(23 May)

Θεωρήματα Σταθερού Σημείου

(Προηγ) : Banach : (X, d) πλήρης μχ
$$f: X \longrightarrow X$$
γνήσια συστολή : $\exists\, c \in (0,1)$ τ.ω.
$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y) \quad \forall x, y \in X$$
Τότε $\exists!\, x_0 \in X : f(x_0) = x_0$

Θεώρημα Markov-Kakutani (απλή μορφή)

$K \subseteq X$ κυρτό και συμπαγές
και $\{T_i : i \in I\}$: $T_i : K \to K$
συνεχείς αφινικές και μετατίθενται

τότε $\exists\, x_0 \in K : T_i(x_0) = x_0 \quad \forall i \in I$

[T αφινική αν διατηρεί κυρτούς συνδυασμούς
δηλ. $\forall x, y \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$
$$T(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda T(x) + (1-\lambda) T(y)$$

(πχ Αν $S : X \longrightarrow X$ γραμμική και $y_0 \in X$
τότε η $T(x) = Sx + x_0$
είναι αφινική)]

Απόδ Έστω πρώτα μια T αφινική $T: K \to K$
νδο ότι $Fix(T) = \{x \in K : T(x) = x\} \neq \emptyset$

Ορίζω $C = \{x - Tx,\ x \in K\} \overset{?}{\Longrightarrow} 0 \in C$

Ξεκινάω από τυχαίο $x \in K$ (: $x, Tx, T^2x, T^3x, \ldots \overset{?}{\longrightarrow}$)

Παρατηρώ ότι C κυρτό γιατί K κυρτό
και $C = (I - T)(K)$ όπου η $I - T$ είναι
αφινική.

Θέτω:

$$x(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(T^k(x) - T^{(k+1)}(x)\right)$$

παρατηρώ: $\forall x(n) \in C$ γιατί κάθε $T^k(x) := y_k \in K$

και

$$T^k(x) - T(T^k(x))$$
$$\|$$
$$y_k - Ty_k \in C$$

και το C είναι κυρτό.

Άρα

$$x(n) = \frac{1}{n}\left((x - Tx) + (Tx - T^2x) + \dots + (T^{n-1}x - T^n x)\right)$$
$$= \frac{1}{n}(x - T^n x)$$
$$= \frac{1}{n}x - \frac{1}{n}T^n x$$

$\frac{1}{n}x \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{1}{n}T^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0$ διότι $\frac{1}{n} \to 0$ και $\forall T^n x \in K$ που είναι συμπαγής άρα φραγμ.

άρα, $x(n) \to 0$

και επειδή $\forall x(n) \in C \Rightarrow 0 \in \overline{C} = C$

διότι C κλειστό ως συνεχής εικόνα του K = συμπαγής. ∎

<u>Άσκηση</u> Έστω χώρο $(\ell^2, \|\ \|_2)$

$$K = \{x \in \ell^2 : \forall n, |x(n)| \leq \frac{1}{3^n}\}$$

1) Δ.ο K κυρτό και συμπαγές

$$f : K \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sum 2^n x(n)$$

2) Δ.ο ορίζεται καλά, είναι αφινική <u>και</u> συνεχής

3) Δ.ο δεν υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{F} : \ell^2 \to \mathbb{R}$ αφινική (για την άλλη φορά)

Markov-Kakutani, γενική περίπτωση:

$\{T_i : i\in I\}$ με $T_i\circ T_j = T_j\circ T_i$!

$\forall i\in I$ ονομάζω $F_i = Fix(T_i) = \{x\in K : T_i x = x\}$

$\uparrow$

κλειστό $\subseteq K$ (T_i: συνεχής)

άρα συμπαγές

και επιπλέον $F_i \neq \emptyset$

Θέλω να δείξω ότι $\exists\, x_0 \in K : \forall i \;\; T_i(x) = x$

δηλ. νδο

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$$

Τι κάνει νιάου νιάου στα κεραμίδια: η FIP!

Από συμπάγεια του K, αρκεί νδο $\forall$

$\{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots F_{i_n}\}$ κάποια έχει

μη κενή τομή

πρώτα δύο: F_i, F_j νδο $F_i \cap F_j \neq \emptyset$

<u>Πρότ</u> $T_i(F_j) \subseteq F_j$!!

