλος περιφέρειας C, τότε:

(i) αν $\ell < C$ τότε μπορεί να κατασκευαστεί εγγεγραμμένο στον κύκλο κανονικό πολύγωνο με περίμετρο $\ell < P_n < C$

(ii) αν $C < \ell$ τότε μπορεί να κατασκευαστεί περιγεγραμμένο στον κύκλο κανονικό πολύγωνο με περίμετρο $C < P_n < \ell$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

Η απόδειξη της πρότασης αυτής, όπως θα δούμε, γίνεται κάνοντας χρήση της πρότασης XII.16 των Στοιχείων του Ευκλείδη, έργο γνωστό και πολλάκις μεταφρασμένο στην αραβική γλώσσα την περίοδο που οι Manu Busa συνέγραψαν το δικό τους έργο. Στο δωδέκατο βιβλίο των Στοιχείων, λοιπόν συναντάμε την εξής πρόταση:

«Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.»

(Ευκείδου, Στοιχεία, XII, πρόταση16)

Δηλαδή, δοθέντων δύο ομόκεντροι κύκλων, μπορεί να εγγραφεί στον μεγαλύτερο από αυτούς, ένα κανονικό πολύγωνο που να μην ακουμπά (εφάπτεται ή τέμνει) τον μικρότερο.

Η απόδειξη των Manu Busa με την βοήθεια της ευκλείδειας αυτής πρότασης είναι εξαιρετικά σύντομη και ενώ πραγματεύεται την δυνατότητα κατασκευής ενός σχήματος, δεν συμπεριλαμβάνει καμία γεωμετρική κατασκευή. Εξελίσσεται λοιπόν ως εξής:

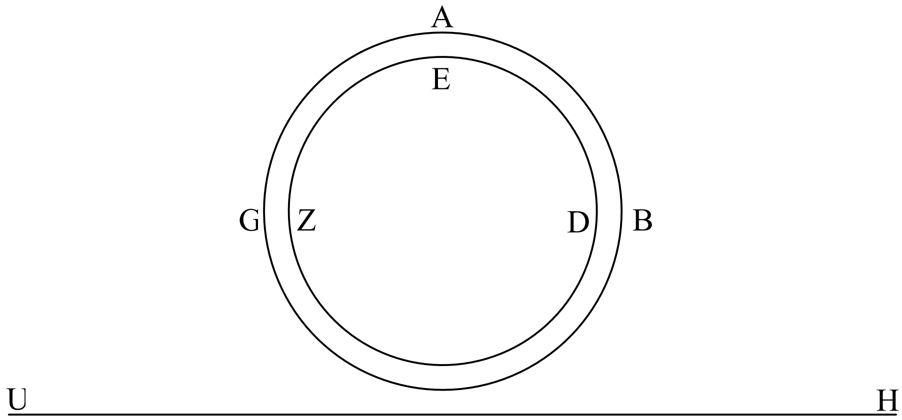
(Το σχήμα που ακολουθεί είναι ίδιο με αυτό στο λατινικό χειρόγραφο και δεν περιλαμβάνει τις κατασκευές πολυγώνων)

<u>Μετάφραση</u>[123]:

«Για παράδειγμα, έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα HU και ένας κύκλος ABG (όπως στο σχήμα). Πρώτα θα υποθέσω ότι η γραμμή HU είναι μικρότερη από την γραμμή ABG, την περιφέρεια του κύκλου (ABG). Λέω, λοιπόν ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα εγγεγραμμένο (κανονικό) πολύγωνο στον ABG του οποίου η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από το HU.

<u>Απόδειξη</u>: Η γραμμή UB είναι μικρότερη από την γραμμή ABG. Έστω λοιπόν ότι η γραμμή DZE, η περιφέρεια του κύκλου DZE, είναι ίση με την ευθεία γραμμή HU. Θα κατασκευάσω ένα εγγεγραμμένο (κανονικό) πολύγωνο εντός του κύκλου ABG που δεν ακουμπάει τον κύκλο DZE. Όμως η γραμμή DZE είναι ίση με την HU. Οπότε έχει κατασκευαστεί εντός του ABG ένα κανονικό πολύγωνο του οποίου η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από ΗΘ. Και αυτό είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

[123] M. Clagett, (1964), σελ. 253-5



Μετά θα θέσουμε την γραμμή HU να είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου DZE. Λέω, λοιπόν ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα περιγεγραμμένο (κανονικό) πολύγωνο στον κύκλο DZE του οποίου η περίμετρος είναι μικρότερη από το HU.

Απόδειξη: Η γραμμή UB είναι μεγαλύτερη από την γραμμή DZE. Έστω λοιπόν ότι η γραμμή ABG, η περιφέρεια του κύκλου ABG, είναι ίση με την γραμμή HU. Οπότε ας κατασκευάσουμε ένα εγγεγραμμένο (κανονικό) πολύγωνο εντός του κύκλου ABG που δεν ακουμπάει τον κύκλο DZE. Λέω, οπότε, ότι η περίμετρος του σχήματος που κατασκευάστηκε είναι μικρότερη από την γραμμή ABG. Και αφού έχει σχηματιστεί στον κύκλο DZE ένα πολύγωνο που δεν ακουμπάει τον κύκλο ABG και το οποίο είναι όμοιο με αυτό που κατασκευάστηκε εντός του ABG, η περίμετρος του πολυγώνου που ακουμπάει τον κύκλο DEZ θα είναι πολύ μικρότερη από την γραμμή ABG και η γραμμή ABG είναι ίση με την HU. Οπότε η περίμετρος του σχήματος που έχει κατασκευαστεί είναι μικρότερη από HΘ. Και αυτό είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.»

