11 Μαΐου 2016

Volterra:

$$f(t)=g(t)+\int_a^t \mu K(t,s)f(s)\,ds \qquad (V)$$

Ερώτηση: Βγαίνει με παραγώγιση; Απάντηση: Δεν είναι παραγωγίσιμες.

Καλά, ας τις προσεγγίσουμε παραγωγίσιμες:

$$f'(t) = \cancel{g'(t)+\mu} K(t,t)f(t) \quad \text{ΛΑΘΟΣ!!}$$

Άλλη προσέγγιση: πρώτα υποθέτω: $K(t,s)=K_1(t)K_2(s)$

$$(V) \Rightarrow f(t) = g(t)+\mu K_1(t)\int_a^t K_2(s)f(s)\,ds$$

υποθέτω επίσης g, K_1 είναι παραγ.

$$f'(t)=g'(t)+\mu K_1'(t)\int_a^t K_2(s)f(s)\,ds+\mu K_1(t)K_2(t)f(t)$$

τι κατάλαβα;

$$(F): \quad f(t)=g(t)+\int_a^b \mu K(t,s)f(s)\,ds$$

(α) υποθέτω πρώτα $K(t,s)=K_1(t)K_2(s)$

$$f(t)=g(t)+\mu K_1(t)\underbrace{\int_a^b K_2(s)f(s)\,ds}_{\langle f,\bar{K}_2\rangle}$$

$f=g+\mu Tf$ όπου $T(f)=\langle f,\bar{K}_2\rangle K_1$: πρώτης τάξης

(β) αν $K(t,s)=\sum_{n=1}^{N} K_n^1(t)K_n^2(s)$

πάλι $f=g+\mu Tf$, $T(f)=\sum_{n=1}^{N}\langle f,\bar{K}_n^2\rangle K_n^1$

πεπερασμένης τάξης

(γ) Γενική περίπτωση K συνεχής

$\exists$ ακολουθία (K_n) από παραπάνω

$$\|K_n-K\|_\infty \to 0 \text{ στο } [a,b]\times[a,b]$$

Ελπίζω: T_{K_n}, T_K θα ικανοποιούν:

$$\|T_{K_n}-T_K\|\le M\|K_n-K\|_\infty \to 0$$

Αυτή η μέθοδος δουλεύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 1 $\underset{B}{X} \xrightarrow{T} \underset{B}{Y}$ γραμμ

T συνεχής $\iff \forall g \in Y^*$, η $g \circ T : X \to Y \to \mathbb{K}$ ανήκει στο X^*

Απόδ ($\Rightarrow$): προφανές

($\Leftarrow$) Θέτω: $S : Y^* \longrightarrow X^*$ καλά ορισμένη
$g \longmapsto g \circ T$

παρατηρώ ότι S γραμμική: $\forall y \in Y$:

$$S(g_1 + \lambda g_2)(y) = (g_1 + \lambda g_2) \circ T(y)$$

$$= (g_1 + \lambda g_2)(Ty)$$
$$= g_1(Ty) + \lambda g_2(Ty)$$
$$= \big((g_1 \circ T) + \lambda (g_2 \circ T)\big)(y)$$

$$= \big(S(g_1) + \lambda S(g_2)\big)(y)$$

για νδο T συνεχής αφού X, Y Banach, αρκεί κλειστό γραφ!

Έστω $x_n \in X$: $x_n \to 0$ και $Tx_n \to y$ $\Big\}$ $\overset{\text{νδο}}{\Rightarrow}$ $y = 0$

$$\forall g \in Y^* : g(y) = g(\lim_n Tx_n) \underset{\text{συνεχ}}{\overset{g}{=}} \lim_n g(Tx_n)$$
$$= \lim_n \underbrace{S(g)}_{\in X^*}(x_n)$$
$$= S(g)(\lim_n x_n) = S(g)(0) = 0$$

έδειξα ότι $\forall g \in Y^*$,
$g(y) = 0$
άρα $y = 0$ από $\underset{\Sigma}{\text{HB}}$

(Σε Hilbert θα πήγαινε ως εξής:
$\langle g, y \rangle = \langle g, \lim Tx_n \rangle = \lim \langle g, Tx_n \rangle$

$= \lim \langle Sg, x_n \rangle = 0$)

(2) $(c_{00}, \|\ \|_\infty)$: χώρος με ν, όχι Β

$$f_n : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x(n)) \longrightarrow n\, x(n)$$

προφ. γραμμική και επίσης

$$|f_n(x)| = |n\, x(n)| \le n \|x\|_\infty \quad : f_n \text{ συνεχή}$$

Επίσης, $\forall x \in c_{00}$,

$\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο

$\{n\, x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμ.

