602: Ασκήσεις ΙΙ: μερικά σχόλια

2 (β) *Έστω $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ γραμμικές μορφές στον E. Υποθέτουμε ότι*

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0$$

(δηλαδή ότι $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker f$). Δείξτε ότι η f είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{f_1, \ldots, f_n\}$: υπάρχουν $a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x)$ για κάθε $x \in E$.

Απόδειξη. Θεωρώ την απεικόνιση

$$F : E \to \mathbb{K}^n : x \to (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)).$$

Είναι προφανώς γραμμική, και η υπόθεση λέει ότι αν $x, x' \in E$ και $f(x) = f(x')$, τότε $F(x) = F(x')$. Επομένως η απεικόνιση $\varphi : F(E) \to \mathbb{K} : (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \to f(x)$ είναι καλά ορισμένη στον υπόχωρο $F(E)$ του $\mathbb{K}^n$, γραμμική και ικανοποιεί $\varphi \circ F = f$. Η φ επεκτείνεται σε μια γραμμική απεικόνιση $\tilde{\varphi}$ από τον $\mathbb{K}^n$ στον $\mathbb{K}$, επομένως (όπως μάθαμε στη Γραμμική άλγεβρα) υπάρχουν $a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε η $\tilde{\varphi}$ να είναι της μορφής $\tilde{\varphi}(\lambda(1), \ldots, \lambda(n)) = \sum_k a_k \lambda(k)$ για κάθε $(\lambda(1), \ldots, \lambda(n)) \in \mathbb{K}^n$. Τελειώσαμε: για κάθε $x \in E$, έχουμε

$$f(x) = \varphi(F(x)) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x).$$

3. *Έστω (X, d), (Y, ρ) γραμμικοί και μετρικοί χώροι στους οποίους οι γραμμικές πράξεις είναι συνεχείς. Αποδείξτε ότι μια γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνον αν υπάρχει περιοχή V του $0 \in X$ ώστε το σύνολο $T(V) \subseteq Y$ να είναι φραγμένο.*
Διόρθωση: *Δεν ισχύει ως έχει. Ισχύει αν ο Y είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση ισχύει πάντα: αν ο $T : X \to Y$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $T(B(0,\delta)) \subseteq B(0,1)$, οπότε ο T είναι φραγμένος στην περιοχή $B(0,\delta)$ του $0 \in X$ (μάλιστα είναι φραγμένος σε κάθε περιοχή του 0 αν το καλοσκεφτούμε).

Έστω τώρα ότι ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, και έστω μια περιοχή V του $0 \in X$ ώστε το $T(V)$ να είναι φραγμένο στον Y, ας πούμε από τον αριθμό M, δηλαδή $x \in V \Rightarrow \|Tx\| \leq M$. Αν $\epsilon > 0$, θεωρούμε την περιοχή $W = \frac{\epsilon}{2M} V$ του $0 \in X$ (είναι περιοχή, αφού η απεικόνιση $y \to \frac{2M}{\epsilon} y$ είναι συνεχής). Τότε $x - y \in W \Rightarrow \frac{2M}{\epsilon}(x-y) \in V \Rightarrow \left\|T(\frac{2M}{\epsilon}(x-y))\right\| \leq M \Rightarrow \|Tx - Ty\| < \epsilon$, άρα ο T είναι συνεχής, μάλιστα ομοιόμορφα.

Αν όμως θεωρήσω τον Y με την μετρική $\rho(x - y) := \frac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ (η οποία ορίζει την ίδια τοπολογία με την νόρμα, άρα οι γραμμικές πράξεις είναι συνεχείς) τότε βέβαια όλες οι απεικονίσεις $T : X \to Y$ είναι φραγμένες, μάλιστα σε όλον τον X, αφού όλος ο Y είναι φραγμένος. Αλλά, όπως ξέρουμε, όταν οι X και Y είναι απειροδιάστατοι, τότε υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $X \to Y$ που δεν είναι συνεχείς.

Αν θέλουμε συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $X = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ και $Y = c_{00}$ με τη $\|\cdot\|_\infty$ και την αντίστοιχη μετρική ρ. Η απεικόνιση $T((x(n)) = n(x(n))$ δεν είναι συνεχής, αλλά στέλνει όλον τον X σε ένα ρ-φραγμένο σύνολο.

