2 Ιουνίου

Ασκήσεις Συναρτησιακής

(1) $(X, \|\ \|)$ και $A \subseteq X^*$, $A \neq \emptyset$

Ορίζουμε: πολικό: $A_0 = \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in A\}$

$A_\perp = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in A\}$

νδο A_0 : κυρτό, $A_\perp$: υπόχωρος
κλειστά

<u>Απόδ</u> (i) : $x, y \in A_0$ $\lambda \in [0,1]$ τότε $\forall f \in X^*$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

άρα αν $f \in A$ τότε

$$|f(\lambda x + (1-\lambda)y)| \leq \lambda |f(x)| + (1-\lambda)|f(y)|$$
$$\leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

άρα $\lambda x + (1-\lambda) y \in A_0$: A_0 : κυρτό

(ii) : $x, y \in A_\perp$ με τον ίδιο τρόπο

$$\forall f \in A \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda 0 + (1-\lambda) 0 = 0$$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

(iii) κλειστά : $\forall (x_n)$, $x_n \in A_0$ και $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x$

τότε $\forall f \in X^*$

$f(x_n) \to f(x)$

οπότε $\forall f \in A$ θα έχω

$$|f(x)| = \lim_n |f(x_n)| \leq 1$$

άρα $x \in A_0$

Ομοίως, αν $x_n \in A_\perp$ $\forall n$ τότε

$$\forall f \in A : f(x) = \lim_n f(x_n) = 0$$

άρα $x \in A_\perp$

(2) H: Hilbert, $V \subseteq H$ υπόχωρος
$f: V \to \mathbb{K}$ γραμμ. συνεχής

$\overset{?}{\Longrightarrow} \exists! \ \tilde{f}: H \to \mathbb{K}$ " " $\|\tilde{f}\| = \|f\|$
(χωρίς Hahn Banach)

<u>Απόδ</u> (από H-B ξέρω ότι $\exists$ μία τέτοια $\tilde{f}$.
Το θέμα είναι η μοναδικότητα)

Ύπαρξη, χωρίς χρήση H-B:

(i) f γραμμ. συνεχής
έχει <u>μοναδική</u> επέκταση $f_1: \overline{V} \to \mathbb{K}$
με $\|f_1\| = \|f\|$

(ii) Εφόσον $\overline{V}$: Hilbert
από <u>Riesz</u> $\exists! \ z \in \overline{V}$ ώστε
$\forall y \in \overline{V}$ $f_1(y) = \langle y, z \rangle$ και $\|z\| = \|f_1\|$
$= \|f\|$

<u>ορίζω</u> $\tilde{f}: H \to \mathbb{K}$
$x \mapsto \langle x, z \rangle$

Έχω: $\tilde{f}$ γρ. συνεχής,
$\|\tilde{f}\| = \|z\| = \|f\|$

και προφανώς αν $y \in V$
τότε $\tilde{f}(y) = \langle y, z \rangle = f_1(y) = f(y)$
άρα $\tilde{f}|_V = f$

Μοναδικότητα: Έστω $\varphi: H \to \mathbb{K}$ με $\varphi|_V = f$
και $\|\varphi\| = \|f\|$

Από Riesz στο H:
$\exists w \in H$: $\varphi(x) = \langle x, w \rangle \ \forall x \in H$
και $\|w\| = \|\varphi\|$

Θ.δ.ο. $w = z$
δηλ. ότι $w - z := u = 0$

<u>Απόδ</u> $\forall y \in \overline{V}$ τότε $\varphi(y) = f_1(y)$ δηλ.
$\langle y, w \rangle = \langle y, z \rangle$ δηλ.

$\langle y, w - z \rangle = 0 \quad \forall y \in \overline{V}$

άρα $w - z \perp \overline{V}$

Τώρα: $w = \underset{V^{\perp}}{\underset{\cap}{u}} + \underset{V}{\underset{\cap}{z}} \ \underset{\text{Πυθ}}{\Longrightarrow} \ \underset{\|\varphi\|^2}{\underset{\|}{\|w\|^2}} = \|u\|^2 + \underset{\|f_1\|^2}{\underset{\|}{\|z\|^2}}$

όμως $\|\varphi\| = \|f_1\|$ άρα $\|w\|^2 = \|z\|^2$
οπότε $\|u\|^2 = 0$ ∎

(3) H: Hilbert, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ο.κ. ακολουθία

Θέτω $Y = \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ (*)

Δείξτε ότι: $\forall x \in H$ το πλησιέστερο $\left(\text{προς το } x\right)$ διάνυσμα $P_Y(x)$ του Y είναι το

$$P_Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

[Υπενθ.: Υπάρχει ένα μοναδικό $y_0 \in Y$:
$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\}$.