Ως τέταρτη πρόταση του «Verba filiorum» συναντάμε την πρώτη πρόταση του «Κύκλου Μέτρησις» με την εξής διατύπωση και απόδειξη:

Μετάφραση[124]**:**

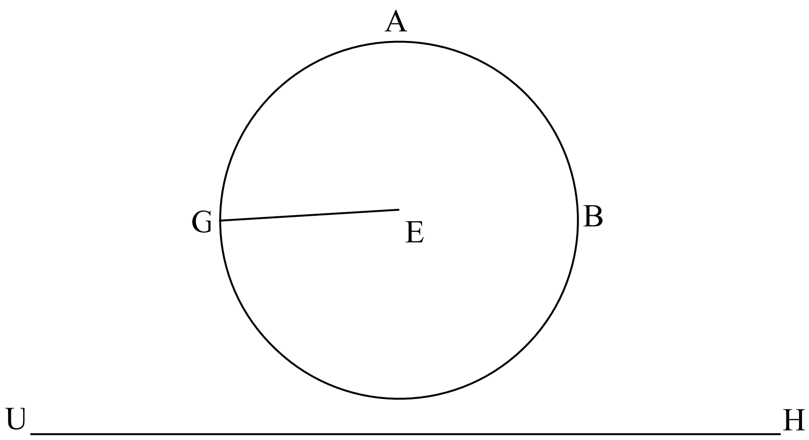
IV. «Το γινόμενο της ακτίνας οποιουδήποτε κύκλου επί το μισό της περιφέρειάς του είναι το εμβαδό της επιφάνειάς του.»

«Για παράδειγμα, έστω ένας κύκλος ABG, του οποίου κέντρο είναι το σημείο E (όπως στο σχήμα). Και έστω η ακτίνα του η γραμμή EG. Λέω οπότε ότι:

$$EG \cdot \frac{1}{2}\,(\text{περιφέρεια } ABG) = (\text{επιφάνεια κύκλου } ABG)$$

Απόδειξη: Αν δεν είναι έτσι τότε το γινόμενο του EG με μία ποσότητα είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη από το μισό της γραμμής ABG θα είναι η επιφάνεια του κύκλου ABG.

[124] M. Clagett, (1964), σελ. 257-61



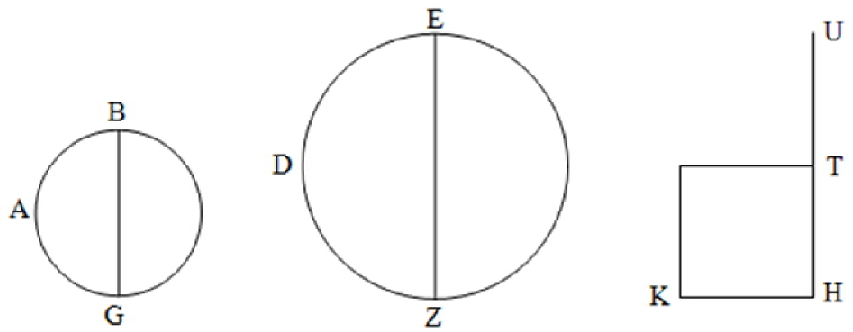
Αν αυτό είναι δυνατόν, πρώτα έστω ότι το γινόμενο είναι με μία ποσότητα μικρότερη από το μισό της γραμμής ABG. Επίσης θα θέσω την ποσότητα αυτή ίση με την γραμμή HU. Οπότε EG · HU = (κύκλος ABG). Και 2·HU < (περιφέρεια ABG). Οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα εγγεγραμμένο (κανονικό) πολύγωνο στον κύκλο ABG του οποίου η περίμετρος είναι μεγαλύτερη από 2·HU. **[από πρόταση III.i]** Όταν, αυτό το πολύγωνο κατασκευαστεί το μισό της περιφέρειάς του θα είναι μεγαλύτερο από HU. Και το γινόμενο της ακτίνας του κύκλου ABG με το μισό της περιμέτρου του εγγεγραμμένου πολυγώνου θα είναι μικρότερο της επιφάνειας του κύκλου ABG **[από πρόταση I]**. Οπότε το (EG · HU) είναι πολύ μικρότερο από την επιφάνεια του κύκλου ABG. Αλλά αυτό είναι ήδη (από υπόθεση) ίσο με αυτήν. Αυτό είναι όντως μία αντίφαση και είναι αδύνατον.

Και έστω ότι το γινόμενο της γραμμής EG με μία ποσότητα μεγαλύτερη από το μισό της γραμμής ABG είναι η επιφάνεια του κύκλου ABG, αν αυτό είναι δυνατόν. Και θα θέσω, πάλι, την ποσότητα αυτή ίση με την γραμμή HU. Οπότε EG · HU = (κύκλος ABG). Όμως HU > $\frac{1}{2}$ (περιφέρεια ABG). Οπότε 2·HU < (γραμμή ABG). Οπότε είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα περιγεγραμμένο (κανονικό) πολύγωνο στον κύκλο ABG του οποίου η περίμετρος είναι μικρότερη από 2·HU. **[από πρόταση III.ii]** Και όταν αυτό το πολύγωνο κατασκευαστεί το μισό της περιφέρειάς του θα είναι μικρότερο από HU. Αλλά το γινόμενο της ακτίνας του κύκλου ABG με το μισό της περιμέτρου του περιγεγραμμένου πολυγώνου, που κατασκευάστηκε, ισούται με την επιφάνεια του πολυγώνου αυτού **[από πρόταση II]**, και η επιφάνεια του (αυτή) είναι μεγαλύτερη του κύκλου ABG. Οπότε το γινόμενο της ακτίνας του κύκλου ABG με την γραμμή HU (δηλαδή το EG · HU) είναι πολύ μεγαλύτερο από την επιφάνεια του κύκλου ABG. Αλλά αυτό είναι ήδη (από υπόθεση) ίσο με αυτήν. Αυτό είναι όντως μία αντίφαση και είναι αδύνατον. Οπότε έχει δειχθεί τώρα ότι το γινόμενο της ακτίνας οποιουδήποτε κύκλου με το μισό της περιφέρειάς του ισούται με την επιφάνεια του κύκλου. Και αυτό είναι που θέλαμε να αποδείξουμε.

