30 Μαΐου

(0) Ασκ X : Banach, $f_n \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$

$\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$

$\forall x \in X \ \exists k_x > 0 : \ |f_n(x)| \le k_x \varepsilon_n \ \forall n$

νδο $\|f_n\| \to 0$

Λύση: Ο κλασσικός τρόπος με PUB

στην $\left\{ \dfrac{f_n}{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ και βγαίνει.

(δηλ) είναι κ.σ. φραγ $\overset{PUB}{\Longrightarrow} \exists M : \left\| \dfrac{f_n}{\varepsilon_n} \right\| \le M \Rightarrow \|f_n\| \le M\varepsilon_n \to 0$)

(1) K συμπαγής (μετρ.) χώρος $\varphi : K \to K$ ομοιομορφισμός (δηλ 1-1, επί, συν $\Rightarrow \varphi^{-1}$ συν)

$X = (C(K), \|\ \|_\infty)$

$T : X \to X$
$f \mapsto f \circ \varphi$

νδο
- καλά ορισμένη (α)
- (γραμμ) φραγμ (β)
- ισομετρία (γ)
- επί (δ)

Απόδ f συνεχής $\Rightarrow f\circ\varphi$ συνεχής

άρα $\forall f \in X \Rightarrow Tf \in X$

- γραμμική:

$T(f+\lambda g) = (f+\lambda g)\circ\varphi$
$= f\circ\varphi + \lambda(g\circ\varphi)$
$= Tf + \lambda Tg$

- φραγ: $\forall f \in X$,

$\|Tf\|_\infty = \sup\{ |(Tf)(s)| : s \in K\}$

$= \sup\{ |f(\varphi(s))| : s \in K\}$

$\le \sup\{ |f(t)| : t \in K\}$
$\quad = \|f\|_\infty$

T φραγμ, $\|Tf\| \le \|f\| \ \forall f$

- T 1-1 και επί: Η φ είναι ομοιομορφισμός οπότε, αν $\psi = \varphi^{-1} : K \to K$

και $S : f \mapsto f\circ\psi$ ομοίως καλά ορισμ. με $\|S\| \le 1$

έχω: $T\circ S : f \mapsto f\circ\psi \to f\circ\psi\circ\varphi = f$

$S\circ T : f \mapsto f\circ\varphi \to f\circ\varphi\circ\psi = f$

οπότε $S = T^{-1}$

οπότε $\forall f$ αν θέσω $g = Sf$ τότε

$\|f\| = \|T(S(f))\| \le \|T\|\,\|Sf\| \le \|Sf\| \le \|S\|\,\|f\| \le \|f\|$

οπότε $\|f\| = \|T(Sf)\| = \|Sf\| = \|f\| \ \forall f$

άρα S ισομετρία

$\|g\| = \|S(T(g))\| \le \|Tg\| \le \|g\|$

άρα $\|g\| = \|Tg\| \ \forall g$

(2) $X = \left(C_b^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), \| \ \|_\infty \right)$

$\hookrightarrow = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$ συνεχείς + φραγμ.$\}$

(είναι πλήρης χώρος)

Έστω $a \in \mathbb{R}$, $T_a : X \to X$

$$(T_a f)(t) = f(t-a) \quad (t \in \mathbb{R})$$

- καλά ορισμένη
- φραγμ.
- ισομετρία + επί

πχ: $T_{(-a)} = (T_a)^{-1}$

(όπως πριν, με $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t - a$)

(3) Έστω στο χώρο c_0 ορίζω:

$$\|x\|_* = \sum \frac{1}{2^k}|x(k)|, \quad x=(x(k))\in c_0$$

νδο $(c_0, \|\cdot\|_*)$ είναι χώρος με νόρμα, όχι Banach

<u>Λύση</u> καλά ορισμένη: $\forall x\in c_0$, $\|x\|_* < +\infty$

προφανές, γιατί $\sum \frac{1}{2^k}|x(k)| \le \sum \frac{1}{2^k}\|x\|_\infty = \|x\|_\infty$

$\|\ \|_*$ νόρμα: εύκολο (slow the eggs)

δεν είναι πλήρης:

$$f_n = e_1+e_2+\dots+e_n = (1,1,\dots,\overset{n}{1},0,0\dots)$$

πόσο πάει: $n>m$: $\|f_n-f_m\|_* = \left\|\sum_{m+1}^{n} e_k\right\|_*$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k}1 = \frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{n-m}\frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2^m}$$

οπότε (f_n) είναι $\|\ \|_*$-βασική

($\forall \varepsilon>0\ \exists n_0: \frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$ οπότε όταν $n>m\ge n_0$ είμαστε οκ)

