2 Πράξεις σε τοπολογικούς χώρους

2.1 **Η τοπολογία γινόμενο**

Σε προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε την τοπολογία γινόμενο στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ δύο τοπολογικών χώρων X, Y (παράδειγμα 1.33 (1)). Στην παρούσα παράγραφο θα ορίσουμε την τοπολογία γινόμενο ή καρτεσιανή τοπολογία για μια τυχούσα οικογένεια τοπολογικών χώρων $\{X_i : i \in I\}$. Πριν από αυτό πρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου για οποιοδήποτε οικογένεια συνόλων. Αυτή η επέκταση βασίζεται στην παρατήρηση ότι, αν $X_1, \dots, X_n$ είναι σύνολα τότε τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $X_1 \times \dots \times X_n$ δηλαδή οι $n-$ άδες $(x_1, \dots x_n)$ με $x_k \in X_k, 1 \le k \le n$ μπορούν να θεωρηθούν ως εκείνες οι συναρτήσεις $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \bigcup_{k=1}^{n} X_k$, ώστε $f(k) \in X_k$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός 2.1 Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια συνόλων. Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} : f(i) \in X_i$, για κάθε $i \in I$.

Αν $X_i = X$ για κάθε $i \in I$, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\prod\{X_i : i \in I\}$ συμβολίζεται με X^I (= το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : I \to X$).

Οι συμβολισμοί $\prod_{i \in I} X_i$ και $\prod\{X_i : i \in I\}$ είναι ταυτόσημοι. Ένα στοιχείο $f \in \prod_{i \in I} X_i$, γενικά γράφεται $(x_i)_{i \in I}$ ή (x_i) και αυτό σημαίνει ότι, $f(i) = x_i$, για κάθε $i \in I$.

Με αυτόν τον συμβολισμό $x_j \in X_j$, ονομάζεται η j - συντεταγμένη του στοιχείου (x_i). Το σύνολο X_j καλείται ο j - παράγων του $\prod_{i \in I} X_i$. Για κάθε $j \in I$ η απεικόνιση $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j : \pi_j((x_i)) = x_j$ (δηλαδή η απεικόνιση $f \to f(j)$ ονομάζεται η προβολή στην j - συντεταγμένη.

Ακολούθως διατυπώνουμε το αξίωμα επιλογής.

<u>Πρόταση</u> 2.2 Έστω $\{X_i : i \in I\}$ μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Δηλαδή, $I \neq \emptyset$ και $X_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I \Rightarrow \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

<u>Παρατήρηση</u> 2.3 Αν $I = \emptyset$ ή $X_i = \emptyset$ για κάποιο $i \in I$ τότε $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$. Έτσι στην συνέχεια θα θεωρούμε πάντοτε (και χωρίς ρητά να το αναφέρουμε) μη κενές οικογένειες μη κενών συνόλων ή τοπολογικών χώρων.

<u>Παραδείγματα</u> 2.4. 1) Το σύνολο (διανυσματικός χώρος με πράξεις κατά σημείο) των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

$$R^N = \{(x_n) : x_n \in R, \forall n \in N\}$$

Καθώς επίσης και ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών μιγαδικών αριθμών

$$C^N = \{(z_n) : z_n \in C, \forall n \in N\}.$$

2) Περισσότερο γενικά, αν $\Gamma \neq \emptyset$ σύνολο τότε ο R^Γ είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των συναρτήσεων $f : \Gamma \to R$. (Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος C^Γ.)

3) Τα σύνολα $N^N, \{0,1\}^N$ και $\prod_{n=1}^{\infty}[-n,n]$ είναι αντιστοίχως το σύνολο όλων των ακολουθιών με τιμές στο N, το σύνολο όλων των ακολουθιών με τιμές στο $\{0,1\}$ και το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών (x_n) με $|x_n| \leq n$ για κάθε $n \in N$.

Στην επόμενη πρόταση συνοψίζονται κάποιες απλές και χρήσιμες ιδιότητες του Καρτεσιανού γινομένου καθώς και των προβολών $\pi_i, i \in I$.

<u>Πρόταση</u> 2.5 . Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια συνόλων . Για κάθε $i \in I$ έστω A_i, B_i υποσύνολα του X_i. Τότε :

(α) Αν $A_i \subseteq B_i$, για κάθε $i \in I$ τότε $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$.