(Πόρισμα:) Και είναι γνωστό, από αυτά που έχουμε καταθέσει, ότι όταν πάρουμε ένα τόξο από όλο τον κύκλο ABG και δύο γραμμές σχεδιαστούν από τα άκρα του προς το κέντρο του κύκλου, η επιφάνεια του τομέα που το τόξο αυτό και οι γραμμές περιέχουν είναι ίση με το γινόμενο της ακτίνας του κύκλου ABG και του μισού του τόξου που έχουμε πάρει από αυτόν. Και αυτό είναι που θέλαμε να δείξουμε.

V. Ο λόγος της διαμέτρου οποιουδήποτε κύκλου προς την περιφέρειά του, είναι ένας. (δηλ. ίδιος για όλους τους κύκλους)

Για παράδειγμα, έστω δύο διαφορετικοί κύκλοι, οι κύκλοι ABG, DEZ. Έστω οι διάμετροι ότι είναι BG η διάμετρος του κύκλου ABG και EZ η διάμετρος του κύκλου DEZ.



Λέω λοιπόν ότι ισχύει: $\dfrac{\text{διάμετρος BG}}{\text{περιφέρεια ABG}} = \dfrac{\text{διάμετρος EZ}}{\text{περιφέρεια DEZ}}$

που αποδεικνύεται ως εξής:

Αν οι δύο λόγοι δεν είναι ίσοι μεταξύ τους, τότε έστω ότι: $\dfrac{\text{γραμμή BG}}{\text{γραμμή ABG}} = \dfrac{\text{EZ}}{\text{HU}}$
όπου η γραμμή HU είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την γραμμή DEZ.

Αρχικά θα θέσω ότι είναι μικρότερη, αν αυτό είναι δυνατόν. (*Δηλαδή HU < DEZ*)
Και θα διχοτομήσω την γραμμή HU στο T και θα φέρω κάθετα επί της HU, στο σημείο H, μία γραμμή ίση με το $\frac{1}{2}$ της γραμμής EZ. Αυτή (*η κάθετη*) είναι η γραμμή HK. Και θα συμπληρώσω το «τετράγωνο» [*εννοώντας ορθογώνιο*] KT.

Και αφού γραμμή HK = ½ γραμμής EZ
και γραμμή HT < ½ γραμμής DZE,
το «τετράγωνο» KT [*δηλαδή το HK · HT*] < επιφάνειας κύκλου DEZ. **[από πρόταση IV]**

Τώρα $\dfrac{\text{γραμμή KH}}{\text{γραμμή HT}} = \dfrac{\frac{1}{2}\text{γραμμήςEZ}}{\frac{1}{2}\text{γραμμήςABG}} \quad \left[= \dfrac{\frac{1}{2}EZ}{\frac{1}{2}HU}, \textit{αρχική υπόθεση}\right]$

και (KH · HT) = εμβαδό KT

και ($\frac{1}{2}$ γραμμήςEZ · $\frac{1}{2}$ γραμμήςABG) = εμβαδό κύκλου ABG **[από πρόταση IV]**

και $\dfrac{\text{εμβαδό ABG}}{\text{τετράγωνοKT}} = \left(\dfrac{\frac{1}{2}\text{γραμμήςBG}}{\frac{1}{2}\text{γραμμήKH}}\right)^2$

Αλλά $\left(\dfrac{\frac{1}{2}\text{γραμμήςBG}}{\frac{1}{2}\text{γραμμήKH}}\right)^2 = \left(\dfrac{\text{γραμμήςBG}}{\text{2KH}}\right)^2$ και 2KH = EZ

2

Οπότε $\frac{\text{εμβαδό ABG}}{\text{τετράγνωνοKT}} = \left(\frac{\text{BG}}{\text{EZ}}\right)$,

Και $\frac{\text{εμβαδό ABG}}{\text{εμβαδό DEZ}} = \left(\frac{\text{BG}}{\text{EZ}}\right)^2$, όπως έδειξε ο Ευκλείδης.

Οπότε $\frac{\text{εμβαδό ABG}}{\text{εμβαδό DEZ}} = \frac{\text{εμβαδό ABG}}{\text{τετράγωνοKT}}$

Οπότε εμβαδό κύκλου DEZ = τετράγωνοKT
Αλλά προηγουμένως [*προέκυψε από την υπόθεση*] ότι εμβαδόKT < εμβαδό κύκλουDEZ. Αυτό είναι όντως αντίφαση και αδύνατο. Οπότε η γραμμή HU δεν είναι μικρότερη από την DEZ. Με μία παρόμοια διαδικασία είναι γνωστό ότι η γραμμή HU δεν είναι (*ούτε*) μεγαλύτερη από την γραμμή DEZ. Και αφού η γραμμή HU δεν είναι μεγαλύτερη και δεν είναι μικρότερη από την γραμμή DEZ, τότε είναι ίση με αυτήν.

Και (ισχύει ότι) $\frac{\text{γραμμή BG}}{\text{γραμμή ABG}} = \frac{\text{EZ}}{\text{HU}}$ και γραμμή HU = γραμμή DEZ.

Οπότε έχει τώρα δειχθεί ότι ο λόγος της διαμέτρου κάθε κύκλου προς την περιφέρειά του είναι ένας. Και αυτό είναι που θέλαμε να δείξουμε.

8.2.1.1 Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΙΣ ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΙΣ ΑΥΤΕΣ ΣΤΗ ΔΥΣΗ

Πριν:

