Το Θεώρημα Hahn-Banach για διαχωρίσιμους χώρους

Θεώρημα 1 *Έστω X πραγματικός χώρος με νόρμα, Y_0 γραμμικός υπόχωρος του X, και $f : Y_0 \to \mathbb{R}$ φραγμένη γραμμική μορφή. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $\tilde{f}|_{Y_0} = f$ και $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. (Δηλαδή, υπάρχει συνεχής επέκταση του f στον X, με διατήρηση της νόρμας.)*

Η ιδέα της απόδειξης, όταν ο X είναι διαχωρίσιμος. Το πρώτο βήμα είναι να επεκτείνω την f σε έναν υπόχωρο κατά μία διάσταση μεγαλύτερο από τον Y_0:

Λήμμα 1 *Με τις ίδιες υποθέσεις, έστω $x \in X \setminus Y_0$ και $Y_1 = \text{span}(Y_0 \cup \{x\})$. Τότε, υπάρχει $f_1 : Y_1 \to \mathbb{K}$ φραγμένη γραμμική μορφή με $f_1|_{Y_0} = f$ και $\|f_1\| = \|f\|$.*
(Για την απόδειξη, δες τις σημειώσεις του μαθήματος).

Με δεδομένο το Λήμμα, επεκτείνω διαδοχικά την f σε ολοένα μεγαλύτερους υποχώρους, απορροφώντας ένα προς ένα τα διανύσματα ενός αριθμήσιμου πυκνού υποσυνόλου του X. Τότε, έχω επεκτείνει την f (με διατήρηση πάντα της νόρμας) σε μια f_0 ορισμένη σε έναν *πυκνό* υπόχωρο του X, οπότε μπορώ λόγω συνέχειας της f_0 να την επεκτείνω σε όλον τον X.

Απόδειξη του Θεωρήματος όταν ο X είναι διαχωρίσιμος.
Έστω $D = \{d_1, d_2, \dots\} \subseteq X$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Ονομάζω x_1 το πρώτο στοιχείο του D (ως προς την συγκεκριμένη αρίθμηση) [1] που δεν ανήκει στον Y_0 και θέτω $Y_1 = \text{span}(Y_0 \cup \{x_1\})$. Από το Λήμμα, υπάρχει $f_1 : Y_1 \to \mathbb{R}$ γραμμική τέτοια ώστε $f_1|_{Y_0} = f$ και $\|f_1\| = \|f\|$.

Ονομάζω x_2 το πρώτο στοιχείο του D που δεν ανήκει στον Y_1 και θέτω $Y_2 = \text{span}(Y_1 \cup \{x_2\}) = \text{span}(Y \cup \{x_1, x_2\})$. Πάλι από το Λήμμα, υπάρχει $f_2 : Y_2 \to \mathbb{R}$ γραμμική τέτοια ώστε $f_2|_{Y_1} = f_1$ και $\|f_2\| = \|f_1\|$, άρα $f_2|_{Y_0} = f$ και $\|f_2\| = \|f\|$. [2]

Συνεχίζω επαγωγικά: αν έχω τους υποχώρους $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_k \subseteq X$ και τις διαδοχικές γραμμικές επεκτάσεις $f_j : Y_j \to \mathbb{R}$ ώστε $f_j|_{Y_{j-1}} = f_{j-1}$ και $\|f_j\| = \|f_{j-1}\|$ για $j \le k$, ονομάζω x_{k+1} το πρώτο στοιχείο του D που δεν ανήκει στον Y_k (*αν υπάρχει*) και θέτω $Y_{k+1} = \text{span}(Y_k \cup \{x_{k+1}\}) = \text{span}(Y \cup \{x_1, \dots, x_{k+1}\})$. Πάλι από το Λήμμα, υπάρχει $f_{k+1} : Y_{k+1} \to \mathbb{R}$ γραμμική τέτοια ώστε $f_{k+1}|_{Y_k} = f_k$ και $\|f_{k+1}\| = \|f_k\|$, άρα $f_{k+1}|_{Y_0} = f$ και $\|f_{k+1}\| = \|f\|$.

Αν δεν υπάρχει στοιχείο του D που δεν ανήκει στον Y_k, αν δηλαδή $D \subseteq Y_k$, τότε ο Y_k είναι πυκνός υπόχωρος του X. Επομένως, όπως έχουμε δείξει, η γραμμική μορφή $f_k : Y_k \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή και γραμμική επέκταση $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ με $\|\tilde{f}\| = \|f_k\|$, άρα $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ και $\tilde{f}|_{Y_0} = f$. Η διαδικασία έχει τελειώσει.

Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $Y_n \setminus D \neq \emptyset$, τότε έχω μια άπειρη ακολουθία υποχώρων $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n \subset \cdots \subset X$ και διαδοχικών γραμμικών επεκτάσεων $f_n : Y_n \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n|_{Y_{n-1}} = f_{n-1}$ και $\|f_n\| = \|f_{n-1}\| = \|f\|$ για κάθε n.

Ονομάζω τότε $X_0 = \bigcup_n Y_n$ και ορίζω μία $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ ως εξής: για κάθε $x \in X_0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in Y_n$: ορίζω $f_0(x) = f_n(x)$.