αφού μόνο πεπερ. πλήθος $x(n)$ είναι $\neq 0$

(πως $x(n) = 0 \ \forall n \ge n_0^x$) οπότε

$$|n\, x(n)| \le n_0^x \|x\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

οπότε η οικογένεια $\{f_n\}$ είναι κ.σ. φραγμ.

όχι όμως ομοιόμορφα φραγμ.:

$$\nexists M : \forall x \in c_{00} \ \forall n, \ |f_n(x)| \le M \|x\|_\infty$$

(ισοδ) $\nexists M : \forall n, \ \|f_n\| \le M$

διότι $\|f_n\| = n$

πράγματι, αφενός $\forall x$, $|f_n(x)| \le n \|x\|_\infty$

άρα $\|f_n\| \le n$

αφετέρου $\forall n$, αν πάρω $x = e_n$

τότε $\|e_n\|_\infty = 1$

$f_n(e_n) = n$ άρα $\|f_n\| \ge n$

Αν κοιτάξω την $T : (c_{00}, \|\ \|_\infty) \longrightarrow (c_0, \|\ \|_\infty)$

$$(x(n)) \longrightarrow (n\, x(n))$$

έχουμε δει ότι T έχει κλειστό γραφ., αλλά δεν είναι φραγμ.

(3) $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x \Rightarrow \forall f \in X^*,\ f(x_n) \to f(x)$

σωστό!

$\overset{?}{\Leftarrow}$

όχι.

<u>πχ</u> $X = (\ell^p, \|\ \|_p),\ 1 < p < +\infty$

αν $x_n = e_n$ τότε $\forall f \in (\ell^p)^*$ ισχύει $f(e_n) \to 0$
αλλά $\|e_n\|_p \not\to 0$

διότι <u>πχ</u> ο δυϊκός του ℓ^p είναι ο ℓ^q
οπότε η f είναι της μορφής

$$f(x) = \sum_k y(k)x(k) \quad \forall x \in \ell^p \qquad \underbrace{(y(k)) \in \ell^q}_{\exists} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

οπότε

$$f(e_n) = y(n) 1 \to 0$$

διότι η $(y(n))_n$ είναι μηδενική αφού $\in \ell^q$
$(q < +\infty)$

$p = +\infty$: ℓ^∞ ή για c_0;

$\uparrow$ όχι ακριβώς το ίδιο — $\uparrow$ το ίδιο επιχείρημα διότι $c_0^* \cong \ell^1$

Ξέρω ότι $e_n \in B(\ell^\infty)$, $\|e_n\|_\infty = 1 \not\to 0$
αλλά δεν ξέρω ποια είναι τα $f \in (\ell^\infty)^*$!

(4) $\overset{B}{X} \xrightarrow{T_n} \overset{N}{Y}$, T_n: γραμμ., συνεχείς

$\forall x \in X$, $(T_n x)_n$ βασική στον Y

Δ.ο. η $\|T_n\|$ είναι φραγμ.

<u>Απόδ.</u> αφού $(T_n x)$ βασική, είναι φραγμ.

<u>δηλ.</u> $\forall x$, $\exists M_x$: $\sup_n \|T_n x\| \leq M_x$

X: Banach $\Rightarrow$ η (T_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη:

δηλ. $\exists M$: $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ $\forall x$.

Αν επιπλέον Y Banach νδο $\exists T: X \to Y$ <u>φραγμ.</u> έτσι ώστε $\forall x$, $Tx = \lim T_n x$

$\forall x$, $(T_n x)$ βασική στο Y, άρα συγκλίνει, δηλ. $\exists y_x \in Y$: $y_x = \lim_n T_n x$

Επειδή $\forall T_n$ είναι γραμμ., η $x \longmapsto y_x : X \to Y$ είναι γραμμική

Επίσης, $\forall n$, $\|T_n x\| \leq M\|x\|$

άρα $\|y_x\| \leq M\|x\|$

άρα $x \longmapsto y_x$ είναι φραγμ. τελ.

