Συναρτησιακή Ανάλυση (602)

Εξετάσεις 29 Ιουνίου 2016

1. Δείξτε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ (όπου $\|x\|_1 = \sum_k |x(k)|$ και $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_k |x(k)|^2}$) είναι ισοδύναμες στον χώρο $\mathbb{R}^n$, αλλά δεν είναι ισοδύναμες στον χώρο c_{00}.

2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(α) Ο T είναι φραγμένος τελεστής.
(β) Για κάθε ακολουθία (x_n) του X με $\|x_n\| \to 0$, η ακολουθία $(\|Tx_n\|)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.
(γ) Το σύνολο $F := \{x \in X : \|Tx\| = 1\}$ είναι κλειστό στον X.

3. **(α)** Αν $e_n = (e_n(k))$ είναι η ακολουθία με $e_n(k) = \delta_{nk}$, δείξτε ότι ο υπόχωρος $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός στον ℓ^1.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $f \in (\ell^1, \|\cdot\|_1)^*$ υπάρχει μοναδικό $y = (y(n)) \in \ell^\infty$ ώστε

$$f(x) = \sum_n x(n)y(n) \quad \text{για κάθε} \;\; x = (x(n)) \in \ell^1.$$

4. Έστω X πραγματικός χώρος με νόρμα και $x \in X$, $x \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $\|f\| = 1$ και $f(x) = \|x\|$. Να συμπεράνετε ότι

$$\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

5. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \subseteq H$ μη κενό υποσύνολο, δείξτε ότι (α) το σύνολο $A^\perp := \{x \in H : \langle x, a\rangle = 0 \text{ για κάθε } a \in A\}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H και (β) ότι ο χώρος $(A^\perp)^\perp$ είναι ίσος με την κλειστή γραμμική θήκη $\overline{\text{span}(A)}$ του A.

6. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμική απεικόνιση με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $g \in Y^*$, τότε $g(Tx_n) \to 0$. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής.

Να διατυπώνετε πλήρως τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε.
Να γραφούν πέντε θέματα.
Καλή επιτυχία!