602: Ασκήσεις V

1. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι, αν ορίζεται η απεικόνιση $S : Y^* \to X^* : g \to g \circ T$ (δηλ. $g(Tx) = (Sg)(x)$ για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$), τότε η T είναι συνεχής. Μάλιστα, η S είναι και αυτή γραμμική και συνεχής και $\|S\| = \|T\|$.

2. Δείξτε ότι η πληρότητα του X δεν μπορεί να παραλειφθεί στο θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, θεωρώντας τον $X = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ και την ακολουθία $f_n : c_{00} \to \mathbb{K}$ με $f_n : (x(k)) \to nx(n)$.

3. Αν X χώρος με νόρμα, και $x_n \to x$ στον X, τότε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;

4. Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Δείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.

Αν επιπλέον ο Y είναι πλήρης, δείξτε ότι υπάρχει $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$.

5. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_1 : X \to Y$ τελεστής με κλειστό γράφημα, και $T_2 : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Δείξτε ότι ο $T_1 + T_2$ έχει κλειστό γράφημα.

6. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με κλειστό γράφημα. Δείξτε ότι:

(α) Αν $C \subseteq X$ συμπαγές, τότε το $T(C)$ είναι κλειστό στον Y.

(β) Αν $K \subseteq Y$ συμπαγές, τότε το $T^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X.

7. Έστω X χώρος με νόρμα, και (x_k) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

8. Ξεκινώντας από το θεώρημα κλειστού γραφήματος, αποδείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης.

9. Θεωρούμε τον $C[0,1]$ και τον υπόχωρό του $C^1[0,1]$ που αποτελείται από όλες τις f που έχουν συνεχή παράγωγο f' στο $[0,1]$. Ορίζουμε $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ με $Tf = f'$.

(α) Δείξτε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;

10. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $g \in Y^*$, τότε $g(Tx_n) \to 0$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

11. Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$, ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$, ο $T^y : X \to Z$ με $T^y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής (δηλ. η T είναι *διγραμμική* και *χωριστά συνεχής*). Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|T(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, y \in Y$$

και άρα η $T : X \times Y \to Z$ είναι συνεχής.