4. *Έστω $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Είναι η ίδια ιδέα με την προηγούμενη, αλλά ας την δούμε με ακολουθίες: Αν ο T δεν είναι φραγμένος, υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ένα $y_n \in B_X$ ώστε $\|Ty_n\| > n$. Η ακολουθία $(x_n) = (\frac{1}{\sqrt{n}} y_n)$ τείνει στο 0, αλλά η (Tx_n) δεν είναι φραγμένη: $\|Tx_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|Ty_n\| > \sqrt{n}$.

6. (β) *Δείξτε ότι ο τελεστής*

$$T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \quad \text{με} \quad (Tf)(s) = \int_0^s f(t)\,dt \quad (s \in [0,1])$$

είναι καλά ορισμένος και συνεχής και βρείτε τη νόρμα του. Εξετάστε αν είναι 1-1, αν είναι επί και αν έχει ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Καλά ορισμένος: Το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι συνεχής συνάρτηση.

Δείχνουμε ότι ο T είναι φραγμένος:

$$|(Tf)(s)| \leq \int_0^s |f(t)|dt \leq \int_0^s \|f\|_\infty \, dt = (s-0)\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

για κάθε $s \in [0,1]$ άρα $\|Tf\|_\infty = \sup\{|(Tf)(s)| : s \in [0,1]\} \leq \|f\|_\infty$.

Δείξαμε μάλιστα ότι $\|T\| \leq 1$. Αλλά η νόρμα του T είναι ακριβώς 1, διότι αν $\mathbf{1}(s) = 1$ (η σταθερή συνάρτηση) έχουμε $T(\mathbf{1})(s) = s$ άρα $\|T(\mathbf{1})\| = 1$ οπότε $\|T\| \geq \|T(\mathbf{1})\| = 1$.

Ο T δεν είναι επί: το σύνολο τιμών του δεν περιέχει καμμιά συνεχή μη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Είναι όμως 1-1: Αν Tf=0 τότε για κάθε $a < b$ στο $[0,1]$ έχουμε

$$\int_a^b f(t)dt = \int_0^b f(t)dt - \int_0^a f(t)dt = (Tf)(b) - (Tf)(a) = 0$$

κι αν η f δεν ήταν μηδέν, σε κάποιο διαστηματάκι (a,b) δεν θα μηδενιζόταν πουθενά και δεν θα άλλαζε πρόσημο, οπότε το ολοκλήρωμά της δεν θα ήταν μηδέν (αν επιμένουμε να θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές εν γένει τιμές, αν Tf=0 τότε το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος θάναι μηδέν κ.λπ.)

Ιδιοτιμές: Ισχυρίζομαι ότι ο T δεν έχει. Μόλις δείξαμε ότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή. Έστω $\lambda \neq 0$. Ας δούμε αν υπάρχει συνεχής f, μη μηδενική, ώστε $Tf = \lambda f$. Δηλαδή,

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^s f(t)dt = f(s) \tag{*}$$

για κάθε $s \in [0,1]$. Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού λέει ότι, αφού η f είναι συνεχής, το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Από τη σχέση $(*)$ έπεται λοιπόν ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι $\frac{1}{\lambda}f(s) = f'(s)$ για κάθε s. Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε ότι $f(s) = f(0)e^{\frac{s}{\lambda}}$ για κάθε s. Όμως η $(*)$ δίνει $f(0) = 0$, άρα $f = 0$: δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα!

9. *Θεωρούμε τον c_0 με τη supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Δείξτε ότι ο δυϊκός του χώρος $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.*

Απόδειξη. Κάποιος είπε να ακολουθήσουμε την μέθοδο που κάναμε στην τάξη για την περίπτωση του ℓ^p. *Πρώτη απόπειρα:* Έστω λοιπόν $f \in (c_0)^*$. Θέτουμε $T(f) = (\frac{1}{2^n}f(e_n))$ (τους συντελεστές $\frac{1}{2^n}$ τους βάλαμε για να εξασφαλίσουμε στα σίγουρα ότι $T(f) \in \ell^1$. Και πράγματι, $\|Tf\|_1 = \sum \frac{1}{2^n}|f(e_n)| \leq \|f\| \sum \frac{1}{2^n} = \|f\|$.

Μάλιστα η ανισότητα δείχνει ότι η απεικόνιση T όχι μόνο παίρνει τιμές στον ℓ^1, αλλά είναι και φραγμένη (προφανώς είναι γραμμική).