το y_0 ονομάζεται $P_Y(x)$]

Απόδ. Επειδή η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι (i) ο.κ. ακολουθία
και (ii) παράγει τον Y (*)
άρα είναι ο.κ. βάση του Y

Πρακτικά δηλαδή ότι $\forall y \in Y$ ισχύει
$y = \sum \langle y, e_n \rangle e_n$

Το εφαρμόζω για το διάνυσμα $y_0 = P_Y(x)$
Γνωρίζω ότι $x - y_0$ είναι $\perp Y$
όπως, $x - y_0 \perp e_n \; \forall n$
δηλ. $\langle x, e_n \rangle = \langle y_0, e_n \rangle \; \forall n$

άρα
$y_0 = \sum_n \langle y_0, e_n \rangle e_n = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$

(4)(α) Αν $(X, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ είναι χώρος με εσωτ. γινόμ. και $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ένα Ο.Κ. ακολουθία τότε $\forall f \in X^*$ ισχύει

$$f(e_n) \to 0$$

<u>Αποδ:</u> Έστω H η πλήρωση του X : ένας χώρος Hilbert και $\overline{X} = H$

οπότε άρα $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ συνεχής + γραμμ. επεκτείνεται σε

$$\tilde{f} : H \longrightarrow \mathbb{K} \quad " \quad "$$

Από Riesz $\exists\, z \in H$:

$$\tilde{f}(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H$$

ειδικότερα

$$f(e_n) = \langle e_n, z \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

όμως

$$\sum |\langle e_n, z\rangle|^2 \underset{\text{Bessel}}{\leq} \|z\|^2 < +\infty$$

οπότε $\langle e_n, z \rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

και για το $(c_0, \|\ \|_\infty)$

(4β) Ίδια ερώτηση για τα ℓ^p, $1<p<+\infty$

όπου e_n το συνηθισμένο

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & k=n \\ 0, & k\neq n \end{cases}$$

Δηλ. $\forall f \in (\ell^p)^*$ νδο

$$f(e_n) \to 0$$

Απόδ. Ξέρω ότι $\forall f \in (\ell_p)^*$ είναι της μορφής

$$f(x) = \sum_n x(n)\,y(n)$$ για κάποιο $y = y(n) \in \ell^q$

όπου: $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

άρα $f(e_n) = y(n)$

οπότε $\sum_n |f(e_n)|^q < +\infty$

άρα $f(e_n) \to 0$

Στο ℓ^1 δεν ισχύει: πάρε για $f(x) = \sum x(n)$

είναι γραμμική

και $|f(x)| \leq \sum |x(n)| = \|x\|_1$

$f \in (\ell^1)^*$, άρα $f(e_n) = 1 \ \forall n$

Θέματα Καψ - Μέρη Φεβ 2015

(1α) X Banach, $\forall n$, $Y_n \subseteq X$ γραμμ. υποχ.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

Δείξτε ότι κάποιο Y_n είναι πυκνό στο X

<u>Απόδ</u> Βρωμιάδες Baire !

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n} \subseteq X \quad \text{ισότητα}$$

<u>Από Baire</u> κάποιο $\overline{Y_n}$ θα περιέχει μια $B(y,\varepsilon)$

οπότε περιέχει και τη $B(0,\varepsilon)$

(αφού είναι γραμμ. χώρος)

οπότε, $\forall x \in X$ θέτω $y = \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|}$

έχω $y \in B(0,\varepsilon) \subseteq \overline{Y_n}$

οπότε $x = \frac{2\|x\|}{\varepsilon} y \in \overline{Y_n}$

άρα $\overline{Y_n} = X$

(β) Χωρίς πληρότητα ισχύει; <u>ΟΧΙ</u>

<u>πχ</u> στον $(c_{00}, \|\ \|_{\infty})$ αν θέσω $Y_n = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

$\dim Y_n = n < +\infty$

άρα Y_n κλειστό

και

$$c_{00} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

(γ) Δ.ό. $\forall$ χώρος Banach έχει Hamel βάση πεπερ. ή υπεραριθμήσιμη.