Έστω ότι $\exists x\in c_0$ ώστε: $\|f_n-x\|_*\to 0$

έχω $\|f_n-x\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|f_n(k)-x(k)|$

Όμως, $x\in c_0$ άρα $\exists k_0: |x(k_0)|<\frac{1}{2}$

Πάρε τώρα $n\ge k_0$:

$$\|f_n-x\|_* \ge \frac{1}{2^{k_0}}|f_n(k_0)-x(k_0)| = \frac{1}{2^{k_0}}|1-x(k_0)| > \frac{1}{2^{k_0}}\frac{1}{2}$$

άρα $\|f_n-x\|_* \ge \frac{1}{2^{k_0+1}}$ $\quad\forall n\ge k_0$

οπότε $\|f_n-x\|_* \not\to 0$

(4) $(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα, απειροδιάστατο, $Y \subseteq X$ υπόχωρος με $\dim Y < +\infty$

Ν.δ.ο. $\exists\, x \in X : \|x\| = 1$ και $dist(x, Y) = 1$

Απόδ. Έστω $u \in X \setminus Y$ ($\exists$ τέτοιο, αφού $Y \subsetneq X$)
($u \neq 0$ αφού $0 \in Y$)

Αφού $\dim Y < +\infty$, ξέρω Y : κλειστός, άρα Banach

οπότε $d = dist(u, Y) > 0$
$= \inf\{\|u - y\| : y \in Y\}$

$\exists\, (y_n)$ στον Y : $d \le \|u - y_n\| < d + \frac{1}{n}$ $\forall n$

Άρα (y_n) είναι φρ. διότι

$$\big|\, \|y_n\| - \|u\| \,\big| \overset{\text{Δκή}}{\le} \|y_n - u\| < d + \frac{1}{n}$$

Επειδή $\dim Y < +\infty$, κάθε κλειστό + φραγμένο είναι συμπαγές

οπότε η (y_n) έχει μία υπακ. (z_n) που συγκλίνει, έστω $z = \lim z_n \in Y$

$$\Downarrow$$

Ονομάζω $x = \frac{1}{d}(u - z)$ $\quad \|u - z\| = \lim \|u - z_n\| = d$

$\Rightarrow \|x\| = 1$

Έστω $y \in Y$:

$$\|x - y\| = \left\|\frac{1}{d}(u - z) - y\right\| = \frac{1}{d}\|u - (\underbrace{z + dy}_{\in Y})\| \ge \frac{1}{d}\, d = 1$$

άρα $\quad dist(x, Y) = \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} \le \|x - 0\| = \|x\| = 1$

οπότε $\quad dist(x, Y) = 1$

Ξανά για την (3): Γενικά, αν

$W=(w(n))$ $\quad w(n)>0$

ορίζω: $\ell^1_w = \{(x(n)) : \sum w(n)|x(n)| < +\infty\}$

(πχ $w(n)=\frac{1}{2^n}$)

$$\|x\|_w = \sum w(n)|x(n)|$$

προφανώς είναι νόρμα

αποδεικνύεται ότι $(\ell^1_w, \|\ \|_w)$

Banach

όταν πχ $w(n)=\frac{1}{2^n}$

τότε $c_0 \subseteq \ell^1_w$ διότι όταν $x=(x(n))\in c_0$

τότε

$$\|x\|_w = \sum \frac{1}{2^n}|x(n)| \le \underbrace{\left(\sum \frac{1}{2^n}\right)}_{<+\infty}\|x\|_\infty$$

Αν ο $(c_0, \|\ \|_w)$ ήταν Banach

θα ήταν κλειστός υπόχωρος

του ℓ^1_w

Αλλά είναι πυκνός, (και προφανώς $c_0 \neq \ell^1_w$)

διότι πχ $c_0 \supseteq c_{00}$ ← που είναι πυκνός στον ℓ^1_w

και $\forall x\in \ell^1_w$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0$:

$$\sum_{n>n_0} w(n)|x(n)| < \varepsilon .$$

οπότε αν θέσω $y=(x(1),x(2),\dots,x(n_0),0,0,\dots) \in c_{00}$

να $\|x-y\|_w = \sum_{n>n_0} w(n)|x(n)| < \varepsilon$

(5) Σε νόρ. χώρο $(X, \| \ \|)$ αν $C \subseteq X$ κυρτό τότε $\overline{C}$ επίσης κυρτό

Απόδ Πολύ εύκολο

(6) Έστω $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ θεωρώ τον

(α) $S : (x(1), x(2), \dots) \longrightarrow (x(2), x(3), \dots)$

Δ.ο. είναι καλά ορισμ. φραγμ. τελ. και βρείτε τη $\|S\|$

$\forall x \in \ell_1$

Απόδ $\|Sx\|_1 = \|(x(2), x(3), \dots)\|_1 =$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} |x(n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \|x\|_1$$