Παρατηρώ ότι η f_0 είναι *καλά ορισμένη*, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή του n. Γιατί αν υπάρχει $n' \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in Y_{n'}$ τότε, εφόσον η οικογένεια $\{Y_n\}$ είναι ολικά διατεταγμένη, θα ισχύει $Y_n \subseteq Y_{n'}$ ή $Y_{n'} \subseteq Y_n$, άρα, αφού οι $\{f_n\}$ είναι διαδοχικές επεκτάσεις, θα έχουμε $f_n(x) = f_{n'}(x)$ σε κάθε περίπτωση.

Ισχυρίζομαι ότι ο X_0 είναι γραμμικός χώρος, και ότι η f_0 είναι συνεχής γραμμική μορφή, επέκταση της f και ικανοποιεί $\|f_0\| = \|f\|$.

Πράγματι, αν $x, x' \in X_0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχουν $n, n' \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in Y_n$ και $x' \in Y_{n'}$. Αν $m = \max\{n, n'\}$ τότε $Y_n \subseteq Y_m$ και $Y_{n'} \subseteq Y_m$, άρα $x + \lambda x' \in Y_m$ οπότε $x + \lambda x' \in X_0$. Επίσης $f_0(x + \lambda x') = f_m(x + \lambda x') = f_m(x) + \lambda f_m(x') = f_0(x) + \lambda f_0(x')$.

[1] δηλαδή, $x_1 = d_{n_1}$ όπου $n_1 = \min\{n : d_n \in D \setminus Y_0\}$

[2] Το βήμα αυτό παρατίθεται για λόγους καλύτερης κατανόησης. Δεν χρειάζεται στην απόδειξη, αφού καλύπτεται από το επαγωγικό βήμα.

Είναι φανερό ότι η f_0 επεκτείνει την f, αφού κάθε f_n επεκτείνει την f. Τέλος, για κάθε $x \in X_0$ έχουμε $|f_0(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$, γιατί υπάρχει n ώστε $f_0(x) = f_n(x)$ όποτε $|f_0(x)| = |f_n(x)| \leq \|f_n\| \, \|x\| = \|f\| \, \|x\|$. Συνεπώς από τον ορισμό της $\|f_0\|$ έχουμε την ανισότητα $\|f_0\| = \sup\{|f_0(x)| : \|x\| \leq 1\} \leq \|f\|$, οπότε ισχύει ισότητα αφού η f_0 επεκτείνει την f.

Παρατηρώ όμως ότι ο υπόχωρος X_0 *είναι πυκνός* στον X, αφού περιέχει το πυκνό υποσύνολο (πράγματι, κάθε x_n ανήκει στο $Y_n \subseteq X_0$, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία του D ανήκουν στο Y_0). Κατά συνέπεια, η f_0 δέχεται γραμμική και συνεχή επέκταση $\tilde{f}$ στον X (αφού είναι συνεχής) τέτοια ώστε $\|\tilde{f}\| = \|f_0\|$, άρα $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Η $\tilde{f}$ είναι επέκταση της f και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Σκέψεις για τη γενική περίπτωση.
Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{Y}$ όλων των δυνατών επεκτάσεων (Y, g) της f: δηλαδή όλων των (Y, g) όπου ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X που περιέχει τον Y_0, και η $g : Y \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική μορφή που επεκτείνει την f χωρίς να μεγαλώνει τη νόρμα της. Για κάθε $(Y, g) \in \mathcal{Y}$, αν $Y \neq X$, θεωρώντας ένα $x \in X \setminus Y$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια g' ορισμένη στον υπόχωρο $Y' = \mathrm{span}(Y \cup \{x\})$ με $\|g'\| = \|g\| = \|f\|$ κι έτσι θα έχουμε μιαν επέκταση $(Y', g') \in \mathcal{Y}$ "γνησίως μεγαλύτερη" από την (Y, g).

Επομένως, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει μια επέκταση $(Y, g) \in \mathcal{Y}$ που "δεν μεγαλώνει άλλο", δηλαδή μια *μεγιστική* επέκταση. Αυτό ακριβώς εξασφαλίζει το *Λήμμα του Zorn*, αν αποδείξουμε ότι κάθε *ολικά διατεταγμένο* υποσύνολο του $\mathcal{Y}$ (κάθε "αλυσίδα") έχει ένα "άνω φράγμα". Η απόδειξη ότι κάθε αλυσίδα επεκτάσεων έχει άνω φράγμα είναι εντελώς ανάλογη με την κατασκευή της επέκτασης (X_0, f_0) που έγινε στην απόδειξη που μόλις είδαμε.

Στη διαχωρίσιμη περίπτωση δεν αναζητήσαμε μια μεγιστική επέκταση: μας ήταν αρκετό να φτιάξουμε μια αριθμήσιμη αλυσίδα (Y_n, f_n) από επεκτάσεις, οι οποίες είχαν ένα "άνω φράγμα" (X_0, f_0) που ήταν πυκνός υπόχωρος, και μετά επικαλούμενοι την συνέχεια της f_0 (ένα τοπολογικό επιχείρημα δηλαδή) επεκτείναμε την f_0 σ' όλον τον χώρο X.