602: Ασκήσεις II

1. (α) Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό και συμμετρικό (δηλ. $x \in A \Rightarrow -x \in A$). Δείξτε ότι αν $A^o \neq \emptyset$ τότε $0 \in A^o$.

(β) Εξετάστε αν το σύνολο $\{x = (x(n)) \in \ell^\infty : |x(n)| < \frac{1}{n}\}$ είναι ή όχι ανοικτό στον ℓ^∞.

2. Έστω E γραμμικός χώρος και $f : E \to \mathbb{K}$ γραμμική μορφή. (α) Αν $M_1 := \{x \in E : f(x) = 1\} \neq \emptyset$ δείξτε ότι για κάθε $x_1 \in M_1$ ισχύει $M_1 = \ker f + x_1$.

(β) Έστω $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ γραμμικές μορφές στον E. Υποθέτουμε ότι

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0$$

(δηλαδή ότι $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker f$). Δείξτε ότι η f είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{f_1, \ldots, f_n\}$: υπάρχουν $a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$ για κάθε $x \in E$.

3. Έστω (X, d), (Y, ρ) γραμμικοί και μετρικοί χώροι στους οποίους οι γραμμικές πράξεις είναι συνεχείς. Αποδείξτε ότι μια γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνον αν υπάρχει περιοχή V του $0 \in X$ ώστε το σύνολο $T(V) \subseteq Y$ να είναι φραγμένο.
Διόρθωση: Δεν ισχύει ως έχει. Ισχύει αν ο Y είναι χώρος με νόρμα.

4. Έστω $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

5. Αν $C_\infty([0,1])$ είναι ο χώρος των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$, δείξτε ότι η απεικόνιση $f \to f'$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική $(C_\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to C_\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, αλλά δεν είναι συνεχής.

6. (α) Δείξτε ότι η γραμμική μορφή

$$\psi : C([0,1]) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

είναι συνεχής στον $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(β) Δείξτε ότι ο τελεστής

$$T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \quad \text{με} \quad (Tf)(s) = \int_0^s f(t)dt \quad (s \in [0,1])$$

είναι καλά ορισμένος και συνεχής [1] και βρείτε τη νόρμα του. Εξετάστε αν είναι 1-1, αν είναι επί και αν έχει ιδιοτιμές.

7. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to \ell_2$ τον τελεστή της μετατόπισης ως εξής:
αν $x = (x(1), x(2), \ldots)$, θέτουμε $Tx = (x(2), x(3), \ldots)$.

(α) Δείξτε ότι ο T ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Αν $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n φορές), βρείτε την $\|T^n\|$, $n \in \mathbb{N}$, και το $\lim_n \|T^n\|$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, βρείτε το $\lim_n \|T^n x\|_2$.

8. Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $x_n, x \in X$. Δείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.

9. Θεωρούμε τον c_0 με τη supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Δείξτε ότι ο δυϊκός του χώρος $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

---

[1] Έχει αποδειχθεί, με άλλη γλώσσα, στην Πραγματική Ανάλυση.

10. *(Προαιρετικά)* Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \limsup_n x(n)$ (όπου $x = (x(n))$) είναι καλά ορισμένη αλλά όχι γραμμική (όπου $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ ο (πραγματικός) χώρος των πραγματικών φραγμένων ακολουθιών). Εξετάστε επίσης αν $f(x+y) = f(x) + f(y)$ όταν $x(n) \geq 0$ και $y(n) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν δηλαδή ο περιορισμός της f στο σύνολο των πραγματικών φραγμένων ακολουθιών με μη αρνητικές τιμές είναι προσθετική απεικόνιση.

Μπορείτε να βρείτε μια συνεχή γραμμική μορφή $f : \ell^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ που να μηδενίζεται στον c_0 ;

Μπορείτε να αποδείξετε ότι ο $(\ell^\infty)^*$ δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1;