(5) $X \underset{T_2}{\overset{T_1}{\longrightarrow}} Y$ χώροι με νόρμα

γραμμ.

T_1: κλειστό γραφ.

T_2: συνεχής $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ T_1+T_2 έχει κλ. γραφ.

<u>Απόδ.</u> Θέτω $S = T_1+T_2$: γραμμική

ν.δ.ο. έχει κλ. γραφ.

Έστω

$$\left.\begin{array}{l} (x_n) : x_n \to x \\ \text{και } Sx_n \to y \end{array}\right\} \text{ ν.δ.ο. } y = Sx$$

$$\left.\begin{array}{l} Sx_n = T_1x_n + T_2x_n \to y \\ x_n \to x \\ \Downarrow T_2 \text{ συν} \\ T_2x_n \to T_2x \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1x_n \to y - T_2x \\ \text{και } x_n \to x \end{array}\right\} \overset{T_1 \text{ κλειστό γραφ}}{\Longrightarrow}$$

$\Longrightarrow$ $T_1(x) = y - T_2(x)$

άρα $(T_1+T_2)(x) = y$ δηλ. T_1+T_2 έχει κλ. γραφ. ✓

(6) $\overset{N}{X} \xrightarrow{T} \overset{N}{Y}$ γραμμ., κλειστό γράφημα

$\underset{\text{συμπ.}}{\overset{\cup\!|}{C}} \overset{\text{νδο}}{\Longrightarrow} \underset{\text{κλειστό}}{T(C)}$

Έστω $y \in \overline{T(C)}$

$\exists (x_n) : x_n \in C$ και

$Tx_n \to y$

νδο $\exists x \in C : Tx = y$

(x_n) στο C : συμπαγές $\Rightarrow$ x_n έχει υπακ. (x_{k_n})

τ.ω. $x_{k_n} \to x \in C$

και $\left.\begin{array}{l} x_{k_n} \to x \\ Tx_{k_n} \to y \end{array}\right\} \xRightarrow{T \text{ κλ. γραφ.}} T(x) = y$ ∎

Επίσης $X \xrightarrow{T} Y$

$\qquad\qquad\qquad \overset{\cup\!|}{U}$

$T^{-1}(U) \Longleftarrow \underset{\text{συμπ.}}{U}$

νδο: κλειστό

Απόδ. Έστω $x \in \overline{T^{-1}(U)}$ οπότε $\exists x_n \in T^{-1}(U)$

με $x_n \to x$

νδο $x \in T^{-1}(U)$

δηλ. $\exists y \in U$ ώστε

$Tx = y$

$\forall n$, $x_n \in T^{-1}(U)$ $\exists y_n$ (όχι μοναδικό) στο U

ώστε $Tx_n = y_n$

(y_n) στο U η οποία, αφού U συμπ.

έχει (y_{k_n}) υπακ. που συγκλίνει

σε κάποιο y στο U

η αντίστοιχη: $\left.\begin{array}{l} x_{k_n} \to x \\ \text{και } Tx_{k_n} = y_{k_n} \to y \end{array}\right\}$ T κλ. γραφ.

άρα $T(x) = y$.

∎

Θ. κλ. γραφ.

$$X \xrightarrow{T} Y$$ (X, Y: B) γραμ., κλ. γραφ.

$$Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

κλ. υπόχ. πλήρους μ.χ., άρα πλήρης μ.χ.

$X \times Y$ πλήρης

$$\begin{tikzcd} & Gr(T) \arrow[dl, "\Pi_1"'] \arrow[dr, "\Pi_2"] & \\ x & & Tx \end{tikzcd}$$

διότι αν $(x, Tx) = (0,0)$ τότε $x = 0$

$\Pi_1 : Gr(T) \to X$ γραμμ., 1-1, επί, συνεχής
διότι $\|x\| \leq \|(x, Tx)\|$

άρα, από Θεωρ. Ανοικτ. Απεικ.
η $\Pi_1^{-1} : x \longrightarrow (x, Tx)$ είναι συνεχής