(β) $\prod_{i\in I} A_i \cap \prod_{i\in I} B_i = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$

(γ) $\prod_{i\in I} A_i \cup \prod_{i\in I} B_i \subseteq \prod_{i\in I}(A_i \cup B_i)$

(δ) Αν $F \subseteq I$, ορίζουμε $\prod_{i\in F} A_i \times \prod_{i\in I\setminus F} X_i$ να είναι το σύνολο όλων των $(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i$ ώστε $x_i \in A_i$ για κάθε $i \in F$. Τότε

$$\prod_{i\in F} A_i \times \prod_{i\in I\setminus F} X_i = \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(A_i).$$

Ειδικότερα , $\qquad A_j \times \prod_{i\neq j} X_i = \pi_j^{-1}(A_j)$ για κάθε $j \in I$.

<u>Απόδειξη.</u> Καθώς οι ισχυρισμοί (α), (β), (γ) είναι απλοί αποδεικνύουμε μόνο τον (δ).

$$x = (x_i) \in \prod_{i\in F} A_i \times \prod_{i\in I\setminus F} X_i \Leftrightarrow x = (x_i) \text{ με } x_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in F$$

$$\Leftrightarrow x = (x_i) \text{ με } \pi_i(x) \in A_i \text{ για κάθε } i \in F$$

$$\Leftrightarrow x = (x_i) \text{ με } x \in \pi_i^{-1}(A_i) \text{ για κάθε } i \in F$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in F} \pi_i^{-1}(A_i).$$

<u>Ορισμός</u> 2.6 Έστω $(X_i, \tau_i), i \in I$, οικογένεια τοπολογικών χώρων . Η τοπολογία γινόμενο ή καρτεσιανή τοπολογία τ επί του καρτεσιανού γινομένου $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι εκείνη η οποία έχει σαν βάση την οικογένεια,

$$B = \left\{ \prod_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } \{i \in I : U_i \neq X_i\} \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

$$= \left\{ \prod_{i\in F} U_i \times \prod_{i\in I\setminus F} X_i : U_i \in \tau_i \text{ για κάθε } i \in F \text{ και } F \subseteq I \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

Είναι σαφές ότι (χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.5) η B ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της πρότασης 1.32 και έτσι είναι πράγματι μια βάση για μια (μοναδική) τοπολογία στον X .

Παρατηρήσεις 2.7 .1) Αν B_i είναι βάση στον τοπολογικό χώρο X_i, για κάθε $i \in I$, τότε η οικογένεια $B_1 = \left\{ \prod_{i\in I} U_i : U_i \in B_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } \{ i \in I : U_i \neq X_i \} \text{ πεπερασμένο} \right\}$ είναι και αυτή μια βάση για την τ (γιατί;)

2) Το σύνολο $\Sigma = \left\{ \pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i \right\}$ είναι υποβάση της τοπολογίας τ . (Κάθε μέλος της βάσης B της τ είναι ίσο, σύμφωνα με την πρόταση 2.5 (δ) , με μία πεπερασμένη τομή μελών της Σ .)

3) Αν θέσουμε $B' = \left\{ \prod_{i\in I} U_i : U_i \in \tau_i \text{ για κάθε } i \in I \right\}$, τότε $B \subseteq B'$ και (εύκολα αποδεικνύεται ότι) η B' αποτελεί βάση για κάποια τοπολογία του $\prod_{i\in I} X_i$. Η τοπολογία αυτή είναι γενικά λεπτότερη της τοπολογίας γινόμενο (αν το I είναι πεπερασμένο τότε προφανώς ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο) και ονομάζεται box τοπολογία. Η box τοπολογία δεν είναι δεν είναι τόσο σημαντική όσο η τοπολογία γινόμενο και δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα σε αυτές τις σημειώσεις. Στην συνέχεια , οποτεδήποτε θεωρούμε ένα καρτεσιανό γινόμενο τοπολογικών χώρων , θα υποθέτομε πάντοτε ότι είναι εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο, εκτός και αν ρητά αναφέρουμε κάτι διαφορετικό.

Ορισμός 2.8 . Έστω X, Y τ.χ. και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Η f λέγεται ανοικτή

(αντιστοίχως κλειστή) αν για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό (αντιστοίχως $F \subseteq X$ κλειστό) έπεται ότι το $f(U)$ (αντιστοίχως το $f(F)$) είναι ανοικτό (αντιστοίχως κλειστό) στον Y .

