Πορίσματα H - B 28/3

$(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα, $x_1 \dots x_m \in X$ γραμμ. ανεξ., $a_1 \dots a_m \in \mathbb{R}$

Τότε $\exists f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμ. + συνεχής
ώστε $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \dots, m$

Απόδ. Θέτω $Y = \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$ όπου $\forall y \in Y$ γράφεται μοναδικά:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$

οπότε θέτω $f_0(y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ προφανώς γραμμ. $f_0(x_i) = a_i$, $i = 1 \dots m$

Όμως, f_0 συνεχής διότι $\dim Y < +\infty$!!

$\xrightarrow{HB}$

Από H - B $\exists f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμ. + συνεχής
$f(y) = f_0(y)$ $\forall y \in Y$
ειδικότερα $f(x_i) = a_i$, $i = 1 \dots m$.

Θεωρ. Αν $(X, \| \|)$ χώρος με νόρμα $X \neq \{0\}$

Τότε $X^* \neq \{0\}$

Ειδικότερα: $\forall x_0 \in X \setminus \{0\}$

$\exists f : X \to \mathbb{R}$ γραμμ. με $\|f\| = 1$

και $f(x_0) = \|x_0\|$

Αποδ. Ονομάζω $Y = \text{span}\{x_0\}$

και ορίζω $f_0 : Y \to \mathbb{R}$

$\lambda x_0 \to \lambda \|x_0\|$

$f(x_0) = \|x_0\|$

γραμμ., συνεχής διότι

$|f_0(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\|$

άρα f_0 συνεχής και

$\|f_0\| \leq 1$ αλλά $= 1$

Επεκτείνω από HB σε f όπως θέλει το θεώρ.

Θεώρημα $(X, \|\ \|)$ προσ. χώρος με νόρμα, τότε $\forall x \in X$

max

$$\|x\| = \sup\{ |f(x)| : \|f\| = 1 \}$$

max? (όχι!)

$$\left(\text{Υπενθύμιση: } \|f\| = \sup\{ |f(x)| : \|x\| \underset{\leq}{=} 1 \} \right)$$

Απόδ. Πρώτα - πρώτα: $\forall f \in X^*$, $\|f\| = 1$

τότε $|f(x)| \leq \|f\| \|x\| = \|x\|$

Πάρε sup! ως προς $\|f\| = 1$

$$\|x\| \geq \sup\{ |f(x)| : \|f\| = 1 \}$$

Όμως από το προηγούμενο:

$\exists f : \|f\| = 1$ τ.ω. $f(x) = \|x\|$

άρα το sup είναι max και μάλιστα

$$\|x\| = \max\{ |f(x)| : \|f\| = 1 \}$$

Πόρισμα Άρα, $\forall x \neq 0 \quad \exists f \in X^* : f(x) \neq f(0) = 0$

Επομένως,

$\forall x, y \in X,\ x \neq y \quad \exists f \in X^*$

$f(x) \neq f(y)$

(διότι $x - y \neq 0$ άρα $\exists f$:

$f(x-y) \neq 0$

δηλ. $f(x) - f(y) \neq 0$)

Συμπέρασμα Ο X^* χωρίζει τα **σημεία** του X

$(X, \|\ \|) \rightsquigarrow (X^*, \|\ \|_*)$: χώρος Banach

$$\begin{array}{c} X^* \\ \| \\ Y \\ \downarrow \end{array}$$

$(Y^*, \|\ \|)$ " "

$$\begin{array}{c} \| \\ ((X^*)^*, \|\ \|) = (X^{**}, \|\ \|) \end{array}$$

<u>Θεώρ</u> Μπορώ $X \longrightarrow X^{**}$ γραμμική + ισομετρική
<u>Δηλ</u> $\forall x \in X \ \exists \hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμ + συν
μ.ε. $\|\hat{x}\| = \|x\|$

<u>Απόδ</u> Έστω $x \in X$. Ορίζω

$$\begin{aligned} X^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \hat{x} : f &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

(i) $\hat{x}$ γραμμική: $\hat{x}(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x)$
$= f(x) + \lambda g(x)$ (ορ πράξ)
$= \hat{x}(f) + \lambda \hat{x}(g)$

(ii) $\hat{x}$ συνεχής:
$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$

$$\|\hat{x}\| = \sup\{|\hat{x}(f)| : f \in B_{X^*}\} \leq \|x\|$$

Άρα, $\hat{x} \in (X^*)^*$

(iii) $\|\hat{x}\| = \|x\|$
διότι, από HB, $\exists f \in X^*, \|f\| = 1$
$f(x) = \|x\|$
όπου $\hat{x}(f) = f(x) = \|x\|$
άρα $\|\hat{x}\| \geq \|x\|$

Άρα έχω

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow (X^*)^* \\ \tau : x &\longmapsto \hat{x} : \begin{array}{c} f \in X^* \\ \downarrow \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{array} \end{aligned}$$

