26 Μαΐου

$\left(C([a,b]), \| \ \|_\infty \right)$: το σύνολο των πολυωνύμων είναι πυκνό

(Θ. Weierstrass)

Θεώρημα Stone-Weierstrass (Πραγματική περίπτωση)

$X = \left(C_{\mathbb{R}}(K), \| \ \|_\infty \right)$ K = συμπαγής Hausdorff
K = συμπαγής μετρικός

Έστω $\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbb{R}}(K)$:

Υποθ.
- Αν $f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow f+g \in \mathcal{A}$, $fg \in \mathcal{A}$ (άλγεβρα)
- περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις ($\mathbb{1} \in \mathcal{A}$)
- χωρίζει τα σημεία του K:
  $\forall x, y \in K$ με $f(x) = f(y)$ $\forall f \in \mathcal{A}$
  $\Rightarrow x = y$

Τότε $\overline{\mathcal{A}}^{\| \ \|_\infty} = C_{\mathbb{R}}(K)$

(πχ $K = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ = πολυώνυμα, θ. W.
πχ $K = [0, 2\pi]$, $\mathcal{A}$ = τριγ. πολυώνυμα
$\sum a_n \cos nt + b_n \sin nt$
επίσης πυκνά στις 2π περ + συνεχείς

ΔΕΙΤΕ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ
stoneweixe.pdf
στην η-τάξη

Στη μιγαδική περίπτωση: K συμπαγής Hausdorff

$\mathcal{A} \subseteq C(K)$
- υπάλγεβρα
- χωρίζει τα σημεία
- περιέχει σταθερές
- → $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$

<u>τότε</u> $\overline{\mathcal{A}}^{\|\,\|_\infty} = C(K)$

Εφαρμογή: Fubini για συνεχείς συναρτήσεις

<u>Πρόταση</u> Έστω $K = [a,b] \times [\gamma,d]$ αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε

$$\int_a^b \left(\int_\gamma^d f(x,y)\, dy \right) dx \qquad (F)$$
$$= \int_\gamma^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

<u>Απόδ.</u> Ορίζουμε $\mathcal{A} = \mathrm{span}\{ \varphi\psi,\ \varphi \in C[a,b],\ \psi \in C[\gamma,d] \}$

$f \in \mathcal{A} \iff$
$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$$

Αν $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ τότε προφανώς ισχύει (F)

$$\int_a^b \left(\int_\gamma^d \varphi(x)\psi(y)\, dy \right) dx = \int_a^b \varphi(x) \underbrace{\left(\int_\gamma^d \psi(y)\, dy \right)}_{\text{σταθ}} dx$$
$$= \left(\int_a^b \varphi(x)\, dx \right) \left(\int_\gamma^d \psi(y)\, dy \right)$$
$$\|$$
$$\vdots$$

Λόγω γραμμ. τα $\iint$ ισχύει η (F) $\forall f \in \mathcal{A}$

Παρατηρώ ότι
(1) $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα
(2) $\mathcal{A}$ περιέχει τις σταθερές
(3) Χωρίζει τα σημεία του K:
αν $(x,y), (s,t) \in K$
και $(x,y) \neq (s,t)$
τότε ή $x \neq s$ οπότε παίρνω
$f(u,v) = \varphi(u)$
ή $y \neq t$ οπότε παίρνω
$f(u,v) = \psi(v)$.
(4) αν μιλήσουμε για συναρτ. με μιγαδ. τιμές
$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A}$

Έπεται από S-W
ότι $\overline{\mathcal{A}}^{\|\,\|_\infty} = C(K)$
όμως τα $\iint$ είναι $\|\,\|_\infty$-συνεχή συναρτησιακά

οπότε $\forall f \in C(K)$ $\exists (f_n)$ με $f_n \in A$ με $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

και είναι ομοιομ. συγκλ., άρα

$$\int_\gamma^d f(x,y)\,dy = \lim_n \int_\gamma^d f_n(x,y)\,dy \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Downarrow (*)$$

$$\int_a^b \left(\int_\gamma^d f(x,y)\,dy \right) dx = \lim_n \int_a^b \left(\int_\gamma^d f_n(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\| \; f_n \in A$$

$$= \lim_n \int_\gamma^d \left(\int_a^\beta f_n(x,y)\,dx \right) dy$$

$$\overset{(\text{ομοίως})}{=} \int_\gamma^d \left(\int_a^\beta f(x,y)\,dx \right) dy \quad \boxtimes$$

$(*)$: Αν

$$F(x) = \int_\gamma^d f(x,y)\,dy$$

και

$$F_n(x) = \int_\gamma^d f_n(x,y)\,dy$$

τότε οι F, F_n συνεχείς και $F_n \to F$ ομοιόμορφα (γιατί;)

οπότε $\int_a^b F(x)\,dx = \lim_n \int_a^\beta F_n(x)\,dx$

Άλλως : δες το αρχείο stoneweixe.pdf !