<u>Απόδ</u>: αν $x \in F_j$ θδο $T_i(x) \in F_j$

$\Updownarrow$

$T_j(x) = x$

όπως

$$T_j(T_i(x)) \overset{\text{μετάθ}}{=} T_i(T_j(x)) = T_i(x)$$

έδειξα ότι $T_i(x)$ είναι σταθ. σημ. του T_j

<u>Άρα</u> <u>δηλ</u> $T_i(x) \in F_j$

F_j είναι κυρτό και συμπαγές (διότι το K είναι)

και $T_i(F_j) \subseteq F_j$

$\Rightarrow$ από την περίπτωση 1, η $T_i\big|_{F_j}$ έχει σταθ. σημείο

$\exists\, x \in F_j$ τ.ω. $T_i(x) = x$ άρα $x \in F_i \Rightarrow x \in F_i \cap F_j$

Άρα, $F_i \cap F_j \neq \emptyset$. Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\forall$ πεπερ. $F_{i_1} \dots F_{i_n}$

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \emptyset$$

οπότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ ∎

Hahn - Banach: (χώρος με νόρμα)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[drr, dashed] & & \\ X \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, "T"] & & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$\exists \tilde{T}$: γραμμ με $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

T: γραμμ + συνεχή

→ Επέκταση: (χώρος με ν)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[drr, dashed] \arrow[drrr, dashed, bend left] & & & \\ X \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[rr, "T"] & & (\ell^\infty, \|\ \|_\infty) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

$\exists ? \tilde{T}$ - γραμμ με $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

T: γραμμ + συν

~~(Ban = { χώροι Banach, φρ. γραμμ. απεικ } ; $\ell^\infty \in$ Ban : εμφυτευτικό αντικείμενο (injective))~~

Λύση $\forall n \in \mathbb{N}$

θεωρώ $\varphi_n \circ T : X \xrightarrow{T} \ell^\infty \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{K}$

όπου $\forall x$, $\varphi_n(x) = x(n)$: γραμμική και $\|\varphi_n\| = 1$

$\varphi_n \circ T : X \longrightarrow \mathbb{K}$, γραμμ, συνεχή

$\|\varphi_n \circ T\| \leq \|T\| \quad \forall n$

$\Downarrow$ εδώ H-B $\forall n$

$\exists$ $\psi_n : Y \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμ + συνεχή

έχω

$\|\psi_n\| = \|\varphi_n \circ T\| \leq \|T\| \quad \forall n$

θέλω: $\exists ? \tilde{T}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "\tilde{T}"'] & & \mathbb{K} \\ & \ell^\infty \arrow[ur, "\varphi_n"'] & \end{tikzcd}$$

δηλ να βρω $\tilde{T} : Y \longrightarrow \ell^\infty$

τω. $\psi_n = \varphi_n \circ \tilde{T}$

ορίζω

$\tilde{T} : Y \longrightarrow \ell^\infty$

$y \longmapsto \tilde{T}(y)$ όπου $(\tilde{T}(y))(n) = \psi_n(y)$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Γιατί ισχύει $\tilde{T}y \in \ell^\infty$; δηλ. γιατί

$\sup_n |\tilde{T}(y)(n)| < +\infty$;

απάντηση: $|\tilde{T}y(n)| = |\psi_n(y)| \leq \|\psi_n\| \|y\|$

συν γρ

$\leq \|T\| \|y\|$

2 πράγματα: $\|\tilde{T}y\|_\infty \leq \|T\| \|y\|$ (*)

1) προφανώς, $\tilde{T}y \in \ell^\infty$

2) η $\tilde{T} : Y \longrightarrow \ell^\infty$ είναι φραγμ από $\|T\|$ από την (*)

(προφανώς είναι γραμμική)

και ισχύει $(\tilde{T}y)(n) = \psi_n(y)$ $\forall y \in Y$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n$ άρα $x \in X$ $(\tilde{T}x)(n) = \psi_n(x) = \varphi_n(Tx) = (Tx)(n)$