<u>Απόδ</u> Έστω $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ μια αριθμ. αλγεβρ. βάση ενός χώρου Banach X

Θέτω $Y_n = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

οπότε

$\forall x \in X$ είναι γραμμ. συνδ. στοιχείων της βάσης, άρα ανήκει σε κάποιο Y_n

<u>δηλ</u> $X = \bigcup_n Y_n$ από (α)

κάποιο Y_n είναι πυκνό

αλλά είναι και κλειστός,

άρα $\exists n : X = Y_n$ οπότε $\dim X < +\infty$.

(2a) $\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall f \in C([0,1])$

$$\sum \frac{1}{2^n} \left|f\left(\tfrac{1}{n}\right)\right| \leq \sum \frac{1}{2^n} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

(i) φ καλά ορισμένη

(ii) αφού είναι προφανώς γραμμική και

$|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall f$

είναι φραγ. (άρα συνεχής)

$\Downarrow$

(iii) $\|\varphi\| \leq 1$

$= ?$ πάρε $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1]$

έχεις $\|f\|_\infty = 1$

και $\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

όπως $\|\varphi\| \geq 1$ άρα $\|\varphi\| = 1$

$\blacksquare$

(2β) : Έστω $(X, \| \ \|)$ απειροδιάστατος
να βρω $\psi : X \to \mathbb{R}$ γραμμ, όχι συνεχή

<u>Απόδ</u> Έστω $E \subseteq X$ μια αλγεβρ βάση του X
Αφού X απειροδιάστατος
$$\exists \underbrace{\{x_1, x_2, \dots x_n \dots\}}_{B} \subseteq E$$

Τι σημαίνει E βάση: $\forall x \in X$ γράφεται
κατα μοναδικό τρόπο

$$x = \sum_{e \in E} \lambda_e e$$ όπου $\lambda_e \in \mathbb{R}$
και $\lambda_e = 0$ εκτός
από πεπ. πλήθος

γράφω : $x = \sum_{n=1}^{n} \lambda_n x_n + \sum_{e \notin B} \lambda_e e$

ορίζω τότε $\psi(x) = \sum_{n=1}^{n} \lambda_n \, n \|x_n\| + 0$

<u>δηλ</u> $\psi(x_n) = n \|x_n\| \quad \forall x_n \in B$
και επεκτείνω γραμμικά

$$y_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{τότε} \quad \|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$$

όμως $\psi(y_n) = \frac{1}{n\|x_n\|} \psi(x_n) = 1$

$\psi(y_n) \not\to 0$
ψ <u>ασυνεχής</u>

(4β) Έστω ℓ^p, $1<p<+\infty$

Θέτω: $E_p = \{ x = (x(n)) \in \ell^p : \sum_{n=1}^{\infty} x(n) = 0 \}$

Ν.δ.ο είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ^p

Αρκεί ότι είναι υπόχωρος είναι εύκολο.

$\Downarrow$

$\overline{E_p}$ είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ^p

Αν $\overline{E_p} \neq \ell^p$, από το (ΥΘ) $\exists\, \varphi \in (\ell^p)^*$
$\varphi \neq 0$ η οποία $\varphi|_{\overline{E_p}} = 0$

Έστω $\varphi \in (\ell^p)^*$ παρατηρώ ότι $\forall n \in \mathbb{N}$,
$e_n - e_1 \in E_p$

Επομένως αν $\varphi|_{\overline{E_p}} = 0$ θα πρέπει
$\varphi(e_n - e_1) = 0 \ \forall n$

<u>δηλ</u> $\varphi(e_n) = \varphi(e_1) \ \forall n$

$(\varphi(e_n))$ είναι η σταθερή ακολ.

Ξέρω όμως ότι $\varphi(x) = \sum x(n) y(n)$ για κάποια
$(y(n)) \in \ell^q$ $1<q<+\infty$

οπότε θα πρέπει
$\sum |\varphi(e_n)|^q < +\infty$

Αφού $\varphi(e_n) = \varphi(e_1)\ \forall n$ έπεται ότι $\varphi(e_1) = 0$ άρα
$\varphi(e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Όμως, $\overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = \ell^p$

οπότε έχουμε $\varphi = 0$.