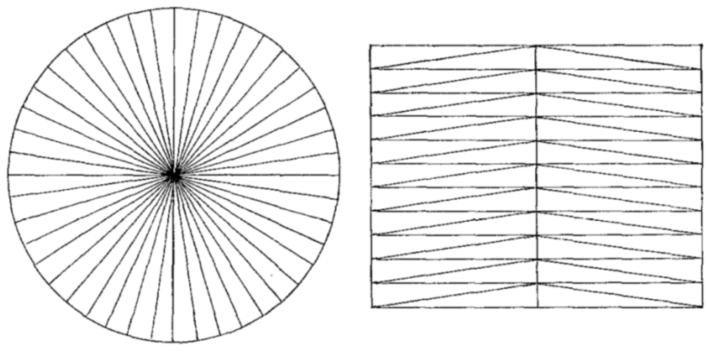
Στις αρχές του Μεσαίωνα, οι γνώσεις για την έννοια του «τετραγωνισμού του κύκλου», ήταν συγκεχυμένες για τους μαθηματικούς. Σε πολλές πραγματείες της εποχής που φέρουν για τίτλο αυτό ακριβώς το ζήτημα, φαίνεται ότι γίνεται προσπάθεια να οριστεί η ίδια η φράση «τετραγωνισμός του κύκλου», ενώ οι γεωμετρικές γνώσεις φαίνονται σε πολλές περιπτώσεις να είναι αρκετά χαμηλού επιπέδου. Να διευκρινίσουμε ότι οι λύσεις που χρησιμοποιούσαν τις γνωστές στην αρχαιότητα τετραγωνίζουσες καμπύλες (τετραγωνίζουσα Ιππία, έλικα Αρχιμήδη) ήταν, προφανώς, επίσης άγνωστες. Η αποσαφήνιση της αποδεκτής ή όχι λύσης, βάσει των ευκλείδειων απαιτήσεων κατασκευής, έγινε πολύ αργότερα και όπως είναι φυσικό η τεκμηρίωση της αδυναμίας μίας τέτοιου είδους κατασκευής φαντάζει πολύ απόμακρη για τις γνώσεις εκείνης της εποχής.

Για να γίνει κατανοητό το επίπεδο των γνώσεων αυτών, θα φέρουμε εδώ ως παράδειγμα ένα πρώιμο έργο του Μεσαίωνα, που αρχικά εκδόθηκε από τον Winterberg to 1882, επανεκδόθηκε από τον Smeur το 1968 και ξανά το 1976[125] και συναντάται από τότε σε διάφορα κείμενα που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών. Πρόκειται για το έργο του Φλαμανδού μαθηματικού **Franco of Liege**, που γράφηκε σε 6 βιβλία, την περίοδο **1047-50** με τον συνήθη τίτλο **«De quadratura circuli»**. Σ’ αυτό ο Franco δέχεται ως δεδομένο ότι η επιφάνεια του κύκλου είναι ακριβώς ίση με το τετράγωνο της διαμέτρου του πολλαπλασιασμένο επί 11/14, μία μέθοδο που έχει επικρατήσει μέσω των Ρωμαίων

[125] M. Folkerts & J.E.M. Smeur, (1976) « *A Treatise on the Squaring of the Circle by Franco of Liège, of about 1050*», Archives Internationales d'Histoire des Sciences 26, 60, 226-7

αγρονόμων[126]. Προκειμένου λοιπόν να κατασκευάσει ένα τετράγωνο με εμβαδό ίσο με αυτό ενός κύκλου, παίρνει ένα κύκλο με διάμετρο 14 μονάδων και κατασκευάζει αρχικά ένα ορθογώνιο 14×11. Στην συνέχεια προσπαθεί μάταια να κατασκευάσει ένα τετράγωνο ισοδύναμο με αυτό το ορθογώνιο, αφού φαίνεται ότι δεν γνωρίζει την αντίστοιχη ευκλείδεια κατασκευή εύρεσης γεωμετρικού μέσου. Η κατασκευή του ορθογωνίου που θεωρεί λανθασμένα ως ακριβή τον λόγο περιφέρειας προς διάμετρο σε έναν κύκλο ως 44/14 (δηλαδή θεωρεί $\pi_1 = 22/7$), γίνεται με τον εξής τρόπο:

Διαιρεί τον κύκλο (διαμέτρου 14 μονάδων) σε 44 ίσους κυκλικούς τομείς με τον καθένα να αντιστοιχεί σε τόξο 1 μονάδας και στην συνέχεια «συμπιέζει» τους τομείς αυτούς στην μορφή ενός ορθογωνίου με πλευρές 14 και 11 μονάδες αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα:



<u>Μετά:</u>

Στα τέλη του μεσαίωνα και μετά τις μεταφράσεις των Gerard of Cremona και William of Moerbeke, οι πραγματείες που αναφέρονται στον τετραγωνισμό του κύκλου φαίνονται στην πλειοψηφία του επηρεασμένες από το έργο του Αρχιμήδη.

Ο Γερμανός φιλόσοφος **Albert of Saxony** (1320 – 1390), γνωστός για την συμβολή του στον τομέα της λογικής και της φυσικής, με τον διαδεδομένο πλέον αριστοτελικό σχολαστικισμό, αναλύει στο έργο του την έννοια του τετραγωνισμού του κύκλου και δίνει σημαντική ώθηση στην διερεύνηση της έννοιας του «συνεχούς». Το έργο του φέρει τον τίτλο «**Questio Alberti de Saxonia de quadratura circuli**»,

Στην αρχή του έργου πραγματεύεται το τι μπορεί και τι δεν μπορεί να σημαίνει τετραγωνισμός του κύκλου και το κατά πόσο είναι εφικτή η εύρεση λύσης σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις[127]. Στην συνέχεια προχωράει στην λύση της περίπτωσης που τον ενδιαφέρει, δηλαδή στην δυνατότητα εύρεσης ενός τετραγώνου με εμβαδό ίσο με αυτό δοσμένου κύκλου.

[126] Η παράδοση αυτή ξεκινάει από την εποχή του Ήρωνα, με βασικό εκφραστή τον θωρούμενο ιδρυτή της αγρονομίας, Ρωμαίου συγγραφέα, Columella (~50 μ.Χ)

[127] Ενδιαφέρον παρουσιάζει μία σχεδόν απίθανη περίπτωση που συγκαταλέγει μεταξύ των πιθανών ερμηνειών της φράσης «τετραγωνισμός του κύκλου». Σύμφωνα με αυτήν, η φράση είναι δυνατόν να ερμηνευτεί ως «διαίρεση στα τέσσερα» (quartering, quadrant = τεταρτοκύκλιο). Η περίπτωση αυτή δεν είναι πολύ απομακρυσμένη από την ελληνική γλώσσα, δεδομένου ότι ως λογοπαίγνιο η παρερμηνεία αυτή του τετραγωνισμού έχει χρησιμοποιηθεί από τον ίδιο τον **Αριστοφάνη**, στις **Όρνιθες** όταν ο Μέτων περιγράφει: «(…) ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος κἀν μέσῳ ἀγορά, φέρουσαι δ' ὦσιν εἰς αὐτὴν ὁδοὶ ὀρθαὶ πρὸς αὐτὸ τὸ μέσον (…)». Ο κύκλος «γίνεται τετράγωνος», παίζοντας με τον λόγο, αφού φέρνοντας τις κάθετες διαμέτρους αποκτάει τέσσερεις ορθές γωνίες.

