ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΑΣΚΗΣΗΣ: 18 Απρ.

$(c_0, \|\ \|_\infty)$ $\forall x = x(n) \in B_{c_0}$

μπορώ: $x = \dfrac{y+z}{2}$, $y, z \in B_{c_0}$, $y \neq z$

$x \in c_0$: $x(n) \longrightarrow 0$ $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $|x(n)| < 1/2$

$-1/2 < x(n_0) < 1/2$

$\forall n \geq n_0$ $y(n) = x(n) + \dfrac{1}{2^n}$

$z(n) = x(n) - \dfrac{1}{2^n}$: $|y(n)|, |z(n)| < 1$

$y(n) \neq z(n)$

$y = (x(1), x(2), \ldots x(n_0), y(n_0+1), \ldots)$

$z = (x(1), x(2), \ldots, x(n_0), z(n_0+1), \ldots)$

$y, z \in c_0$, $y \neq z$, $y, z \in B_{c_0}$ και $\dfrac{y+z}{2} = x$

(χρησιμοποιήθηκε στη λύση της Ασκ. III.9)

<u>Άσκηση</u>

$$T : (X, \| \ \|) \longrightarrow (Y, \| \ \|)$$

X: Banach, Y: με νόρμα

T : γραμμ., συνεχής, επί

Τότε $\exists \delta > 0 : \forall y \in Y \ \exists x \in X : Tx = y$

και $\|x\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\|$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΟ! ΔΕΣ ΣΤΙΣ 21 ΑΠΡ

<u>Πρόταση</u> Έστω $\| \ \|$ και $\| \ \|'$ δύο νόρμες στον γραμμ. χώρο X που είναι και <u>οι δύο πλήρεις</u>

Αν οι νόρμες συγκρίνονται
($\underline{\text{δηλ}}$ $\exists k: \|x\|' \le k\|x\|$ $\forall x \in X$
ή $\exists M: \|x\| \le M\|x\|'$ $\forall x$)
τότε είναι ισοδύναμες
($\underline{\text{δηλ}}$ $\exists \lambda: \lambda\|x\| \le \|x\|' \le k\|x\|$ $\forall x \in X$)

<u>Απόδ</u>

$$(X, \| \ \|) \xrightarrow[\text{γραμμ., 1-1, επί}]{T = id} (X, \| \ \|')$$

επιπλέον, $\forall x \in X$

$$\|Tx\|' = \|x\|' \le k\|x\|$$

δηλ. η T είναι συνεχής.
Αφού και οι δύο χώροι είναι Banach
έπεται ότι η T^{-1} είναι συνεχής
όπου $\exists \delta: \forall x:$
$$\|T^{-1}x\| \le \delta\|x\|'$$
άρα αν $y = T^{-1}x$ και $\lambda = \frac{1}{\delta}$ θα έχω

$$\|y\| \le \delta\|Ty\|' \text{ δηλ. } \lambda\|y\| \le \|y\|'$$

Ισχύει η

Πρότ

(X,ρ) μετρ. χώρος όπου η τοπολογία ορίζεται από μία πλήρη μετρική ρ

(Y,τ) τοπολογικός μετρ. χώρος Hausdorff

$T:(X,\rho) \to (Y,\tau)$
γραμμική και συνεχής

Τότε ή το $T(X)$ καλύπτεται από αριθμήσιμη ένωση συνόλων με κενό εσωτερικό

ή αλλιώς ο T είναι επί, άρα $T(X)=Y$
και η τ ορίζεται από μία πλήρη μετρική.

Για παράδειγμα:

$$T \overset{id}{=} : \underset{X =}{(\ell^1, \|\ \|_1)} \longrightarrow (\ell^1, \|\ \|_\infty) = Y$$

Banach $\qquad\qquad$ όχι Banach

τότε:

$T(X)$ είναι αριθμήσιμη ένωση υποσυνόλων με κενό εσωτερικό ως προς τη $\|\ \|_\infty$.

Πράγματι: $T(X) = \ell^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

όπου $B_n = \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 \le n\}$

ισχυρίζομαι ότι

$$\mathrm{int}_{\|\ \|_\infty}(B_n) = \emptyset \quad \forall n$$

$B_n = \{x \in \ell^1 : \|x\|_1 \le n\}$ δεν περιέχει μπάλα $B_\infty(x, \delta)$

Άρνηση για $n=1$

$$\{x = x(n) : \sum |x(n)| \le 1\} = B_1$$

δεν μπορώ να βρω $\underline{\delta > 0}$: $\|x\|_\infty < \delta \Rightarrow x \in B_1$

Πράγματι: έστω $x_m = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, \dots, \underset{\uparrow m}{\frac{\delta}{2}}, 0, 0, 0, \dots)$

τότε $\|x_m\|_\infty = \frac{\delta}{2} < \delta$

οπότε θα έπρεπε $\|x_m\|_1 \le 1$, δηλ. $m\frac{\delta}{2} \le 1$: δεν γίνεται για μεγάλο $m \in \mathbb{N}$!

Επομένως: αν $\exists \delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq B_1$

τότε $\forall x$ με $\|x\|_\infty < \delta$ θα είχαμε

$x_0 + x \in B_1$

Αλλά $-x_0 \in B_1$ οπότε (αφού B_1 κυρτό)

$\frac{1}{2}(-x_0 + (x_0 + x)) \in B_1$, άρα $\frac{x}{2} \in B_1$ όταν $\|x\|_\infty < \delta$

που δείξαμε ότι δεν γίνεται.