Κοιτάζω την τ:
(i) τ γραμμική $\tau(x+\lambda y) \overset{?}{=} \tau(x) + \lambda\tau(y)$

$$\tau(x+\lambda y) \overset{?}{=} \tau(x)+\lambda\,\tau(y)$$

$$\widehat{(x+\lambda y)} \overset{?}{=} \hat{x}+\lambda\hat{y} \; : X^{*} \to \mathbb{R}$$

δηλ. $\forall f \in X^{*}$

$$\widehat{x+\lambda y}\,(f) \overset{?}{=} \hat{x}(f)+\lambda\,\hat{y}(f)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ f(x+\lambda y) & & f(x)+\lambda f(y) \end{array}$$

αλλά $=$ διότι η f είναι γραμμική

οπότε δείξαμε ότι $\widehat{x+\lambda y} = \hat{x}+\lambda\hat{y}$.

Επιπλέον, $\|\tau(x)\| = \|\hat{x}\| = \|x\|$

Έχω μία ισομετρική εμφύτευση

$$\tau : (X, \|\;\|) \to (X^{**}, \|\;\|)$$

η κανονική εμφύτευση

$X = \mathbb{R}^n$: $\forall f \in (\mathbb{R}^n)^*$ είναι της μορφής

$$\underline{f(x) = \sum_{k=1}^{n} a(k)\,x(k)} \quad \text{όπου } x = (x(k))$$

$f(e_k) = a(k)$

$X^* \ni f \leftrightarrow (a(1), \dots a(n))$

$\forall\, x = (x(1) \dots x(n))$ να ορίσω

$\hat{x} : f \longmapsto f(x)$

δηλ $\quad \hat{x}(f) = \sum a(k)\,x(k)$

οπότε η $\hat{x} : (a(1), \dots, a(n)) \to \sum a(k)\,x(k)$

$\updownarrow$

f

οπότε η $\hat{x}$ αντιστοιχεί στο $(x(1), x(2) \dots x(n))$

$\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^{**}$

οπότε η $x \longmapsto \hat{x}$ ένα και επί

για παράδ., αν $x = e_k = (0, 0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0 \dots 0)$

$$\hat{x}(f) = \sum_{q=1}^{n} a(q)\,x(q) = a(k) = f(e_k)$$

$\hat{e}_k(f) = f(e_k) \quad \forall k = 1 \dots n$

άρα ο X^{**} έχει και αυτός $\dim(X^{**}) = \dim(X)$

Έστω $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^{**}$ δηλ $\varphi : (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}$

έστω $f_k \in (\mathbb{R}^n)^*$ η απεικόνιση

$f_k(x) = x(k) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

Έχω $\varphi(f_k) := y_k \in \mathbb{R}$ όπου $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

Ισχυρίζομαι ότι $\varphi = \hat{y}$ δηλ ότι $\varphi(f) = \hat{y}(f) \quad \forall f \in (\mathbb{R}^n)^*$

Πράγματι, αν $f \sim (a(1), a(2) \dots a(n))$

δηλ $\forall x$, $f(x) = \sum a(k)\,x(k) = \sum a(k)\,f_k(x)$

δηλ $\quad f = \sum a(k)\,f_k$

έχω $\quad \varphi(f) = \sum a(k)\,\varphi(f_k) = \sum a(k)\,y(k) = \hat{y}(f)$.

$(X, \|\ \|)$ χώρος με νόρμα

Ξέρω ότι ο X έχει μία πλήρωση $(\hat{X}, d)$ που είναι πλήρης μχ και περιέχει ισομετρική του X ως πυκνό υποσύνολο.

Μπορώ όμως να βρω μία πλήρωση του $(X, \|\ \|)$ που να είναι και χώρος με νόρμα!

Θεωρώ την $\tau : (X, \|\ \|) \longrightarrow (X^{**}, \|\ \|)$: Banach

τ γραμμική, ισομετρία

Ορίζω $\tilde{X} = \overline{\tau(X)} \subseteq X^{**}$

↑ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}

άρα χώρος Banach

Επίσης, περιέχει μία (γραμμική +) ισομετρική εικόνα του X που είναι πυκνή στο $\tilde{X}$

Άρα ο $(\tilde{X}, \|\ \|)$ είναι μία πλήρωση του $(X, \|\ \|)$

Η πλήρωση αυτή είναι μοναδική modulo γραμμικούς ισομετρικούς ισομορφισμούς:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tau"] & \tau(X) \arrow[r, hook] & \overline{\tau(X)} = \tilde{X} \\
x \arrow[r, "\tau"] & \tau(x) & \\
X \arrow[r, "\sigma"] & \sigma(X) \arrow[r, hook] & \overline{\sigma(X)} = \tilde{\tilde{X}} \arrow[uu, dashed, "\varphi \text{ ισομ. επί}"'] \\
x & \sigma(x) \arrow[l] \arrow[uu, dashed, "\varphi_0"'] &
\end{tikzcd}$$