Θεωρεί ότι η φράση του Αριστοτέλη στο έργο του «Κατηγορίαι»:

«ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς εἴγε ἔστιν ἐπιστητόν,
ἐπιστήμη μὲν αὐτοῦ οὐκ ἔστιν οὐδέπω»

Αριστοτέλους, Κατηγορίαι, 7b, 31-3

λέγεται επειδή δεν είχε δείξει κανείς αυτό που έδειξε ο Αρχιμήδης. Ο Αριστοτέλης στο παραπάνω απόσπασμα αναφέρει ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου, ανήκει σε εκείνα που μπορεί να γνωρίσει ο ανθρώπινος νους μέσω της επιστημονικής έρευνας, αλλά η γνώση αυτή δεν έχει ακόμα κατακτηθεί. Ο **Albert of Saxony** καταλήγει, μέσω της απόδειξής του, που χρησιμοποιεί με ελάχιστες διαφοροποιήσεις το έργο του Αρχιμήδη, ότι η γνώση αυτή έχει πλέον κατακτηθεί. Οι διαφοροποίησή του στην πρώτη πρόταση είναι στο πνεύμα του «Verba filiorum».

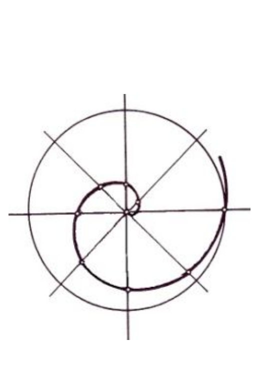
Στην απόδειξή του αυτή χρησιμοποιεί μαθηματικές προτάσεις τόσο από τον Ευκλείδη και συγκεκριμένα την έκδοση του Campanus of Novarra όσο και από τον Αρχιμήδη και συγκεκριμένα την μετάφραση του Gerard of Cremona. Τα σωστά αυτά μαθηματικά αποτελέσματα συνδυάζει με εμπειρικά επιχειρήματα. Το βασικό λοιπόν χαρακτηριστικό της πραγματείας του αυτής είναι η αντικατάσταση της πρότασης Χ.1 των Στοιχείων από ένα αξίωμα αντίστοιχο με την παρακάτω έκφραση:

Αν δίνονται δύο άνισες ποσότητες $Α<Β$, τότε υπάρχει μία ποσότητα Γ τέτοια ώστε $Α<Γ<Β$. Προφανώς το αξίωμα αυτό προϋποθέτει την έννοια της συνέχειας και το θέμα αυτό διαπραγματεύεται στην πραγματεία, επανεισάγοντας ένα ζήτημα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και βάζοντας τα θεμέλια για τον μετέπειτα ορισμό της καθοριστικής αυτής έννοιας για την εξέλιξη των μαθηματικών.

Μία άλλη σημαντική αλλαγή που επιφέρει το έργο των πρώτων αυτών μεταφράσεων και συγκεκριμένα της μετάφρασης και έτερων του «Κύκλου Μέτρησις» έργων του Αρχιμήδη από τον William of Moerbeke είναι η παρουσίαση της κατασκευής του ζητούμενου ισοδύναμου με τον κύκλο τετραγώνου. Στην διάθεση των ερευνητών είναι πλέον μεταξύ άλλων και το έργο **«Περί ελίκων»**, που αξιοποιήθηκε εκ νέου και συνέβαλε στην εμφάνιση συνθετικών πραγματειών με θέμα τον «τετραγωνισμό του κύκλου». Το πρώτο δείγμα μίας τέτοιου είδους αξιοποίησης είναι ένα χειρόγραφο του 14^{ου} αιώνα, που εκδόθηκε στην Γαλλία.

Συγκεκριμένα το **1340** εκδίδεται στο Παρίσι, από άγνωστο συγγραφέα, ένα έργο με τον συνηθισμένο τίτλο **«De quadrature circuli»** που συντίθεται από ορισμένες προτάσεις του «Περί ελίκων» και την πρώτη πρόταση του «Κύκλου Μέτρησις». Ο συγγραφέας της φαίνεται να είναι ο πρώτος που συνειδητοποιεί εκείνη την εποχή, ότι πέρα από την απόδειξη της 1^{ης} πρότασης, που σε τόσα έργα αναλύεται με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, ιδιαίτερη σημασία έχει το πώς θα κατασκευαστεί το ισοδύναμο με τον κύκλο ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή **πώς βρίσκεται μία ευθεία γραμμή ίδιου μήκους με ένα δοσμένο κυκλικό τόξο.**

Να θυμίσουμε σε αυτό το σημείο ότι ως έλικα ορίζεται από τον Αρχιμήδη η καμπύλη που δημιουργείται από ένα κινητό σημείο με τον εξής τρόπο:



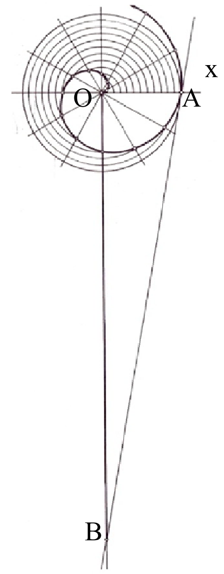
«Ἔστιν δὲ τάδε εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.»

Σε ελεύθερη απόδοση ο ορισμός αυτός περιγράφει τα εξής:

Αν μία ημιευθεία με σταθερή την αρχή της περιστρέφεται σε ένα επίπεδο και με την ίδια ταχύτητα ένα σημείο κινείται πάνω σ' αυτήν αρχίζοντας από την σταθερή αρχή της, καθώς αυτή περιστρέφεται το σημείο διαγράφει στο επίπεδο την καμπύλη που ονομάζεται έλικα.

