Συναρτησιακή 22/02/2016

Θεώρ. Αν X γραμμ. χώρος $\dim X = d < \infty$
όλες οι νόρμες στο X είναι ισοδύναμες

Απόδ. Ο X έχει μια αλγεβρ. βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ (επιλέγω μία. Hamel:)

άρα $\forall x \in X \ \exists! \ \vec{\lambda} = (\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(d)) \in \mathbb{K}^d$ ώστε

$$x = \sum_{k=1}^{d} \lambda(k) e_k \quad \text{(μοναδικά)}$$

ορίζω $|||x||| := \sum_{k=1}^{d} |\lambda(k)|$ και εύκολα δείχνω είναι νόρμα στο X (άσκηση)

Από το Λήμμα, $\exists\, c > 0 : \forall x \in X$:

$$c \sum_{k=1}^{d} |\lambda_k| \le \Big\| \sum_{k=1}^{d} \lambda(k) e_k \Big\|$$

δηλ. $c\,|||x||| \le \|x\|$

επίσης $\big\| \sum \lambda(k) e_k \big\| \le \sum |\lambda_k| \big(\max_{1 \le k \le d} \|e_k\| \big)$

δηλ.

$\forall x \in X$

$$c\,|||x||| \le \|x\| \le M\,|||x||| \quad \text{όπου } M$$

δηλ. $|||\cdot||| \overset{\text{ισοδ}}{\sim} \|\ \|$

όποια $\forall$ νόρμα $\|\ \|$ στο X είναι ισοδύναμη με την $|||\ |||$
άρα όλες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες

Η ισοδυναμία νορμών είναι ισοδυναμία:

Πράγματι, • $\| \ \| \sim \| \ \|$ με $c = M = 1$

• Αν $\| \ \| \sim \| \ \|'$ με c, M

τότε $\| \ \|' \sim \| \ \|$ διότι

Έχω $c\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$

άρα $c'\|x\|' \leq \|x\| \leq M'\|x\|'$

πράγματι:

$\frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{c}\|x\|$

• Αν $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_2$ και $\| \ \|_2 \sim \| \ \|_3$

τότε $\| \ \|_1 \sim \| \ \|_3$

(στον πίνακα)

<u>Θεώρ</u> $(X, \|\ \|)$ είναι νορμ. διάστημα ανν B_X συμπ.
ανν κάθε κλ + φρ είναι συμπ.

<u>Απόδ</u> Αν X απειροδιάστατος, να βρω μια (x_n) στη B_X με $\|x_n - x_m\| \geq 1/7$ $\forall\, n \neq m$
οπότε αυτή δεν θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ξεκινάω από ένα τυχαίο x_1, $\|x_1\| = 1$
Ονομάζω $Y_1 = \text{span}\{x_1\}$: είναι κλειστός γρ υποχ.
(διότι $\dim Y_1 < +\infty$) και $\neq X$
οπότε από το λήμμα $\exists\, x_2$: $\|x_2\| = 1$
$d(x_2, Y_1) \geq 1/7$

Συνεχίζω epagogiquement

αν έχω $Y_n = \text{span}\{x_1 \cdots x_n\}$ όπου $\|x_k\| = 1$

και $\|x_k - x_j\| \geq 1/7$ $\forall\, k \neq j$

παρατηρώ ότι Y_n είναι κλειστός (διότι $\dim Y_n < +\infty$)
και $Y_n \neq X$ (επειδή $\dim X = +\infty$)

άρα από το λήμμα $\exists\, x_{n+1}$ με $\|x_{n+1}\| = 1$ ώστε

$$d(x_{n+1}, Y_n) \geq 1/7$$

$$\Rightarrow \|x_{n+1} - x_k\| \geq 1/7 \quad \forall\, k = \cdots n$$

ΟΚ
(γιατί τα προηγούμενα είχαν ήδη
απόσταση $\geq 1/7$ μεταξύ τους)

Ο δυικός ενός $(X, \| \|)$ νχ χώρο

Θυμίζω : $f : X \to \mathbb{K}$ γραμμική αν

$$f(x+y\lambda) = f(x) + \lambda f(y)$$

$$\forall x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$$

: γραμμική μορφή

γραμμικό συναρτησοειδές

συναρτησιακό

• Μα υπάρχουν τέτοιες ; ΝΑΙ, $f=0$

Άλλες ;

Ύπαρξη $\neq 0$ γραμμ. μορφών σε τυχόντα γραμμ.

χώρο χρειάζεται κάποια μορφή (αξ.) επιλογής.

Όμως, σε συγκεκριμένους (γνωστούς) χώρους,

πολλές μπορούμε να βρούμε γραμμ. μορφές:

πχ: $\ell^p = \{ (\lambda(n)) : \lambda(n) \in \mathbb{K} : \sum |\lambda(n)|^p < +\infty \}$

ορίζω
$$f_n : \ell^p \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\lambda(n)) \longrightarrow \lambda(n)$$
προφανώς γραμμ.

Έστω Ω συμπαγής χώρος $\quad C(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ συνεχής} \}$

τότε $\forall x \in \Omega$ μπορώ να ορίσω

$$\varphi_x : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$f \longmapsto \varphi_x(f) = f(x)$$