1 στην 2 τρόπ.: καλά ορισμένος και (αφού γραμμικός) είναι φραγμ. με $\|S\| \leq 1$

Ισχ $\|S\| = 1$

Πράγματι, π.χ. $x = e_3$, $Sx = e_2$

$(\|e_3\|_1 = 1)$

$\Rightarrow \|S\| \geq \|Se_3\|_1 = \|e_2\|_1 = 1$

Όμως, S όχι ισομετρία διότι π.χ. $Se_1 = 0$ ούτε 1-1

(7) ορίζω $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$ δ.ο. καλά ορισμένη, φραγμ. βρείτε $\|\varphi\|$

$$\varphi : (\ell^1, \| \ \|_1) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\ |)$$

• φ καλά ορισμένη, διότι $\sum x(n)$ συγκλίνει, μάλιστα απόλυτα:

$$\sum |x(n)| = \|x\|_1 < +\infty$$

• φ γραμμική: εύκολο

• $|\varphi(x)| = |\sum x(n)| \leq \sum |x(n)| = \|x\|_1$

άρα φ φραγμ., $\|\varphi\| \leq 1$

μάλιστα $\varphi(e_1) = 1$ άρα $\|\varphi\| = 1$ ∎

(8) $!\,(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος με εσωτ. γινόμ. (π.χ. Hilbert)

(θ) $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ μια ο.κ. ακολουθία

τότε $\forall x,y\in X$ θέτω $a(n) = \langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle$

τότε η $a = (a(n)) \in \ell^1$

Απόδ $$\sum |a(n)| = \sum |\langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle| \overset{CS}{\leq} \Big(\sum |\langle x,e_n\rangle|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum |\langle e_n,y\rangle|^2\Big)^{1/2} \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|x\|_X \, \|y\|_X < +\infty$$

(β) Αν επιπλέον η (e_n) είναι ο.κ. βάση, τότε $\forall x,y\in X$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle = \langle x,y\rangle$$

Απόδ Ξέρω ότι $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n\rangle e_n$

δηλ. ότι $\left\|x - \sum_{n=1}^{N} \langle x,e_n\rangle e_n\right\|_X \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

(θέλει πληρότητα;;) $\underset{\geq}{\text{ΌΧΙ!!}}$

όπως: $\langle x,y\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n\rangle e_n, y\right\rangle$

αλλά $\langle\cdot,\cdot\rangle$ συνεχής άρα

$$= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle x,e_n\rangle e_n, y\right\rangle$$

$$\overset{\gamma\rho}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle = \text{οκ} \quad \blacksquare$$

Σχόλιο για τη σύγκλιση:

ορίζω $x_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x,e_n\rangle e_n$

όταν $N>M$ $$\|x_N - x_M\|^2 = \left\|\sum_{n=M+1}^{N} \langle x,e_n\rangle e_n\right\|^2 \overset{\perp \text{ Πυθ.}}{=} \sum_{n=M+1}^{N} |\langle x,e_n\rangle|^2$$

όμως $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (Bessel) άρα η σειρά συγκλίνει

και συνεπώς (x_N) είναι βασική στον X

οπότε, αν X είναι πλήρης, $\exists\, y\in X$: $y = \lim_N x_N$

Όμως, $\forall n$, $\langle y, e_n\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k, e_n\rangle$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \underbrace{\langle e_k, e_n\rangle}_{\delta_{kn}}$$

$$= \langle x, e_n\rangle$$

$$\Rightarrow \langle x-y, e_n\rangle = 0 \quad \forall n$$

$\Downarrow$ αφού (e_n) ο.κ. βάση

$$x = y$$

Υποθέσεις $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρος με εσωτ. γιν.

$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ο.κ. βάση του X

(δες τις διαφάνειες!)

δηλ. $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} \overset{(*)}{=} X$

Συμπέρ. $\forall x \in X$ ισχύει $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

Απόδ. Αφού $(*)$, $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $a_n \in \mathbb{K}$:

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < \varepsilon$$

Καλούμε το $\text{span}\{e_1, e_2, \ldots e_N\} = Y$

από το Θεώρημα Βέλτ. Προσέγγ. ξέρω ότι το διάνυσμα

$$y_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n$$

είναι το πλησιέστερο προς το x στοιχείο του Y

οπότε

$$\|x - y_N\| \le \left\| x - \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| < \varepsilon$$

Τέλος, όταν $n \ge N$ ισχύει ότι

$$\|x - y_n\| \le \|x - y_N\|$$

(γιατί;;)

οπότε η $\sum \langle x, e_n\rangle e_n$ συγκλίνει στο x ∎