Ασκήσεις Ι

1. Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X, δείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. Έστω X χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

3. Δείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$\hat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}, \quad \mathrm{int}\left(\hat{B}(x,r)\right) = B(x,r) \;\text{ και }\; \partial\hat{B}(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r).$$

4. Έστω X πραγματικός χώρος με νόρμα.

(α) Αν $Y \subseteq X$ πυκνό στον X δείξτε ότι το $Y' = \{\frac{x}{\|x\|} : x \in Y, x \neq 0\}$ είναι πυκνό στην $S(0,1)$.

(β) Αν $D \subseteq S(0,1)$ πυκνό στην $S(0,1)$ δείξτε ότι το $D_1 = \{\lambda x : x \in D, \lambda \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό στον X.

(γ) Δείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν η μοναδιαία σφαίρα του είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (με την επαγόμενη μετρική).

5. (α) Δείξτε ότι, αν $1 \leq p < r \leq \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$ ισχύει

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

6. Έστω X χώρος με νόρμα, και Y ένας γραμμικός υπόχωρος του X. Δείξτε ότι αν $Y^\circ \neq \emptyset$, τότε $Y = X$.

7. Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Δείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞. Ποιά είναι η κλειστή θήκη του c_{00} μέσα στον ℓ_∞;

8. Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \leq 1\}$. Δείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.

Δείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.