Είναι και 1-1, γιατί αν $T(f) = 0$ τότε $f(e_n) = 0$ για κάθε n άρα η f (αφού είναι γραμμική) μηδενίζει τον c_{00} και άρα (αφού είναι συνεχής) μηδενίζει και την κλειστή του θήκη, τον c_0.

Είναι και επί, γιατί αν μου δώσουν μια $(a_n) \in \ell^1$ ορίζω εγώ την απεικόνιση

$$f_a(x) = \sum a_n 2^n x(n), \quad x = (x(n)) \in c_0$$

που ικανοποιεί $\frac{1}{2^n}f_a(e_n) = a_n$ για κάθε n, δηλαδή $T(f_a) = (a_n)$.

Μισό λεπτό!! Συγκλίνει αυτή η σειρά, για κάθε $(x(n)) \in c_0$; Αν βάλουμε πχ. $x(n) = \frac{n}{2^n}$, είναι αλήθεια ότι η $\sum a_n 2^n x(n) = \sum a_n n$ συγκλίνει; Δεν είναι αλήθεια για κάθε $(a_n) \in \ell^1$. Για παράδειγμα, για την $(a_n) = (\frac{1}{n^2})$ δεν είναι αλήθεια.

Επομένως η T που ορίσαμε *δεν είναι επί* του $\in \ell^1$. Το πρόβλημα είναι οι συντελεστές $\frac{1}{2^n}$ που βάλαμε. Αν αντί για την f_a ορίζαμε την

$$g_a(x) = \sum a_n x(n), \quad x = (x(n)) \in c_0$$

τότε δεν θα είχαμε πρόβλημα σύγκλισης, αφού $|g_a(x)| \leq \sum |a_n x(n)| \leq \|a\|_1 \|x\|_\infty$. Μάλιστα, η ανισότητα αυτή δείχνει ότι η g_a είναι συνεχής γραμμική μορφή, με νόρμα $\|g_a\| \leq \|a\|_1$.

Παρατηρούμε ότι η g_a ικανοποιεί τη σχέση $g_a(e_n) = a_n$ για κάθε n.

Δεύτερη απόπειρα: Γυρνάμε λοιπόν πίσω στον ορισμό της απεικόνισης T και τον διορθώνουμε ορίζοντας $T'(f) = (f(e_n))$ για κάθε $f \in (c_0)^*$. Το μόνο που λείπει είναι να δείξουμε ότι η $T'(f)$ ανήκει όντως στον ℓ^1 για κάθε $f \in (c_0)^*$.

Πράγματι: για κάθε n, αν $f(e_n) \neq 0$ ονομάζουμε $x(n) = \frac{|f(e_n)|}{f(e_n)}$ κι αν $f(e_n) = 0$ θέτουμε $x(n) = 0$. Θεωρούμε τώρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το $y_N = (x(1), x(2), \ldots, x(N), 0, 0, \ldots)$. Το y_N ανήκει στον c_0 (μάλιστα, στον c_{00}) και έχουμε

$$f(y_N) = f\left(\sum_{n=1}^{N} x(n)e_n\right) = \sum_{n=1}^{N} x(n)f(e_n) = \sum_{n=1}^{N} |f(e_n)|$$

$$\text{άρα} \quad \sum_{n=1}^{N} |f(e_n)| = |f(y_N)| \leq \|f\| \, \|y_N\|_1 \leq \|f\|$$

γιατί $|x(n)| \leq 1$ για κάθε n. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε N, έχουμε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \leq \|f\|$ δηλαδή $T'(f) \in \ell^1$ και $\|T'(f)\|_1 \leq \|f\|$.

Η απόδειξη τώρα συνεχίζεται όπως πριν: Η T' είναι γραμμική, 1-1, και είναι επί γιατί αν $(a_n) \in \ell^1$ και θεωρήσουμε την g_a όπως πριν τότε $g_a \in (c_0)^*$, $\|g_a\| \leq \|a\|_1$ και $T'(g_a) = (a(n))$.

Τέλος, για κάθε $f \in (c_0)^*$ αν θέσουμε $a_n = f(e_n)$ τότε $g_a = f$ και συνεπώς έχουμε

$$\left\|T'(f)\right\|_1 \leq \|f\| = \|g_a\| \leq \|a\|_1 = \left\|T'(f)\right\|_1$$

οπότε έχουμε ισότητα: $\|T'(f)\|_1 = \|f\|$.

Τελικά λοιπόν η T' είναι ισομετρικός ισομορφισμός από τον $(c_0)^*$ επί του ℓ^1.