δηλαδή $\tilde{T}x = Tx$

άρα πράγματι $\tilde{T}$ επεκτείνει την T οπότε $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$

άρα $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

∎

Η εμφύτευση ενός χώρου με νόρμα (ή Banach) σε κάποιο $C(K)$

$(X, \| \|)$ και ξέρω: $\forall x \in X$

$$\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\}$$

(πόρισμα HB: $\forall x \in X \setminus \{0\}$ $\exists f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ τ.ω. $|f(x)| = \|x\|$)

Ας θεωρήσω $K = S_{X^*}$

και $\forall x \in X$ ορίζω $\hat{x} : K \longrightarrow \mathbb{R}$
$f \longmapsto f(x)$

Θέλω μια τοπολογία στο K έτσι ώστε $\forall \hat{x}$ $(x \in X)$ να είναι συνεχής

__πχ__ θα μπορούσα να πάρω αυτή που επάγεται από $\| \|_{X^*}$

διότι αν πχ: $f_n \in K$ με $\|f_n - f\|_{X^*} \to 0$ τότε βεβαίως $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \to 0$

(διότι $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \, \|x\|$)

__οπότε__ $\hat{x}(f_n) \to \hat{x}(f)$
άρα $\forall \hat{x}$ είναι συνεχής

Θέλω όμως επιπλέον ο K να είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία για να έχω:

$$(X, \| \|) \longrightarrow (C(K), \| \|_\infty)$$
$$x \longmapsto \hat{x}$$

Όμως, πχ. ο $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\}$ δεν εφοδιάζεται με νόρμα

Θα ορίσω την ασθενέστερη τοπολογία τ στο K ως προς την οποία $\forall \hat{x}$, $x \in X$ θα είναι συνεχής

<u>δηλ)</u> μια ακολουθία (f_n) στο K θα συγκλίνει σε μια $f \in K$ ως προς την τ

$$\iff \forall x \in X, \ \hat{x}(f_n) \to \hat{x}(f)$$

<u>δηλ</u>

$$f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X$$

(: κατά σημείο σύγκλιση)

<u>Ειδική περίπτωση</u> Ας υποθέσω ότι ο $(X, \| \ \|)$ είναι διαχωρίσιμος και έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό $\subseteq S_X$

ορίζω $\forall f, g \in K$

$$d(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f(x_i) - g(x_i)|}{2^i}$$

(<u>πράγματι</u> η σειρά συγκλίνει διότι

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} |f(x_i) - g(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \|f-g\| \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{2^i}$$

Άσκηση που έχουμε <u>κάνει</u> στην πραγματική: Η d είναι όντως μετρική στο K

και επίσης έχουμε δείξει ότι η (f_n) d-συγκλίνει σε μια f αν και μόνο αν συγκλίνει "κατά συντεταγμένη"

<u>δηλ</u> $d(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\iff \forall i \in \mathbb{N} \ f_n(x_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_i)$$

$$\iff f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X$$

(επειδή $\{x_i : i \in I\}$ το πήρα πυκνό στην S_X <u>και</u> η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμ. ($\|f_n\| \leq 1$)

(πες ότι μιλάμε για πραγματικούς χώρους – για ευκολία)

Κάθε $f \in K$ είναι $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής
γραμμική
με $\|f\| \leq 1$

οπότε $\forall x \in B_X$, $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq 1$

άρα $\forall x_i$, $\hat{x}_i : K \longrightarrow [-1, 1]$

Οπότε έχω μια $\theta : (K, d) \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]$

$\theta : f \longmapsto (f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$

η θ είναι 1-1 και συνεχής και
αποδεικνύεται ότι η εικόνα της είναι <u>κλειστό</u> $\subseteq \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]$
(ελέγξτε το)

Όμως, $[-1, 1]$ είναι συμπαγής

άρα το (αριθμ) γινόμενο $\prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]$

είναι συμπαγές

οπότε ο

(K, d) είναι συμπαγής (μετρικός) χώρος

Συνοψίζω:

$$(X, \| \ \|) \longrightarrow (C(\overset{\text{συμπ}}{K}), \| \ \|_{\infty})$$

$$x \longmapsto \hat{x}$$

γραμμική και ισομετρία