<u>Πρόταση</u> 2.9. Η προβολή $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ είναι συνεχής και ανοικτή απεικόνιση, για κάθε $j \in J$. Εν γένει δεν είναι κλειστή.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $U \subseteq X_j$ ανοικτό, τότε το $\pi_j^{-1}(U) = U \times \prod_{i \neq j} X_i$ είναι ανοικτό στον χώρο $\prod_{i \neq j} X_i$, συνεπώς η π_j είναι συνεχής.

Έστω $U \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ ανοικτό. Τότε το U γράφεται ως ένωση βασικών ανοικτών έστω $U = \bigcup_{a \in A} V_a \Rightarrow \pi(U) = \bigcup_{a \in A} \pi_j(V_a)$. Έτσι αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $V \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ βασικό ανοικτό τότε $\pi(V)$ ανοικτό στον X_j. Συνεπώς η π_j είναι ανοικτή.

Μια προβολή δεν είναι αναγκαία κλειστή απεικόνιση . Πράγματι, το σύνολο $F = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\}$ είναι κλειστό στον R^2 (γιατί;), όμως $\pi_1(F) = (0, +\infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του R.

<u>Πρόταση</u> 2.10 . (α) Η τοπολογία γινόμενο τ είναι η μικρότερη τοπολογία ώστε κάθε προβολή π_j να είναι συνεχής.

(β) Αν X τ.χ. τότε μια συνάρτηση $f : X \to \prod_{i \in I} X_i$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η $\pi_j o f$, είναι συνεχής για κάθε $j \in J$.

(Αν θέσουμε, $f_j = \pi_j o f$, $j \in I$, τότε η f δίνεται από την εξίσωση

$$f(x) = \left(f_j(x) \right)_{j \in I} .)$$

Απόδειξη

(α) έστω τ_1 μια τοπολογία στον $\prod_{i\in I} X_i$ ώστε κάθε προβολή $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ να είναι συνεχής . Τότε για κάθε $j \in I$ και για κάθε $U \subseteq X_j$ ανοικτό το $\pi_j^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον χώρο $\left(\prod_{i\in I} X_i, \tau_1\right)$. Δηλαδή η τ_1 περιέχει όλα τα μέλη της υποβάσης Σ της τοπολογίας γινόμενο που περιγράψαμε στην παρατήρησης 2.7 (2), και άρα $\tau \subseteq \tau_1$.

(β) $''\Rightarrow''$ Αν f συνεχής τότε από την πρόταση 2.9 έχουμε το συμπέρασμα αφού η $fo\pi_i$ είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

$''\Leftarrow''$ Έστω $U \times \prod_{i\neq j} X_i$ τυχόν ανοικτό υποβασικό ($U \subseteq X_j$ ανοικτό). Τότε , $f^{-1}\left(U \times \prod_{i\neq j} X_i\right) = f^{-1}\left(\pi_j^{-1}(U)\right) = \left(\pi_j of\right)^{-1}(U)$, ανοικτό στον X από την υπόθεσή μας για τις συναρτήσεις $\pi_j of$, για $j \in I$. Έτσι η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποβασικά του χώρου $\prod_{i\in I} X_i$ σε ανοικτά υποσύνολα του X και άρα είναι συνεχής.

Παρατηρήσεις 2.11. 1) Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τ.χ. και για κάθε $i \in I$, έστω A_i υπόχωρος του X_i. Τότε η τοπολογία γινόμενο του $\prod_{i\in I} A_i$ συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία του $\prod_{i\in I} A_i$ η οποία επάγεται από την τοπολογία γινόμενο του $\prod_{i\in I} X_i$.

(Γιατί;).

2) Υπενθυμίζουμε ότι: Αν X τ.χ. (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ τότε, $x_n \to x \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $n_0 \in N : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U$.

Σημειώνουμε ότι: Αν X και Y τ.χ. και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. (Γιατί;)

<u>Πρόταση</u> 2.12 Έστω $\{X_i, i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων (x_n) ακολουθία στον $\prod_{i \in I} X_i$ και $x \in \prod_{i \in I} X_i$. Έστω ότι $x_n = (x_i^n)_{i \in I}$ και $x = (x_i)_{i \in I}$. Τότε, $x_n \to x \Leftrightarrow$ για κάθε $i \in I$, $x_i^n \to x_i$. Δηλαδή $x_n \to x$ αν και μόνο αν η (x_n) συγκλίνει κατά συντεταγμένες στο x.

