Θεώρημα Hahn - Banach: μιγαδική μορφή

Θεώρημα 1 (επέκτασης) *Έστω X πραγματικός ή μιγαδικός γραμμικός χώρος, και $p : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμα. Έστω Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ γραμμική μορφή με την ιδιότητα:*

$$\text{για κάθε } \ y \in Y, \quad |f(y)| \le p(y).$$

Τότε, υπάρχει γραμμική μορφή $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε

(i) $\tilde{f}(y) = f(y)$ αν $y \in Y$ (η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f), και

(ii) $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα 2 (Hahn - Banach) *Έστω X χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή.*

Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $\tilde{f}|_Y = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|_{Y^*}$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής και γραμμική επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)

Απόδειξη Άμεση από το Θεώρημα Επέκτασης, θέτοντας $p(x) = \|f\| \, \|x\|$, $x \in X$. $\square$

Η απόδειξη του Θεωρήματος Επέκτασης για την μιγαδική περίπτωση στηρίζεται στην πραγματική περίπτωση και στην παρατήρηση ότι μια μιγαδική γραμμική μορφή καθορίζεται από το πραγματικό της μέρος:

Λήμμα 1 *Έστω X μιγαδικός γραμμικός χώρος.*

(α) *Αν $g : X \to \mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική και θέσουμε $f(x) = \mathrm{Re}g(x)$, τότε η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική* [1] *και $g(x) = f(x) - if(ix)$ για κάθε $x \in E$.*

(β) *Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική, τότε η $f_1 : X \to \mathbb{C}$ με $f_1(x) = f(x) - if(ix)$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική και ικανοποιεί* $\mathrm{Re}f_1(x) = f(x)$ *για κάθε $x \in E$.*

(γ) *Αν $p : X \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα και f, f_1 είναι όπως στο (β), τότε*

$$|f(x)| \le p(x) \ \ \forall x \in X \iff |f_1(x)| \le p(x) \ \ \forall x \in X.$$

Απόδειξη (α) Είναι φανερό οι το πραγματικό μέρος μιας $\mathbb{C}$-γραμμικής απεικόνισης είναι $\mathbb{R}$-γραμμική. Δείχνουμε ότι $g(x) = f(x) - if(ix)$, δηλαδή $\mathrm{Im}g(x) = -\mathrm{Re}g(ix)$ για κάθε $x \in E$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}g(ix) &= \frac{1}{2}(g(ix) + \overline{g(ix)}) = \frac{1}{2}(ig(x) + \overline{ig(x)}) = \frac{i}{2}(g(x) - \overline{g(x)}) \\ &= \frac{-1}{2i}(g(x) - \overline{g(x)}) = -\mathrm{Im}g(x)\,.\end{aligned}$$

(β) Αν $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε είναι άμεσο ότι $f_1(x + y) = f_1(x) + f_1(y)$ και ότι $f_1(\lambda x) = \lambda f_1(x)$ (γιατί αυτές οι σχέσεις ισχύουν για την f). Για να δείξουμε ότι η f_1 είναι $\mathbb{C}$-γραμμική μένει να δείξουμε ότι $f_1(ix) = if_1(x)$, το οποίο είναι επίσης άμεσο αφού $f_1(ix) = f(ix) - if(i^2x) = f(ix) + if(x) = i(f(x) - if(ix)) = if_1(x)$.

Τέλος, $\mathrm{Re}f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) - if(ix) + \overline{f(x) - if(ix)}) = f(x)$ αφού $f(x), f(ix) \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $|f_1(x)| \le p(x)$, τότε βεβαίως $|f(x)| = |\mathrm{Re}f_1(x)| = |f_1(x)| \le p(x)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $|f(y)| \le p(y)$ για κάθε $y \in X$. Τότε, αν $x \in X$ υπάρχει μιγαδικός αριθμός λ με $|\lambda| = 1$ ώστε $|f_1(x)| = \lambda f_1(x)$ (βάλε $\lambda = \frac{|f_1(x)|}{f_1(x)}$ όταν $f_1(x) \neq 0$ και $\lambda = 1$ όταν $f_1(x) = 0$). Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}|f_1(x)| &= \lambda f_1(x) = f_1(\lambda x) = \mathrm{Re}f_1(\lambda x) \quad (\text{ γιατί } f_1(\lambda x) \in \mathbb{R}) \\ &= f(\lambda x) = |f(\lambda x)| \qquad\qquad (\text{ γιατί } f(\lambda x) = |f_1(x)| \ge 0) \\ &\le p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x)\,.\end{aligned}$$

$\square$

[1] δηλ. $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

Απόδειξη του Θεωρήματος Επέκτασης
Στην περίπτωση που ο X είναι πραγματικός χώρος, έχουμε δείξει (στο αντίστοιχο Θεώρημα Επέκτασης) ότι η f έχει γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\tilde{f}(x) \le p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Έπεται ότι $-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \le p(-x) = p(x)$ (αφού η p είναι ημινόρμα) και συνεπώς $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Στην περίπτωση που ο X είναι μιγαδικός χώρος, ονομάζουμε $f_0 : Y \to \mathbb{R}$ την απεικόνιση $f_0(y) = \mathrm{Re} f(y)$ η οποία είναι $\mathbb{R}$-γραμμική και ικανοποιεί $|f_0(y)| \le p(y)$ για κάθε $y \in Y$.

Θεωρώντας τον X ως πραγματικό χώρο, εφαρμόζουμε αυτό που μόλις αποδείξαμε: υπάρχει λοιπόν μια $\mathbb{R}$-γραμμική επέκταση $\tilde{f}_0 : X \to \mathbb{R}$ της f_0 που ικανοποιεί $|\tilde{f}_0(x)| \le p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε τώρα την $\tilde{f} : X \to \mathbb{C}$ όπως στο (β) του Λήμματος:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0(x) - i\tilde{f}_0(ix), \quad x \in X.$$

Από το (β) του Λήμματος ξέρουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμική και ότι $\mathrm{Re}\tilde{f}(x) = \tilde{f}_0(x)$ και από το (γ) ότι φράσσεται όπως και η $\tilde{f}_0$, δηλαδή $|\tilde{f}(x)| \le p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Τέλος, η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f: Πράγματι, αν $y \in Y$ έχουμε $iy \in Y$ και συνεπώς $\tilde{f}_0(y) = f_0(y)$ και $\tilde{f}_0(iy) = f_0(iy)$, οπότε

$$\tilde{f}(y) = \tilde{f}_0(y) - i\tilde{f}_0(iy) = f_0(y) - if_0(y) = f(y)$$

χρησιμοποιώντας το (α) του Λήμματος, αφού $f_0(y) = \mathrm{Re} f(y)$.

$\square$