άρα $\overline{E_p} = \ell^p$ ▨

(5) $\underset{B}{X} \xrightarrow{T} \underset{B}{Y}$ $\quad T \in \mathcal{B}(X,Y)$

(α) $\exists\, \delta > 0 : \forall x \in X : \|Tx\| \geq \delta \|x\|$

$\Updownarrow$?

(β) T είναι 1-1 και $T(X)$ κλ. υπόχ. του Y

Αποδ. Αν (α), τότε φυσικά ο T είναι 1-1
Επιπλ., η απεικ.

$$T : X \to T(X)$$

είναι 1-1, επί, συνεχής
και $T^{-1} : T(X) \to X$
συνεχής διότι
$\forall y = T(x) \in T(X)$ έχω

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx\| = \frac{1}{\delta} \|y\|$$

συνεπώς

$$T : X \to T(X)$$

είναι τοπολογικός ισομορφισμός
και άρα πάει Banach σε Banach

διότι αν (z_n) : βασική του $T(X)$
τότε $(T^{-1}(z_n))$ βασική στον X : Banach
οπότε συγκλίνει και άρα η (z_n) συγκλίνει
Οπότε ο $T(X)$ είναι πλήρης, άρα κλειστός υπόχωρος του Y

Αποδ. (β) $\Rightarrow$ (α) : Θεωρώ τον $T : \underset{\text{Banach}}{X} \to \underset{\text{Banach}}{T(X)}$

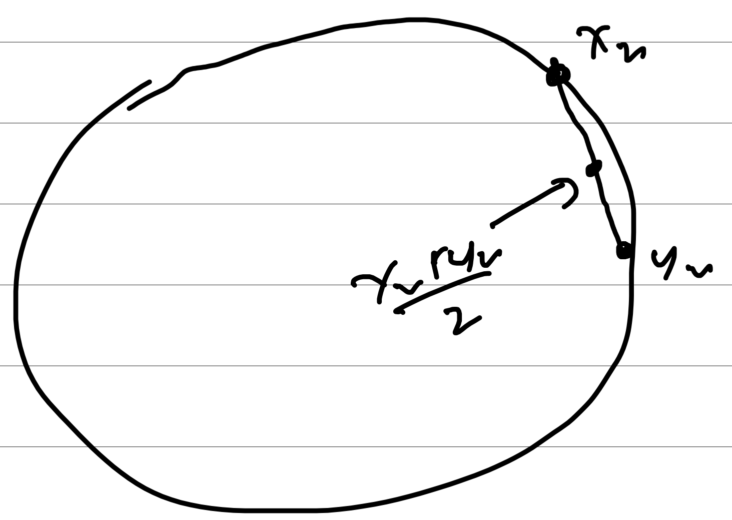
είναι 1-1, επί, συνεχής
άρα από το Θεωρ. Φρ. Αντίστρ. (Banach)
η $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι
συνεχής
οπότε, $\forall x \in X$

$$\|x\| = \|\underset{T\ \varphi\rho}{T^{-1}}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\| \, \|Tx\|$$

δηλ. $\|Tx\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\|$

άρα $\|Tx\| \geq \delta \|x\| \ \forall x$ με $\delta = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$

(6β) H: Hilbert, $(x_n), (y_n)$: $\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \ \forall n$
και $\|x_n + y_n\| \to 2$
$\Downarrow$?
$\|x_n - y_n\| \to 0$



Απόδ

κανόνας ΙΙ:

$$\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 = 4$$

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|^2 = 1$$

$\downarrow$
1 άρα $\left\|\frac{x_n-y_n}{2}\right\|^2 \to 0$ $\blacksquare$

Στα ℓ^p, $1 < p < +\infty$ ισχύει (ανισότητα) Clarkson:
$\forall x, y \in \ell^p$

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \le C_p \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$$

Το ίδιο (γενικότερα) ισχύει και για τα ℓ^p

(για $2 \le p < +\infty$):

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \le \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right).$$

(για $1 < p < 2$)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^q \le \left(\frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p\right)^{\frac{q}{p}},$$