Στο ίδιο έργο και μετά από μία σειρά αποδεδειγμένων προτάσεων συναντάμε την πρόταση 18:

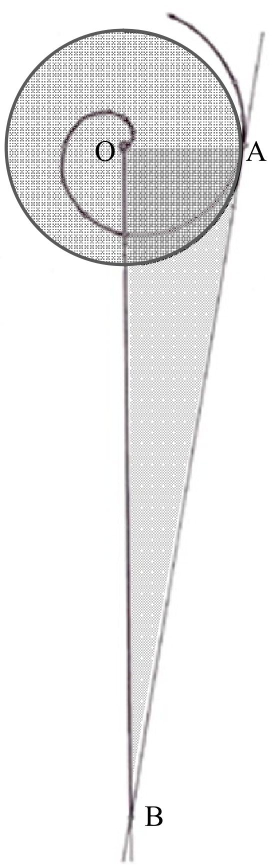
« Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. »



Ας θεωρήσουμε ως «**αρχικό σημείο**» **Ο** της έλικος, την αρχική θέση του κινούμενου σημείου που την παράγει. Και ως **«αρχική ευθεία» Οx** την αρχική θέση της περιστρεφόμενης ημιευθείας πάνω στην οποία κινείται το σημείο που παράγει την έλικα. Τέλος ας θεωρήσουμε ως «**κύκλο πρώτης περιφοράς**» τον κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα το ΟΑ, όπου Α το πρώτο σημείο τομής της έλικος με την αρχική της ευθεία.

Τότε σε ελεύθερη πάντα απόδοση η πρόταση λέει ότι:

Αν φέρουμε εφαπτόμενη στην έλικα στο σημείο Α όπου αυτή τέμνει την αρχική της ευθεία και φέρουμε επίσης την κάθετη της αρχικής ευθείας στο αρχικό σημείο Ο και θέσουμε Β το σημείο τομής των δύο αυτών ευθειών (της κάθετής στην αρχική και της συγκεκριμένης εφαπτόμενης), τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ έχει μήκος ίσο με την περιφέρεια του κύκλου της πρώτης περιφοράς.



Με σύγχρονο συμβολισμό ισχύει:

ΟΒ = Περιφέρεια κύκλου (Ο, ΟΑ)

Συνδυαστικά δε, με την $1^{η}$ πρόταση του «Κύκλου Μέτρησιν» ισχύει ότι:

Εμβαδό τριγώνου ΑΟΒ = Εμβαδό κύκλου (Ο, ΟΑ)

Την συνολική αυτή παρουσίαση, του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου, ακολούθησαν και άλλες πραγματείες τον επόμενο αιώνα.

Νωρίτερα, με ορμητήριο την μελέτη των κειμένων του Αριστοτέλη, συναντάμε τις πρώτες πραγματείες αναφορικά με τον τετραγωνισμό των μηνίσκων του Ιπποκράτη, όπως αυτές αναφέρονται από τον Σιμπλίκιο. Τα έργα αυτά, που φέρουν με μικρές παραλλαγές, τον τίτλο **«Quadratura circuli per lunulas»** και περιέχουν μετάφρασμένα αποσπάσματα του Σιμπλίκιου από τα ελληνικά, κυκλοφόρησαν ευρέως το διάστημα του $13^{ου}$ και $14^{ου}$ αιώνα. Στα περισσότερα αντίγραφα που σώζονται, δεν γίνεται ωστόσο αναφορά στην επισήμανση του Σιμπλίκιου, ότι το συμπέρασμα για τετραγωνισμό του κύκλου, είναι λανθασμένο και αφήνουν την εντύπωση ότι έτσι επιτυγχάνεται η λύση του προβλήματος με ευκλείδειες κατασκευές. Το ένα και μοναδικό αντίγραφο που σώζεται και περιέχει την παρατήρηση της λανθασμένης γενίκευσης δείχνει ότι η γνώση αυτή δεν ήταν εδραιωμένη και εκτιμάται από τον Clagett[128] ότι προέρχεται από μετάφραση του Robert Grossetete, που ανάγεται περίπου στην δεκαετία του 1240.

Αυτό που παρατηρείται λοιπόν μέχρι το σημείο που έχουμε φτάσει, είναι ότι μέχρι τον $14^{ο}$ περίπου αιώνα οι μαθηματικοί της Δύσης έχουν στην διάθεσή τους τα περισσότερα από τα στοιχεία που θα τους βοηθήσουν να κατανοήσουν την γεωμετρική προσέγγιση του προβήματος του τετραγωνισμού.

Παράλληλα η μέθοδος του Αρχιμήδη, θα χρησιμοποιηθεί για επιτευχθούν ακούραστοι υπολογισμοί προσέγγισης του λόγου της περιφέρειας προς την διάμετρο του κύκλου χαρακτηριστό παράδειγμα των οποίων είναι ο υπολογισμός του **Ludolph van Ceulen** (1540-1610). Στην συνέχεια οι γεωμετρικές γνώσεις αυτές θα συνδιαστούν με τις εξελίξεις στον τομέα της τριγωνομετρίας [**Copernicus** (1473-1543), **Rheticus** (1514-1574), **Kepler** (1571-1630)] και θα οδηγήσουν σε πιο ακριβείς υπολογισμούς, όπως είδαμε ενδεικτικά να συνέβη με τον υπολογισμό του al-Kāshī στις αρχές του $14^{ου}$ αιώνα. Η πρώτες διαφορετικές προσεγγίσεις, που θα διατηρούν ωστόσο την Αρχιμείδεια γεωμετρική προσέγγιση, θα πραγματοποιηθούν με βασικό εργαλείο πλέον την τριγωνομετρία και θα αποδώσουν τις πρώτες αναλυτικές μορφές για τον ζητούμενο αυτό λόγο.

