Σχετικά με τις Ασκήσεις V

- *Έστω X χώρος με νόρμα, και (x_k) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

Λύση με το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος Η υπόθεση λέει ότι για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή η απεικόνιση $T : f \to (f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ στέλνει τον χώρο X^*, που είναι χώρος Banach, στον χώρο Banach ℓ^1. Η απεικόνιση T είναι προφανώς γραμμική. Συνεπώς, αφού και οι δύο χώροι είναι πλήρεις, αρκεί να ελέγξω ότι το γράφημά της T είναι κλειστό στον χώρο $X^* \times \ell^1$.

Έστω λοιπόν ακολουθία (f_n) στον X^* τέτοια ώστε $\|f_n\| \to 0$ και $\|Tf_n - y\|_1 \to 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $y = 0$.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_k : \ell^1 \to \mathbb{K} : z = (z(n)) \to z(k)$: είναι προφανώς γραμμική και συνεχής. Έχουμε λοιπόν, για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_k(y) = \phi_k(\lim_n Tf_n) = \lim_n \phi_k(Tf_n) = \lim_n (f_n(x_k)) = 0$$

γιατί $|f_n(x_k)| \leq \|f_n\| \, \|x_k\|$ και $\|f_n\| \to 0$.

Δηλαδή $y(k) = \phi_k(y) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $y = 0$. □

Λύση με το Θεώρημα Ομοιομόρφου Φράγματος (Κ.Κ.) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$T_n : f \to (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), 0, 0, \dots) : X^* \to \ell^1.$$

Είναι προφανώς γραμμική, και είναι συνεχής διότι

$$\|T_n f\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \|f\| \, \|x_k\|$$

δηλαδή $\|T_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια των φραγμένων τελεστών $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κατά σημείο φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $f \in X^*$, από την υπόθεση έχουμε

$$\|T_n(f)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| := M_f < \infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $\sup_n \|T_n(f)\|_1 \leq M_f < \infty$.

Έπεται από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος ότι υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\sup_n \|T_n\| \leq M$. Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| = \|T_n(f)\|_1 \leq M \, \|f\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leq M \, \|f\| \, .$$

□

- *Έστω K συμπαγής (μετρικός) χώρος και $\|\cdot\|$ μιά νόρμα στον χώρο $C(K)$ με τις ιδιότητες:*

(α) *Ο χώρος $(C(K), \|\cdot\|)$ είναι πλήρης και*

(β) *Για κάθε $t \in K$, η γραμμική μορφή $\delta_t : (C(K), \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) : f \to f(t)$ είναι συνεχής.*

Τότε η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$.

Απόδειξη Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $T : (C(K), \|\cdot\|_\infty) \to (C(K), \|\cdot\|)$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός. [1]

(α) Δείχνουμε ότι έχει κλειστό γράφημα: Έστω ακολουθία (f_n) στον $C(K)$ τέτοια ώστε $\|f_n\|_\infty \to 0$ και $\|T(f_n) - g\| \to 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $g = 0$.

Για κάθε $t \in K$ έχουμε

$$\delta_t(g) = \delta_t(\lim_n T f_n) \stackrel{(\beta)}{=} \lim_n \delta_t(T f_n) = \lim_n f_n(t) = 0$$

γιατί $\|f_n\|_\infty \to 0$. Δηλαδή $g(t) = 0$ για κάθε $t \in K$, άρα $g = 0$.

Δείξαμε ότι η T είναι συνεχής (Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος).

(β) Αφού η είναι 1-1, επί και συνεχής μεταξύ δύο χώρων Banach (υποθ. (α)), έχει φραγμένο αντίστροφο (Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης). $\square$

[1] ισοδύναμα να υπάρχουν σταθερές a, b ώστε $a\|f\| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $f \in C(K)$ (συνέχεια της T) και $\|f\|_\infty \leq b\|f\|$ για κάθε $f \in C(K)$ (συνέχεια της T^{-1})