8.2 Εφαρμογή στις διαφορικές εξισώσεις

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $f' = F(t,f)$, με αρχική συνθήκη την $f(t_0) = x_0$.

Θεώρημα 8.2.1 (Picard). *Έστω $F : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο ορθογώνιο*

$$A = \{(t,x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

Υποθέτουμε ότι η F ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή: υπάρχει $L > 0$ τέτοιος ώστε

$$(8.4) \qquad |F(t,x) - F(t,y)| \leq L|x - y| \quad \text{για κάθε } (t,x),(t,y) \in A.$$

Θέτουμε $M = \sup\{|F(t,x)| : (t,x) \in A\}$.
Τότε, αν $h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$, η διαφορική εξίσωση $f' = F(t,f)$, $f(t_0) = x_0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πλήρη μετρικό χώρο $\mathcal{C}[J]$, $J = [t_0 - h, t_0 + h]$, με μετρική την $d(f,g) = \|f - g\|_J := \max_{t \in J} |f(t) - g(t)|$, και το υποσύνολο

$$C_1 = \{f \in \mathcal{C}[J] : \|f - x_0\mathbf{1}\|_J \leq Mh\}$$

(εδώ $\mathbf{1}$ η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}(t) = 1$ για κάθε t).
Το C_1 είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}[J]$, άρα πλήρης μετρικός χώρος.

Για κάθε $f \in C_1$, ορίζουμε

$$(\Phi f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \qquad t \in J.$$

Παρατηρούμε ότι το $\int_{t_0}^{t} F(s,f(s))ds$ είναι καλά ορισμένο, γιατί $|f(s) - x_0| \leq Mh < b$ όταν $s \in J$, άρα $(s, f(s)) \in A$ και η F είναι συνεχής στο A. Επίσης, για κάθε $t \in J$,

$$|(\Phi f)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} F(s,f(s))ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Mh,$$

άρα,

$$f \in C_1 \Rightarrow \Phi f \in C_1.$$

Τέλος, αν $f, g \in C_1$ έχουμε $|F(s,f(s)) - F(s,g(s))| \leq L|f(s) - g(s)|$ για κάθε $s \in J$ άρα

$$\begin{aligned} |(\Phi f)(t) - (\Phi g)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \{F(s,f(s)) - F(s,g(s))\}\, ds \right| \\ &\leq L \int_{t_0}^{t} |f(s) - g(s)| ds \leq L\|f - g\|_J |t - t_0| \\ &\leq (Lh)\|f - g\|_J, \end{aligned}$$

για κάθε $t \in J$. Αλλά $0 < Lh < 1$, άρα η Φ είναι γνήσια συστολή:

$$\|\Phi f - \Phi g\|_J \leq (Lh)\|f - g\|_J\,.$$

Από το θεώρημα σταθερού σημείου, υπάρχει μοναδική $f \in C_1$ τέτοια ώστε $\Phi f = f$, δηλαδή

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds, \qquad t \in J,$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = F(t,f)$, και $f(t_0) = x_0$. □

Σημείωση: Η απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου δείχνει ότι μπορούμε να πάρουμε τη λύση f ως όριο της ακολουθίας (f_n) όπου

$$f_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f_n(s))ds, \tag{8.5}$$

ξεκινώντας από τυχούσα $f_0 \in C_1$.

8.3 Εφαρμογή στις ολοκληρωτικές εξισώσεις

(α) **Εξίσωση Fredholm**. *Έστω $J = [a, b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για κάθε συνεχή $g : J \to \mathbb{R}$ και κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ με $|\mu| < \frac{1}{M(b-a)}$ όπου $|K(t, s)| \leq M$ στο $J \times J$, η εξίσωση*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^b K(t, s)f(s)ds \qquad t \in J, \tag{8.6}$$

έχει μοναδική λύση στο J.

Απόδειξη. Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$, [1] με

$$(Tf)(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)ds, \quad t \in [a, b] \quad \text{και} \quad S(f) = g + \mu T(f). \tag{8.7}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική $f_0 \in \mathcal{C}[a, b]$ τέτοια ώστε $Sf_0 = f_0$. Παρατηρούμε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με νόρμα $\|T\| \leq M(b - a)$. Πράγματι, για κάθε $f \in \mathcal{C}[a, b]$ έχουμε

$$\|T(f)\|_\infty = \max_{t\in J} \left| \int_a^b K(t, s)f(s)ds \right| \leq \left(\max_{t\in J} \int_a^b |K(t, s)|ds \right) \|f\|_\infty \leq M(b-a)\|f\|_\infty .$$

Έπεται τώρα ότι η S είναι γνήσια συστολή. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|S(f) - S(h)\|_\infty &= \|\mu T(f) - \mu T(h)\|_\infty = |\mu|\|T(f - h)\|_\infty \\ &= |\mu|M(b - a)\|f - h\|_J . \end{aligned}$$

Αφού $|\mu|M(b - a) < 1$, το θεώρημα σταθερού σημείου εξασφαλίζει μοναδική $f_0 \in \mathcal{C}[a, b]$ τέτοια ώστε $Sf_0 = f_0$. □

[1] Ας δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{C}[a, b]$, η συνάρτηση $Tf : t \to \int_a^b K(t, s)f(s)ds$ (ορίζεται στο J και) είναι συνεχής. Πράγματι, από την *ομοιόμορφη* συνέχεια της K στο $J \times J$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, όταν $(t, s), (x, y) \in J \times J$ και $\|(t, s) - (x, y)\|_2 < \delta$, να έχουμε $|K(t, s) - K(x, y)| < \varepsilon$. Συνεπώς αν $t, x \in J$ και $|t - x| < \delta$ τότε για κάθε $s \in J$ ισχύει ότι $|K(t, s) - K(x, s)| < \varepsilon$ και άρα $|Tf(t) - Tf(x)| \leq \int_a^b |K(t, s) - K(x, s)||f(s)|ds \leq \varepsilon \int_a^b |f(s)|ds$.

