Στοχαστικές ανελίξεις

Τελική εξέταση, 10 Ιουνίου 2016

Στα θέματα 5 και 6, B είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (15 Βαθμοί) Μια κάλπη περιέχει μια μαύρη και μια άσπρη μπάλα τη χρονική στιμή 0. Κάθε μια από τις χρονικές στιγμές 1, 2, 3, ... επιλέγουμε μια μπάλα ομοιόμορφα τυχαία από την κάλπη και την επιστρέφουμε μαζί με μία ακόμα του ίδιου χρώματος. Έστω M_n (αντίστοιχα A_n) το πλήθος των μαύρων (αντίστοιχα, άσπρων) μπαλών που έχουν προστεθεί στην κάλπη ως και μετά το πείραμα της χρονικής στιγμής n και $\mathcal{F}_n := \sigma(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ η πληροφορία για τη διαδικασία ως και τη χρονική στιγμή n. Να δειχθεί ότι για κάθε $t \in (0, 1)$, η ανέλιξη

$$X_n := \frac{(n+1)!}{M_n!(n-M_n)!}(1-t)^{M_n} t^{A_n}, n \geq 0$$

είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $(X_n)_{\geq 0}$ supermartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F})_{n\geq 0}$ για το οποίο υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ ώστε $X_n \geq C$ για κάθε n με πιθανότητα 1. Να δειχθεί ότι η $(X_n)_{\geq 0}$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 σε όριο Y για το οποίο ισχύει $\mathbf{E}|Y| < \infty$.

(β) Έστω $(X_n)_{\geq 0}$ ακολουθία μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F})_{n\geq 0}$, με $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ για κάθε n, και για την οποία υπάρχουν σταθερες $c_n \in [0, \infty)$ που ικανοποιούν την $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ και την

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \leq X_n + c_n$$

για κάθε n με πιθανότητα 1. Να δειχθεί ότι η $(X_n)_{\geq 0}$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 σε όριο Y για το οποίο ισχύει $\mathbf{E}|Y| < \infty$.

3. (20 Βαθμοί) Έστω κλαδωτή ανέλιξη $(Z_n)_{n\geq 0}$ με $Z_0 = 1$ και $X_{n,i}$ το πλήθος των παιδιών του i ατόμου της $n-1$ γεννιάς. Υποθέτουμε ότι καθεμία από τις $X_{n,i}$ έχει μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & \text{αν } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2 & \text{αν } \mu = 1. \end{cases}$$

(β) Για κάθε $n \geq 1$ να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(Z_{n+1}, Z_n)$.

(γ) Αν η $X_{1,1}$ έχει συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{P}(X_{1,1} = k) = (1-p)^k p$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots,$ όπου $p \in (0, 1)$ είναι δεδομένο, να υπολογιστεί η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού.

4. (20 Βαθμοί) Έστω G ένα τυχαίο γράφημα με κατανομή την $G(n, p)$ (Erdos-Renyi με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^+, p \in [0, 1]$) όπου $n \geq 3$.

(α) Ποιά είναι η πιθανότητα η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το 1 να είναι ακριβώς το σύνολο $\{1, 2, 3\}$;

(β) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα $f(p) := \mathbf{P}(1 \leftrightarrow 2 \text{ στο } G)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του p.

5. (15 Βαθμοί) Ποιες από τις παρακάτω ανελίξεις είναι και ποιες δεν είναι τυπικές κινήσεις Brown;

(α) $X_1(t) := \frac{1}{3} B_{3t}$.

(β) $X_2(t) := \frac{1}{2} B_{4t}$.

(γ) $X_3(t) := B_{2t} - B_t$.

(δ) $X_4(t) := -B_t$.