[128] M. Clagett, (1964), σελ. 610-11

9. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στο σημείο αυτό τελειώνει η δική μας διαδρομή αλλά ανοίγει ένας νέος κύκλος της ιστορίας των μαθηματικών, όσο αφορά τον λόγο της περιμέτρου ενός κύκλου προς την διάμετρο του. **Από το σημείο αυτό και έπειτα θα λέγαμε ότι ανεξαρτητοποιείται σιγά-σιγά η ιστορία του αριθμού π από αυτή της μέτρησης του κύκλου**.

Οι πρώτες διαφορετικές προσεγγίσεις, που θα διατηρήσουν ωστόσο την Αρχιμείδεια γεωμετρική προσέγγιση, θα πραγματοποιηθούν με βασικό εργαλείο πλέον την τριγωνομετρία και θα αποδώσουν τις πρώτες αναλυτικές μορφές για τον ζητούμενο αυτό λόγο, με πρώτη αυτήν του **Viète** (1540-1603) το 1593 να ακολουθείται από το έργο των **Wallis** (1616-1703) και **Gregory** (1638- 1675). Την περίοδο αυτή καθιερώνεται σταδιακά το δεκαδικό σύστημα που 4 αιώνες νωρίτερα είχε εισάγει ο Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250) στην Ευρώπη. Οι προηγούμενες αναλυτικές εκφράσεις οδηγούν με την σειρά τους σε υπολογισμούς όλο και καλύτερων προσεγγίσεων του συγκεκριμένου λόγου που για πρώτη φορά αναφέρεται ως **«π»** στο έργο του **William Jones** (1675-1749) και καθιερώνεται αργότερα από τον **Euler** (1707-1783).

Τα μαθηματικά εργαλεία που έχουν στην διάθεσή τους οι μαθηματικοί της Αναγέννησης αυξάνονται και εξελίσσονται με ραγδαίους ρυθμούς σχετικά με τις εξελίξεις των προηγούμενων αιώνων και σύντομα το ενδιαφέρον εστιάζεται στην φύση του αριθμού **π** περισσότερο από την τιμή του.

Στο διάστημα αυτό πολλοί είναι οι μαθηματικοί που αντιλαμβάνονται και διατυπώνουν ξεκάθαρα ότι είναι αδύνατη η έκφραση της περιφέρειας προς την διάμετρο ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Η **αρρητότητα** ωστόσο του π, θα αποδειχθεί αρκετά αργότερα, πρώτη φορά από τον **Lambert** (1728-1777) το **1768,** και με πιο εύκολο τρόπο, τριάντα χρόνια αργότερα από τον **Legendre** (1752-1833) το **1794**.

Αυτό που έμενε να απαντηθεί είναι αν η κατασκευή που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού είναι δυνατή εντός του ευκλείδειου αξιωματικού συστήματος. Η απάντηση δόθηκε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και προϋπέθετε πολλές από τις μαθηματικές ανακαλύψεις που προηγήθηκαν μέσα στο διάστημα αυτό. Η λύση στο πρόβλημα δόθηκε μέσω ενός άλλου ιδιαίτερου αριθμού, του **e**, που έμμεσα συναντάμε πρώτη φορά στο έργο του **Napier** (1550-1617) όπου και εισάγεται η έννοια των λογαρίθμων. Τόσο η ιδιότητες του αριθμού e και η σχέση που τον συνδέει με τον αριθμό π, όσο και οι εξελίξεις στην θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων, οδήγησαν τον

Lindemann (1852-1939) στην απόδειξη την **υπερβατικότητας** του **π**. Αποδείχτηκε δηλαδή ότι το π δεν είναι δυνατό να αποτελεί λύση αλγεβρικής εξίσωσης.

Για τον τετραγωνισμό ενός κύκλου με ακτίνα 1, αυτό που ζητάμε να κατασκευάσουμε είναι ένα τετράγωνο με εμβαδό π^2 ή αλλιώς με πλευρά $\sqrt{\pi}$. Αντίστοιχα για τον τετραγωνισμό του κύκλου με ακτίνα μήκους 1, σύμφωνα με την πρώτη πρόταση του «Κύκλου Μέτρησις» αρκεί να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με κάθετες μήκους 1 και 2π αντίστοιχα. Το γεγονός ότι ο π είναι υπερβατικός αριθμός, δηλαδή ότι δεν μπορεί να αποτελεί λύση αλγεβρικής εξίσωσης, καθιστά την κατασκευή των $\sqrt{\pi}$ και 2π αδύνατη με κανόνα και διαβήτη σε πεπερασμένα βήματα και άρα καθιστά αδύνατο τον τετραγωνισμό του κύκλου με τις απαιτήσεις του ευκλείδιου συστήματος.

Η λυτρωτική αυτή μαθηματική ανακάλυψη, δεν φαίνεται παρόλα αυτά να έχει γίνει απολύτως κατανοητή εκτός της επιστημονικής κοινότητας. Είναι γνωστό ότι ακόμα και σήμερα άνθρωποι με μαθηματικές ανησυχίες και ικανότητες συνεχίζουν να προτείνουν «λύσεις» τετραγωνισμού δείχνοντας να αγνοούν την ανακάλυψη αυτή. Αυτό δεν συμβαίνει μόνο επειδή απαιτούνται γνώσεις ανώτερων μαθηματικών αλλά επειδή απαραίτητη είναι και μια ευρύτερη γνώση της ιστορίας του προβλήματος. Η γνώση της ιστορίας αυτής κυρίως στα πρώιμα σταδία της, είναι ιδιαίτερα εποικοδομητική και στη διδακτική των μαθηματικών αφού το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί το πλέον χαρακτηριστικό παράδειγμα επιστημολογικού εμποδίου.

10. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Berggren, L., Borwein, J., Borwein, P. (1999), « *Pi: A Source Book*», New York: Springer, 2000)

Bruins, E. M., Rutten, M., (1961). «*Textes mathématiques de Suse, Mémoires de la Mission Archéologique en Iran*», XXXIV, Paul Geuthner, Paris

Cantor M. (1880) «*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik", I : Von den altesten Zeiten bis zum Jahr 1200 n Ch.*» Τρίτη έκδοση (1907) , Leipzig,. Teubner

Clagett, M., (1952) «*Archimedes in the Middle Ages: The De mensura circuli* », Vol 10, Osiris pp. 587-618

Clagett, M., (1964) «*Archimedes in the Middle Ages*», Vol I: The Arabo-Latin Tradition. Madison, University of Wisconsin Press

Gerdes, P., (1985): «*Three alternate methods of obtaining the Ancient Egyptian formula for the area of the circle*», Historia Mathematica, New York, Vol.12

Griffith, F. Ll., (1898) «*The Petrie Papyri. Hieratic Papyri from Kahun and Gurob*», vol. 2, London: B. Quaritch

Heath, T. L., (1897), «The Works of Archimedes, Cambridge University Press» (Dover Edition, 1953)

Heath, T. L., (1908), *«The thirteen books of Euclid's Elements»* vol. I, II, III (Second edition, Dover Publications)

Heath, T. L., (1921), «*A History of Greek Mathematics*» vol.I, II, Oxford (Επανέκδοση: Elibron Classics series, 2006)

Hobson E.W.,(1913) «*Squaring the circle, History of the problem*» Cambridge University Press

Jones, P. S., «*Irrationals or Incommensurables. I. Their discovery, and a "Logical Scandal"*». Mathematics Teacher, Vol. 49, pp. 123-27.

Jones, P. S., (1956), «*Irrationals or Incommensurables. II.* The Irrationality of √ 2 and Approximations to It.” Mathematics Teacher, Vol. 49, pp.187-191

Jones, P. S., (1956), «*Irrationals or Incommensurables. III. The Greek solution.*» Mathematics Teacher, Vol. 49, pp. 282-85

Keller, A., (2006) «*Expounding the Mathematical Seed, Volume 1: The Translation: A Translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya*», Science Networks. Historical Studies

Keller, A., (2006) «*Expounding the Mathematical Seed, Volume 2: The supplements, A Translation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya*» Science Networks. Historical Studies

Katz, V.J., ed. (2008) «The mathematics of Egypt**,** Mesopotamia**,** China**,** India, and Islam*: A sourcebook*»**.** Princeton: Princeton University Press.

Kaye, G.R., (1914) «*Indian mathematics*», Issis, vol.2,

Kichenassamy, S. (2006) «*Baudhayana's rule for the quadrature of the circle»* , Historia Mathematica 33, pp.149-183

King, L W, (1900) «*Cuneiform texts from Babylonian tablets in the British Museum*», Part XXI, London

Knorr, W. R., (1975/76) «*Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation*» Arch. History Exact Sci. **15** (2), pp.115-140.

Martzloff, J.C., Gernet J., Dhombres J., (2006), *«A History of Chinese Mathematics»,* Spinger Verlag

Mikami, Y., (1910), «*The Circle-Squaring of the Chinese*», Bibliotheca Mathematica, (10), pp. 193–200.

Mikami, Y., (1913), « *Mathematics in China and Japan*», Teubner, Leipzig

Neugebauer, O. **(**1969), «*The Exact Sciences in Antiquity*», Dover,. New York,. (επανέκδοση της $2^{η}$ εκδοσης που αρχικά δημοσιεύτηκε το 1957 από το Brown Univ. Press)

Neugebauer, O., (1934), «*Vorgriechische Mathematik*»**,** Springer, Berlin

Neugebauer, O. Sachs A. (1945). «*Mathematical Cuneiform Texts»*, American Oriental Series, vol. 29, New Haven, CT: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research

Netz, R., (2004) «*Eudemus of Rhodes, Hippocrates of. Chios and the Earliest form of a Greek.Mathematical Text»*, Centaurus, 46(4), σελ. 243-286

Parker, R.A., (1972) «*Demotic Mathematical Papyri*» , Brown Univ. Press, Providence, R

Peet, T., (1931). «*A problem in Egyptian geometry»* Journal of Egyptian Archaeology 17: pp.100-106.

Philip, D, Straffin Jr., (1998), «*Mathenatics Magazine*», Vol.71, No.3, pp 163-181

Rashed, R.,(1996), «*Archimedean Learning in the Middle Ages: the Banū Mūsā*», Historia Scientiarum vol. 2: pp. 1-16

Al-Rawi, F. and Roaf, M. (1984), «*Ten Old Babylonian mathematical problems from Tell Haddad*». Sumer 43, pp. 175-218

Robson, E. (1999) «*Mesopotamian mathematics, 2100-1600 BC : technical constants in bureaucracy and education»,* Oxford University Press

Robson, E. (2008) «*Mathematics in Ancient Iraq»,* Princeton University Press (2008)

Seidenberg, A., (1972), «*On the area of the semicircle»*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 9, pp.171-211.

Seidenberg, A., (1959), «*Peg and Cord in Ancient Greek Geometry»*, Scripta Mathematica, vol 24, pp.107-122.

Sen, S. N. & Bag, A. K. (1983) «*The Sulva Sutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava with text, English Translation and Commentary*», Indian National Science Academy, New Delhi

Shen K., (1999), « The nine Chapters of the Mathematical Art», Oxford

Smeur, A., J., E., M., (1970), «On the value equivalent to π in ancient mathematical texts. A new interpretation», Archive for History of Exact Sciences, Vol. 6, No 4, pp. 249-270

Σταμάτης Ε. Σ., (1950) «Ἀρχιμήδους Κύκλου μέτρησις». Εἰσαγ., Αρχαίο κείμενο, Μετάφρ., Επεξηγήσεις. Αθήνα

Struve, W. W., (1930), « *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der Schonen Kunste in Moskau* pp. 123-34, Berlin: J. Springe

Thureau-Dangin, F. (1938). *Textes mathématiques babyloniens* (Ex Oriente Lux 1), Leiden.

Van der Waerden, (1963). *Science Awakening*. Translated by Arnold Dresden. New York: John Wiley.

Worp K.A., Bruins E.M., Sijpesteijn P.J., (1974), *A Greek Mathematical Papyrus*. Janus. Revue internationale de l'histoire des sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique 61, 291 – 312, Amsterdam