δηλ. $\exists M : \|(x, Tx)\| \leq M \|x\|$

$\|$ ορισμού

$\|x\| + \|Tx\|$

$\Downarrow$

$\|Tx\| \leq M \|x\|$

άρα T φραγμ. $\Rightarrow$ T συνεχής

(7) $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα
(x_n) ακολ. στον X

τ.ω.: $\forall f \in X^*, \ \sum |f(x_n)| < +\infty$

$\Downarrow$ νδο

$\exists M: \forall f \in X^*: \sum |f(x_n)| \le M\|f\|$

Απόδ. Η υπόθεση λέει: $\forall f \in X^*$, η ακολουθία $(f(x_k)) \in \ell^1$

Επομένως, η απεικ. $(X^*, \|\ \|) \to (\ell^1, \|\ \|_1)$

$T: f \longmapsto (f(x_k))$

ορίζεται

Banach

X^* όμως Banach

Πρέπει

T γραμμική:

$T(f+\lambda g) = ((f+\lambda g)(x_n))$

$\| \leftarrow$ πράξεις στον X^*

$(f(x_n) + \lambda g(x_n))$

$\| \leftarrow$ πράξεις στο ℓ^1

$(f(x_n)) + \lambda(g(x_n))$

$\|$

$Tf + \lambda Tg$

Θέλω νδο $\exists M$:

$\forall f \in X^* \ \sum |f(x_n)| \le M\|f\|$

$\|$

δηλ: $\|Tf\|_1 \le M\|f\|$

δηλ νδο T είναι φραγμ.

να δούμε μήπως η T έχει κλειστό γράφημα

Έστω $f_n \in X^*$: $f_n \xrightarrow{\|\ \|} 0$ και $Tf_n \xrightarrow{\|\ \|_1} y$ $\Big\}$ νδο $y = 0$

δηλ νδο $\forall k, \ y(k) = 0$

Έχω ότι $y = \lim_{n\to\infty} Tf_n$ (στη $\|\ \|_1$)

όπως $\forall k \in \mathbb{N}$, $y(k) = \lim_{n\to\infty} (Tf_n)(k)$

$= \lim_n f_n(x_k)$

Όμως, ξέρω ότι $\sum_k |f_n(x_k)| < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

δηλ $(f_n(x_k))_k$ είναι αθροίσιμη

άρα είναι μηδενική

δηλ $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = 0$ $\forall n$

άλλο μου λέει!

ΑΠΟΤΥΧΙΑ!

Άλλη προσπάθεια:
Αρκεί νδο $\sum \|x_n\| < +\infty$

διότι τότε $\sum |f(x_n)| \leq \sum \|f\| \|x_n\|$

$= \|f\| \left(\sum \|x_n\| \right)$
$(\uparrow_M)$

αρκεί δηλ. να δω $(\|x_k\|) \in \ell^1$

γι αυτό, αρκεί νδο ότι $\forall (\xi_n) \in c_0$

ισχύει $\sum \xi_n \|x_n\| < +\infty$

$$\varphi : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto \cancel{\sum |f(x_n)|}$$

$\sum f(x_n)$ ορίζεται διότι η $\sum f(x_n)$ απόλυτα συγκλίνει άρα και απλά

και είναι γραμμική

???

Τρίτη Προσπάθεια:

$\forall n$, ορίζω $T_n : X^* \longrightarrow \ell^1$
$$f \longmapsto (f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n), 0, \dots)$$

T_n γραμμ., $\boxed{\text{φραγμ}}$.
διότι
$$\|T_n f\|_1 = \sum_{n=1}^{n} |f(x_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{n} \|x_n\| \right) \|f\|$$
$$\Rightarrow \|T_n\| \leq \sum_{n=1}^{n} \|x_n\|$$

Ισχ. $\forall f \in X^*$, $\{T_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμ.

Έστω $f \in X^*$:

$$\|T_n f\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < +\infty$$

οπότε $\sup_n \|T_n f\| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|}_{M_f}$

Επειδή ο X^* είναι Banach από PUB θα συμπεραίνουμε $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμ.

δηλ. $\exists M : \forall f$

$\forall n \qquad \|T_n f\| \leq M \|f\|$

$\forall n \qquad \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq M \|f\|$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M \|f\| \qquad \blacksquare$$

Μετά από αυτό, δες το αρχείο asksynteSlys.pdf