6. (15 Βαθμοί) Για κάθε $t > 0$ να δειχθεί ότι

$$\int_0^t e^{B_s}\, ds \stackrel{d}{=} t \int_0^1 e^{\sqrt{t} B_u}\, du$$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

2. (α) Η $(Y_n)_{n\geq 0}$ με $Y_n := X_n - C$, για κάθε $n \geq 0$ είναι μη αρνητικό supermartingale.
(β) Η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 0}$ με $Y_0 := X_0$, $Y_n := X_n - (c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1})$ για κάθε θετικό ακέραιο n είναι supermartingale φραγμένο κάτω από την σταθερά $C := -\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

3. (β) Γράφουμε τη συνδιακύμανση ως $\mathbf{E}(Z_{n+1}Z_n) - \mathbf{E}(Z_{n+1})\mathbf{E}(Z_n)$. Η πρώτη μέση τιμή ισούται με

$$\mathbf{E}(Z_{n+1}Z_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z_{n+1}Z_n \,|\, Z_n)) = \mathbf{E}(Z_n\mathbf{E}(Z_{n+1} \,|\, Z_n)) = \mu\mathbf{E}(Z_n^2).$$

Χρησιμοποιούμε το ότι $\mathbf{E}(Z_{n+1} \,|\, Z_n) = \mu Z_n$. Παίρνοντας μέση τιμη στην ίδια σχέση έχουμε $\mathbf{E}(Z_{n+1}) = \mu\mathbf{E}(Z_n)$. Άρα η ζητούμενη συνδιακύμανση ισούται με

$$\mu\{\mathbf{E}(Z_n^2) - \{\mathbf{E}(Z_n)\}^2\} = \mu\mathrm{Var}(Z_n).$$

Η διασπορά έχει υπολογιστεί στο ερώτημα (α).

4. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\{3p^2(1-p) + p^3\}(1-p)^{3(n-3)}.$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι οι πιθανότητα οι 3 κορυφές να συνδέονται μεταξύ τους. Π.χ. ο $p^2(1-p)$ είναι η πιθανότητα οι ακμές που συνδέουν την κορυφή 1 με τις 2 και 3 να περιέχεται στο γράφημα αλλά η ακμή που συνδέει τις 2 και 3 να μην περιέχεται (θεωρούμε εδώ την κατασκευή του $G(n, p)$ που ξεκινάει από το πλήρες γράφημα και κρατάει κάθε ακμή με πιθανότητα p). Ο p^3 είναι η πιθανότητα στο G να περιέχονται και οι τρεις ακμές που συνδέουν το 1 με το 2, το 2 με το 3, και το 1 με το 3. Ο παράγοντας $(1-p)^{3(n-3)}$ είναι η πιθανότητα καμία από τις υπόλοιπες $n-3$ κορυφές να μην συνδέεται με κάποια από τις $1, 2, 3$.

(β) Είναι το Παράδειγμα 48 (σελίδα 92) στις σημειώσεις του κ. Λουλάκη. Αλλά εκεί το p είναι η πιθανότητα *διαγραφής* κάθε ακμής ενώ στην δική μας περίπτωση p είναι η πιθανότητα *παραμονής* της κάθε ακμής .

5. (α) Κινήσεις Brown είναι μόνο οι (β) και (δ).

6.

$$\int_0^t e^{B_s}\, ds \overset{s=tu}{=} t\int_0^1 e^{B_{tu}}\, du = t\int_0^1 e^{\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t}}B_{tu}}\, du \overset{d}{=} t\int_0^1 e^{\sqrt{t}B_u}\, du.$$

Χρησιμοποιούμε το ότι το μονοπάτι $Z := (t^{-1/2}B_{tu})_{u\in[0,1]}$ έχει την ίδια κατανομή με το $W := (B_u)_{u\in[0,1]}$. Άρα $F(Z) \overset{d}{=} F(W)$ όπου $F : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to \mathbb{R}$ είναι η (μετρήσιμη) συνάρτηση

$$F(A) = t\int_0^1 e^{\sqrt{t}A_s}\, ds.$$