(β) **Εξίσωση Volterra.** *Έστω $J = [a,b]$, και $K : J \times J \to \mathbb{R}$ συνεχής. Για κάθε συνεχή $g : J \to \mathbb{R}$ και κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, η εξίσωση*

$$f(t) = g(t) + \mu \int_a^t K(t,s)f(s)ds \qquad t \in J, \tag{8.8}$$

έχει μοναδική λύση στο J.

Απόδειξη. Ορίζουμε $T, S : \mathcal{C}[J] \to \mathcal{C}[J]$, με [2]

$$(Tf)(t) = \int_a^t K(t,s)f(s)ds, \quad t \in [a,b] \quad \text{και } S(f) = g + \mu T(f) \tag{8.9}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική $f_0 \in \mathcal{C}[J]$ τέτοια ώστε $Sf_0 = f_0$. Για κάθε $f \in \mathcal{C}[J]$, γράφοντας $M = \max|K|$ έχουμε

$$(*) \quad |(Tf)(t)| = \left|\int_a^t K(t,s)f(s)ds\right| \leq M\|f\|_\infty \int_a^t ds = M\|f\|_\infty (t-a), \quad t \in J.$$

Έπεται βεβαίως ότι $\|Tf\|_\infty \leq M\|f\|_\infty(b-a)$, άρα $\|T\| \leq M(b-a)$, αλλά η εκτίμηση αυτή δεν αρκεί. Αυτό που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι

$$(**) \qquad \|T^m\| \leq M^m \frac{(b-a)^m}{m!}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι

$$|(T^m f)(t)| \leq M^m \frac{(t-a)^m}{m!}\|f\|_\infty, \quad t \in J$$

(από την οποία βεβαίως προκύπτει η $(**)$).

Το βήμα $m = 1$ είναι η $(*)$. Το επαγωγικό βήμα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned}
|(T^{m+1}f)(t))| &= \left|\int_a^t K(t,s)(T^m f)(s)ds\right| \leq \int_a^t |K(t,s)|M^m \frac{(s-a)^m}{m!}\|f\|_\infty ds \\
&\leq M \int_a^t M^m \frac{(s-a)^m}{m!}\|f\|_\infty ds = M^{m+1}\frac{(t-a)^{m+1}}{(m+1)!}\|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Εύκολα βλέπει κανείς επαγωγικά ότι αν $f, h \in \mathcal{C}[J]$ τότε $S^m f - S^m h = (\mu T)^m (f-h)$ για κάθε m. Προκύπτει τώρα από την $(**)$ ότι

$$\begin{aligned}
\|S^m f - S^m h\|_\infty &= \|(\mu T)^m (f-h)|_\infty \\
&\leq \|(\mu T)^m\|\|f-h\|_\infty \leq (|\mu|M)^m \frac{(b-a)^m}{m!}\|f-h\|_\infty .
\end{aligned}$$

[2] Ας δείξουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{C}[J]$, η συνάρτηση $Tf : t \to \int_a^t K(t,s)f(s)ds$ (ορίζεται στο J και) είναι συνεχής. Πράγματι, από την *ομοιόμορφη* συνέχεια της K στο $J \times J$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, όταν $(t,s),(x,y) \in J \times J$ και $\|(t,s)-(x,y)\|_2 < \delta$, να έχουμε $|K(t,s) - K(x,y)| < \varepsilon$. Συνεπώς αν $t, x \in J$ και $|t-x| < \min\{\delta, \varepsilon\}$ τότε για κάθε $s \in J$ ισχύει ότι $|K(t,s) - K(x,s)| < \varepsilon$ και άρα

$$\begin{aligned}
|Tf(t) - Tf(x)| &\leq \int_a^t |K(t,s) - K(x,s)||f(s)|ds + \left|\int_x^t |K(x,s)||f(s)|ds\right| \\
&\leq \varepsilon \int_a^b |f(s)|ds + \|K\|_{J\times J}\|f\|_J |t-x| \leq \varepsilon((b-a) + \|K\|_{J\times J})\|f\|_J .
\end{aligned}$$

Αλλά επειδή $\lim_m \frac{(|\mu|M)(b-a))^m}{m!} = 0$, υπάρχει m ώστε $(|\mu|M)^m \frac{(b-a)^m}{m!} < 1$. Άρα, η S^m είναι γνήσια συστολή στον $\mathcal{C}[a,b]$. Έπεται ότι η S^m έχει σταθερό σημείο: υπάρχει f_0 με την ιδιότητα $S^m f_0 = f_0$.

Στην πραγματικότητα η f_0 είναι σταθερό σημείο και της S. Πράγματι: αφού η S^m είναι γνήσια συστολή, έχει μοναδικό σταθερό σημείο· αλλά η Sf_0 είναι σταθερό σημείο της S^m (γιατί $S^m(Sf_0) = S(S^m f_0) = Sf_0$) άρα $Sf_0 = f_0$.

Τέλος, η f_0 είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της S, γιατί κάθε σταθερό σημείο της S είναι και σταθερό σημείο της S^m, και η S^m, αφού είναι γνήσια συστολή, έχει μοναδικό σταθερό σημείο, την f_0. $\square$