<u>Απόδειξη .</u>$''\Rightarrow''$ Οι προβολές π_i είναι συνεχείς έτσι το συμπέρασμα έπεται από την πρόταση 2.10 σε συνδυασμό με την παρατήρηση 2.11 (2)

$''\Leftarrow''$ Έστω $U = \prod_{i \in F} V_i \times \prod_{i \in I \setminus F} X_i$ βασική περιοχή του x, τότε $x_i \in V_i$ για κάθε $i \in F$.

Από την υπόθεσή μας έπεται ότι, για κάθε $i \in F$ υπάρχει $\nu_i \in N : n \geq \nu_i \Rightarrow x_i^n \in V_i$. Επειδή το F είναι πεπερασμένο υπάρχει το $\nu_0 = \max\{\nu_i : i \in F\}$. Έτσι αν $n \geq \nu_0 \Rightarrow x_n \in U$. Κατά συνέπεια $x_n \to x$.

<u>Παραδείγματα </u>2.13. 1) Μια βάση για την τοπολογία γινόμενο του διανυσματικού χώρου R^N αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \times R^{N \setminus \{1,2,\ldots,n\}}$$

όπου $n \in N$ και $U_1, \ldots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του R.

Μία άλλη βάση για την ίδια τοπολογία του R^N συνιστούν τα σύνολα της μορφής

$$(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \times R^{N \setminus \{1,2,\ldots,n\}}$$

Όπου $n \in N$ και $a_k < b_k$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.

2) Ένα γενικότερο παράδειγμα του προηγουμένου είναι ο διανυσματικός χώρος R^Γ (όπου $\Gamma \neq \varnothing$ σύνολο) όλων των συναρτήσεων $f : \Gamma \to R$. Μία βάση για την τοπολογία γινόμενο τ του R^Γ είναι τα σύνολα της μορφής

$$U_{\gamma_1} \times \ldots \times U_{\gamma_n} \times R^{\Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}}$$

Όπου $n \in N$, $\gamma_1,....,\gamma_n \in \Gamma$ και $U_{\gamma_1},...,U_{\gamma_n}$ ανοικτά στον R. Τα U_γ μπορούν να αντικατασταθούν βέβαια όπως και πριν από ανοικτά διαστήματα του R. Ανάλογα ισχύουν και για την τοπολογία γινόμενο του χώρου C^Γ των μιγαδικών συναρτήσεων $f:\Gamma \to C$.

Παρατηρούμε ότι, αν $f_n:\Gamma \to R$, $n \geq 1$ είναι ακολουθία συναρτήσεων και $f:\Gamma \to R$ συνάρτηση τότε όπως προκύπτει από την πρόταση 2.12 $f_n \xrightarrow{\tau} f \Leftrightarrow$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, $f_n(\gamma) \to f(\gamma)$. Δηλαδή η $f_n \to f$ κατά σημείο επί του Γ.

3) Σημαντικοί υπόχωροι του R^N είναι ο κύβος του Hilbert $[0,1]^N$, ο χώρος του Baire N^N και το σύνολο ,Cantor $\{0,1\}^N$. Σημαντικοί υπόχωροι του R^Γ (με Γ υπεραριθμήσιμο) είναι ο κύβος $[0,1]^\Gamma$ και το γενικευμένο σύνολο Cantor $\{0,1\}^\Gamma$. Αν το σύνολο Γ είναι πεπερασμένο και $\Gamma = n$, τότε ο R^Γ ταυτίζεται με τον R^n και η τοπολογία γινόμενο του R^n είναι ίση με την ευκλείδεια τοπολογία. Το γεγονός ότι οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν είναι φανερό γεωμετρικά όταν $n=2$ ή 3 (πρβλ. παράδειγμα 1.31 (4).) Για την γενική περίπτωση παραπέμπουμε στην παρατήρηση 2.20 (6) καθώς και στην άσκηση 6.

4) Έστω $g_n : R \to R, n \geq 1$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων . Είναι τότε προφανής συνέπεια της πρότασης 2.10 (β) ότι η συνάρτηση

$$g : R \to R^N : g(t) = \left(g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t), ...\right), t \in R$$

Είναι συνεχής . Έπεται για παράδειγμα οι συναρτήσεις $g(t) = (t,t,...,t,...)$, $f(t) = (t, t^2, ..., t^n, ...)$, $h(t) = \left(t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, ...\right)$ και $\varphi(t) = (1, 2, e^t, \cos t, 1, 1, ..., 1, ...)$ είναι συνεχείς.