: τ ισομετρία (γραμμ) με πυκνή εικόνα

: σ ισομετρία (γραμμ) με πυκνή εικόνα

(άλλη πλήρωση)

$$\varphi_0(\sigma(x)) = \tau(x) \quad \forall x \in X$$

$\varphi_0 = \tau \circ \sigma^{-1}$ είναι γραμμική, ισομετρία

$\varphi_0 : \sigma(X) \longrightarrow \tau(X)$ " "

Επεκτείνω

$\varphi : \tilde{\tilde{X}} \longrightarrow \tilde{X}$ ισομετρία επί

με την ιδιότητα: $\forall x \in X : \varphi(\sigma(x)) = \tau(x)$. ∎

Θεωρ. $Y \subseteq X$ κλειστός υπόχωρος $\exists\, x_0 \in X \setminus Y$

Τότε $\exists\, \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμ + συνεχής με $\|\tilde{f}\| = 1$

τ.ω. $\tilde{f}(Y) = \{0\}$

Πιο συγκεκριμένα, αν $d = \operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$ (αφού Y κλειστό)

μπορεί να ισχύει $\tilde{f}(x_0) = d$

Απόδ. Θέτω $Z = \operatorname{span}(Y \cup \{x_0\})$

όπως $\forall z \in Z$ γράφεται μοναδικά:

$$z = y + \lambda x_0 \quad \text{όπου } y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Ορίζω $f : Z \to \mathbb{R}$

$$f(y + \lambda x_0) = 0 + \lambda d \quad \text{προφανώς γραμμική}$$

Για να την επεκτείνω $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ θέλω νδο $\|f\| = 1$

$$|f(y+\lambda x_0)| = |\lambda| d = |\lambda| \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} \overset{?}{\leq} \|y + \lambda x_0\|$$

για $\lambda = 0$: ισχύει

$|f(y)| = 0 \leq \|y + \lambda x_0\|$

για $\lambda \neq 0$

$$|f(y+\lambda x_0)| = |\lambda| d \leq |\lambda| \left\|x_0 + \frac{y}{\lambda}\right\|$$

(ισχύει διότι $-\frac{y}{\lambda} \in Y$, άρα $\left\|x + \frac{y}{\lambda}\right\| \geq d$)

$$\leq \|\lambda x_0 + y\|. \quad \forall \lambda \neq 0,\ \forall y \in Y$$

άρα $\|f\| \leq 1$

νδο $\|f\| = 1$:

$d = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\}$

άρα $\exists (y_n)$ στο Y: $\|x_0 - y_n\| \to d$

$\neq 0$ διότι $y_n \in Y$, $x_0 \notin Y$

$$\frac{x_0 - y_n}{\|x_0 - y_n\|} \in S_X$$

$$f\left(\qquad\right) = \frac{f(x_0 - y_n)}{\|x_0 - y_n\|} = \frac{d}{\|x_0 - y_n\|} \to 1$$

άρα $\|f\| \geq 1$

Οπότε έδειξα $\|f\| = 1$ οπότε από HB επεκτείνεται

σε $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, $\|\tilde{f}\| = 1$

με $\tilde{f}(Y) = \{0\}$, και $\tilde{f}(x_0) = d$ ∎

Προτ Αν X^* διαχ τοτε X διαχ

Αποδ Αφου X^* διαχ, η S_{X^*} ειναι διαχωρισιμη μ.χ

Εστω $\{f_1, f_2, \dots f_n \dots\} \subseteq S_{X^*}$ πυκνό

απο τον ορισμό της
$\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)| : x \in B_X\}$
$\forall n \; \exists x_n \in B_X : |f_n(x_n)| \geq 1/2$

ορίζω $Y = \text{span}\{x_1, x_2, \dots\}$.

ισχ $\overline{Y} = X$

Αποδ Αν οχι, $\exists f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ (δηλ. $f \in S_{X^*}$)
ώστε $f|_{\overline{Y}} = 0$
ειδικοτερα $f|_Y = 0$ οποτε $f(x_n) = 0 \; \forall n$

$\forall n$,
$\|f - f_n\| \geq |(f - f_n)(x_n)| = |f_n(x_n)| \geq 1/2 \quad \forall n$

δηλ $\|f - f_n\| \geq 1/2 \; \forall n$ ενω εχω υποθεση
$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό στη S_{X^*}
άτοπο

Αρα $\overline{Y} = X$ αρα ο X ειναι διαχωρισιμος
παιρνω $D = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \lambda_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$
αριθμήσιμο, $\overline{D} \supseteq \overline{\text{span}\{x_1, x_2 \dots\}}$
$= \overline{Y} = X$ ∎