602: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. (α) Αν $Y \subseteq X$ είναι γραμμικός (κλειστός;) υπόχωρος και $x \in X$, να δειχθεί ότι

$$\mathrm{dist}(x, Y) = \max\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1, f|_Y = 0\}$$

(β) Αν $f \in X^*$ και $\|f\| = 1$, να δειχθεί ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\mathrm{dist}(x, \ker f) = |f(x)|$.

2. Αν $Y \subseteq X$ είναι γραμμικός υπόχωρος να δειχθεί ότι $\overline{Y} = \bigcap\{\ker f : f \in X^*, f|_Y = 0\}$.
Επίσης να δειχθεί ότι $\{0\} = \bigcap\{\ker f : f \in X^*\}$.

3. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος να δειχθεί ότι υπάρχουν $\{f_1, f_2, \dots\} \subseteq S_{X^*}$ ώστε $\{0\} = \bigcap\{\ker f_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Αν $A \subseteq X$, να δειχθεί ότι $\overline{\mathrm{span}(A)} = \bigcap\{\ker f : f \in X^*, f|_A = 0\}$.
Πόρισμα: το $\mathrm{span}(A)$ είναι πυκνό στον X αν και μόνον αν η μόνη $f \in X^*$ που μηδενίζει το A είναι η $f = 0$.

5. Έστω $Y \subseteq X$ είναι γραμμικός υπόχωρος, Για κάθε $f \in X^*$ θέτουμε $R(f) = f|_Y$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $R : X^* \to Y^*$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής και $R(B_{X^*}) = B_{Y^*}$.
Παρατηρούμε ότι ο R είναι επί. Ποιός είναι ο $\ker R$;

6. Έστω $\{t_1, t_2, \dots t_n\}$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του $[0, 1]$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Ορίζουμε την $\phi : C([0, 1]) \to \mathbb{K}$ ως εξής:

$$\phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(t_k), \quad f \in C([0, 1]).$$

Να δειχθεί ότι η ϕ είναι συνεχής γραμμική μορφή και ότι $\|\phi\| = \sum_k |\lambda_k|$.

7. Να δειχθεί ότι αν ένας χώρος με νόρμα X έχει αλγεβρική διάσταση τουλάχιστον n, τότε ο τοπολογικός δυικός του X^* έχει αλγεβρική διάσταση τουλάχιστον n.

8. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$M = \sup\{|f(Tx)| : \|x\| \leq 1, \|f\| \leq 1\} < +\infty.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, δείξτε ότι $\|T\| = M$.

9. Έστω c ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |x(k)|$, αν $x = (x(k))$.

(α) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $x = (x(n)) \in c$ με $\lim_n x(n) = a$, θεωρήστε $S(x) = (a, x(1) - a, x(2) - a, ...) \in c_0$.]

(β) Δείξτε ότι οι χώροι c και c_0 *δεν* είναι ισομετρικά ισόμορφοι. [*Υπόδειξη:* Αν $T : c_0 \to c$ είναι μια ισομετρία επί, παρατηρήστε ότι υπάρχουν $x, y \in B_{c_0}$ με $x \neq y$ ώστε $\frac{Tx+Ty}{2} = \mathbf{1}$ (όπου $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$).]