ΔΕΙΤΕ ΤΟ dirfourier.pdf (e-class) 14 Απριλίου

Εφαρμογή της PUB

$$|S_n(f,t)| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s) f(s)\, ds \right| \qquad f \in C(\mathbb{T})$$

και το συγκρίνω με το

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t-s)|\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(s)|\, ds = \|D_n\|_1$$

, $\exists\, g_n$ που είναι R-ολοκληρώσιμη ώστε:

(*)
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s) g_n(s)\, ds$$

Μπορώ, $\forall \epsilon > 0$ $\exists\, f$ συνεχή στο $[-\pi, \pi]$:

$$\|f - g_n\|_1 < \frac{\epsilon}{n+1}$$

και $\|f\|_\infty \leq 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(s) - g_n(s)|\, ds$$

(*) :
$$g_n(s) = \begin{cases} +1 & \text{στα διαστήματα που } D_n(t-s) > 0 \\ -1 & \text{'' \quad '' \quad '' } D_n(t-s) < 0 \\ 0 & \text{όταν } D_n(t-s) = 0 \end{cases}$$

$$|S_n(f,t) - S_n(g_n,t)| = \left| \int D_n(t-s)\big(f(s)-g_n(s)\big)\frac{ds}{2\pi} \right|$$

$$\leq \|D_n\|_\infty \|f - g_n\| = (2n+1)\frac{\epsilon}{n+1} < 4\epsilon$$

$$\left(D_n(0) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik0} = 2n+1 \right)$$

Οπότε έχουμε :

$$\|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int |D_n(t-s)|\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int D_n(t-s)\, g_n(s)\, ds$$

$$\leq |S_n(f-g_n,t)| + |S_n(f,t)|$$

$$< 4\epsilon + |S_n(f,t)$$

$$\Rightarrow |S_n(f,t)| \geq \|D_n\|_1 - 4\epsilon$$

μπορώ να διαλέξω $\epsilon > 0$ ώστε

$$> \frac{1}{2}\|D_n\|_1$$

Γενικότερα, αν h είναι μια $\int$σιμη συνάρτηση

ορίζω $\varphi_n : C([-n,n]) \to \mathbb{C}$ ως εξής

$$\varphi_n(f) = \int_{-n}^{n} h(s) f(s)\, ds$$

φ_n προφανώς γραμμική + συνεχής διότι

$$|\varphi_n(f)| \le \|f\|_\infty \underbrace{\int_{-n}^{n} |h(s)|\, ds}_{= \|h\|_1}$$

<u>Ισχύει</u> $\|\varphi_n\| = \|h\|_1$

$X = \left(C(\mathbb{T}), \| \ \|_\infty \right)$

$$e_n(t) = e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\forall f \in X, \quad S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_n$$

$$S_n(f) \in \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_n(f)\right)$$

$$\in \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

<u>Θεώρημα Fejér</u> $\forall f \in C(\mathbb{T}) : \quad \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$

<u>Πόρισμα</u> $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$: τριγ. πολυώνυμα πυκνό $\subseteq C(\mathbb{T})$

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ γραμμ. ανεξ. σύνολο, και μάλιστα,

αν ορίσω $\varphi_n(f) = \int f(s) \overline{e_n(s)} \frac{ds}{2\pi}$

γραμμική μορφή, συνεχής

τότε $\forall m \neq n \quad \varphi_n(e_m) = 0$

γιατί $= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ims} e^{-ins} \frac{ds}{2\pi} = 0$

ενώ $\varphi_n(e_n) = 1$

Άρα, $\{e_m : m \neq n\} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_n$

$\Rightarrow \overline{\operatorname{span}\{e_m : m \neq n\}}^{\| \ \|_\infty} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_n$

$\Rightarrow e_n \notin \overline{\operatorname{span}\{e_m : m \neq n\}}^{\| \ \|_\infty}$

(M-βάση του χώρου $C(\mathbb{T})$)

Markushevich