Άσκηση

$K = \{x \in \ell^2_{\mathbb{R}} : \forall n \ |x(n)| \leq \frac{1}{3^n}\}$

- κυρτό και $\| \ \|_2$ - συμπαγές
- $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x(n)$$

καλά ορισμένη, αφινική, συνεχής στο K

$\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

- Δεν επεκτείνεται συνεχώς σ' όλο το ℓ^2

Απόδ

- K κυρτό : προφανές

f καλά ορισμένη : $\sum 2^n |x(n)| \leq \sum 2^n \frac{1}{3^n} < +\infty$

αφινική : προφανές

- K συμπαγές, f συνεχής

(i) K κλειστό : έστω (x_i) $x_i \in K$

και $\|x_i - x\|_2 \to 0$

$\Downarrow$

$\forall n, \ |x_i(n) - x(n)| \to 0$

$\Downarrow$

$\forall n, \ |x(n)| = \lim_i |x_i(n)| \leq \frac{1}{3^n}$

άρα πλήρες. άρα $x \in K$

(ii) Αρκεί νδο ολικά φραγμένο

Που δίνουν $\epsilon > 0$ να βρω $B(x_1, \epsilon) \ldots B(x_m, \epsilon)$

να καλύπτουν το K

$\exists n_0 : \frac{1}{3^{n_0}} < \epsilon$

Θέτω $K_0 = \{x \in K : x(n) = 0 \ \forall n > n_0\} \subset \mathbb{R}^{n_0}$

κλειστό και φραγμ., άρα συμπαγές

[ακριβέστερα, αν θέσω $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_0} : |x(n)| \leq \frac{1}{3^n} \ \forall n \leq n_0\}$ τότε το $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_0}$ είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές, και $K_0 = K_1 \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \ldots$ γινόμενο συμπαγών, άρα συμπαγές]

Αφού $K_0 \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές,

$\exists x_1 \ldots x_m \in K_0 :$

$\longrightarrow K_0 \subseteq B(x_1, \epsilon/2) \cup B(x_2, \epsilon/2) \cup \ldots \cup B(x_m, \epsilon/2)$

τώρα ισχ.

$K \subseteq B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup \ldots \cup B(x_m, \epsilon)$

απόδ

Εάν $x \in K$ έστω $y = (x(1), x(2), \ldots x(n_0), 0, 0, \ldots)$

$y \in K_0$

άρα $\exists i \leq m :$

$y \in B(x_i, \epsilon/2)$

$$\|x - x_i\|_2 \leq \|x - y\|_2 + \|y - x_i\|_2 < \|x - y\|_2 + \epsilon/2$$

όμως,

$$\|x - y\|_2^2 = \sum_{i > n_0} |x(i)|^2 = \sum_{i > n_0} \underbrace{|x(i)|}_{< \frac{1}{3^{n_0}}} \cdot |x(i)|$$

$$\leq \frac{1}{3^{n_0}} \sum_{i > n_0} |x(i)|$$

$$\leq \epsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}}_{\frac{1/3}{1 - 1/3}} = \frac{\epsilon}{2}$$

Ιδέα:

(Παίρνω ένα $x_0 \in \ell_2$ $\quad K_{x_0} = \{ y \in \ell^2 : |y(n)| \le |x_0(n)| \ \forall n \}$)

$\uparrow$ συμπαγές

Ισχ. $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής!

Έστω $\epsilon > 0$ $\exists n_0 : \displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\epsilon}{2}$

Παίρνω $x, y \in K$:

$$|f(x) - f(y)| \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^n |x(n) - y(n)|$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{n_0 - 1} 2^n |x(n) - y(n)| \right) + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^n \underbrace{|x(n) - y(n)|}_{\le \frac{2}{3^n}}$$

$$\le \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{n_0 - 1} 2^{2n} \right)^{1/2}}_{:= M} \left(\sum_{n=1}^{n_0 - 1} |x(n) - y(n)|^2 \right)^{1/2} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^n \frac{2}{3^n}}_{< \epsilon/1}$$

$$|f(x) - f(y)| \le M \|x - y\|_2 + \epsilon$$

οπότε αν πάρω $\delta = \frac{\epsilon}{M}$ έχω:

$\forall x, y \in K$ με $\|x - y\|_2 < \delta$ έχω $|f(x) - f(y)| < 2\epsilon$

Στο U: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x(n)$

Αν υπήρχε $g: \ell^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής γραμμική

τότε η $g\big|_{c_{00}}$ θα ήταν συνεχής γραμμική

και $\forall x \in U$: $g(x) = f(x)$

άρα $g(0) = f(0) = 0$

οπότε η g θα ήταν και γραμμική (γιατί;;)

και συνεχής πάνω c_{00}

αλλά δεν είναι

γιατί π.χ. $x_n = \frac{1}{n} e_n \in c_{00}$

τότε $\|x_n\|_2 = \frac{1}{n} \to 0$

ενώ

$g(x_n) = \frac{2^n}{n} \not\to 0$