Διάλεξη 37

1

Παράδειγμα

Έστω $X=(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. $Be(p)$, $0<p<1$.

(α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση σκορ $S_X(p)$ και να επαληθευτεί ότι $E_p(S_X(p))=0$, $\forall p\in(0,1)$

(β) Να υπολογιστεί το μ.π. Fisher $I_n(p)$.

Λύση

(α) $$S_X(p)=\sum_{i=1}^{n} S_{X_i}(p). \quad (*)$$

$$S_{X_i}(p)=\frac{d}{dp}\log f_p(X_i), \quad \forall\, 1\le i\le n.$$

②

Όμως $f_p(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \Rightarrow$

$$\log f_p(x_i) = x_i \log p + (1-x_i)\log(1-p) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dp}\log f_p(x_i) = \frac{x_i}{p} - \frac{1-x_i}{1-p}.$$

Τελικά $\boxed{S_{x_i}(p) = \frac{x_i}{p} - \frac{1-x_i}{1-p}}$ (**) $\Longrightarrow$

$$\boxed{S_x(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}} \quad (***)$$

Άρα έχουμε.

$$E\left[S_x(p)\right] \overset{\text{γενικά}}{=} E\left[\sum_{i=1}^{n} S_{x_i}(p)\right] \overset{\text{ισον.}}{=} n\, E_p\left[S_{x_1}(p)\right]$$

$$E_p\left(S_{X_1}(p)\right) = E\left[\frac{X_1}{p} - \frac{1-X_1}{1-p}\right]$$

$$= \frac{\overbrace{E_p(X_1)}^{=p}}{p} - \frac{1-\overbrace{E_p(X_1)}^{=p}}{1-p} = 1-1=0$$

Τελικά $E_p\left[S_x(p)\right] = 0$.

(β) $I_n(p) = n\, I_1(p)$ και

$$I_1(p) = V_p\left[S_{X_1}(p)\right]$$

$$S_{X_1}(p) = \frac{X_1}{p} - \frac{1-X_1}{1-p} = \frac{(1-p)X_1 - p(1-X_1)}{p(1-p)}$$

$$= \frac{X_1 - \cancel{pX_1} + \cancel{pX_1} - p}{p(1-p)} = \frac{X_1}{p(1-p)} - \frac{1}{1-p}.$$

4

$$\Rightarrow I_1(p) = V_p\left[\frac{X_1}{p(1-p)} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{V_p(X_1)}{p^2(1-p)^2} = \frac{p(1-p)}{p^2(1-p)^2} = \frac{1}{p(1-p)}$$

και $\boxed{I_n(p) = n I_1(p) = \frac{n}{p(1-p)}}$.

Παρατήρηση

Η ε.μ.π. του p είναι ο δ.μ. $\overline{X}$ και

$$V_p(\overline{X}) = \frac{V_p(X_1)}{n} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{1}{I_n(p)}.$$

Όπως θα δούμε σε λίγο, το $I_n^{-1}(p)$ είναι και η μικρότερη δυνατή διασπορά που μπορεί να έχει μία α.ε. του p [κάτω φράγμα διασποράς].

Άρα εδώ ο δ.μ. $\overline{X}$, επειδή "πετυχαίνει" το κάτω φράγμα διασποράς είναι α.ε.ε.δ. του p.

Πρόταση

Αν ισχύουν οι Σ.Ο., η $f_\theta(x)$ είναι 2 φορές συνεχώς διαφορίσιμη και επιτρέπεται η εναλλαγή ολοκλήρωσης και διαφόρισης, τότε

$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\ell_X(\theta)\right] = -E_\theta\left[\frac{d}{d\theta}S_X(\theta)\right].$$

Απόδειξη

"Έχουμε $E_\theta\left[S_X(\theta)\right] = 0 \quad , \forall \theta \in \Theta$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} E_\theta\left[S_X(\theta)\right] = 0 \quad , \forall \theta \in \Theta .$$

Πρβλ.: $g_X(\theta) = S_X(\theta)$.

$$\Longrightarrow E_\theta\left[\frac{d}{d\theta} S_X(\theta)\right] + E_\theta\left[\underbrace{S_X(\theta)\cdot S_X(\theta)}_{I(\theta)}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow I(\theta) = E_\theta\left(S_X^2(\theta)\right) = -E_\theta\left[\frac{d}{d\theta} S_X(\theta)\right]$$

$$= -E_\theta\left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ell_X(\theta)\right].$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

όπως πριν στο π.δ. $\mathcal{B}e(p)$, είχαμε δείξει

$$S_{X_1}(p) = \frac{X_1}{p} - \frac{1-X_1}{1-p} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dp} S_{X_1}(p) = -\frac{X_1}{p^2} - \frac{1-X_1}{(1-p)^2} \Rightarrow$$

$$I_1(p) = E_p\left[-\frac{d}{dp} S_{X_1}(p)\right] = \frac{\overset{=p}{E_p(X_1)}}{p^2} + \frac{1-\overset{=p}{E_p(X_1)}}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}. \ \ldots$$

Πρόταση

Αν $X=(X_1,\dots,X_n)$ τ.δ. από μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ. με

$$f_\theta(x) = e^{\varphi(\theta)T(x)-\beta(\theta)}\, h(x), \ \forall x \in S_f$$

και $\varphi(\theta)$ συνεχώς διαφορίσιμη με $\varphi'(\theta)\neq 0, \ \forall \theta \in \Theta$,

Τότε ισχύουν οι Σ.Ο. και

$$\boxed{I(\theta) = (\varphi'(\theta))^2\, V_\theta[T(X)]}$$

Απόδειξη ("το "λογιστικό" κομμάτι).

Παραλείπεται η ισχύς των Σ.Ο. και αναζητούμε το $I(\theta)$.

$$\ell_X(\theta) = \varphi(\theta)\,T(X) - B(\theta) + \log(h(X))$$

$$\Rightarrow S_X(\theta) = \frac{d}{d\theta}\ell_X(\theta) = \varphi'(\theta)\,T(X) - B'(\theta) \quad (\rightarrow \text{σταθερά κανονικ.}) \ldots$$

$$\Rightarrow I_X(\theta) = V_\theta\left[S_X(\theta)\right] = (\varphi'(\theta))^2\, V_\theta\left[T(X)\right] \quad \checkmark$$

Σύνδεση σκορ + μ.π.-F με αναπαραμέτρηση.

Αν l_X είναι η λογαριθμοπιθανοφάνεια:

$$\underbrace{\frac{dl_X}{d\theta} = \frac{dl_X}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{d\theta} \quad \text{ή} \quad \frac{dl_X}{d\phi} = \frac{dl_X}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\phi}}.$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{S_X(\theta) = S_X(\underbrace{\varphi(\theta)}_{\phi})\cdot\varphi'(\theta)}$$

$$\left(\frac{dl_X}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dl_X}{d\phi}\right)^2\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2 \overset{E(\cdot)}{\Longrightarrow} \boxed{I(\theta) = I(\underbrace{\varphi(\theta)}_{\phi})\cdot(\varphi'(\theta))^2}.$$

<u>Εφαρμογή</u> Ε.Ο.Γ. $\phi = \varphi(\theta)$.

$\Longrightarrow I(\phi) = V_\phi(T(X))$

Κάτω Φράγμα Διασποράς — Ανισότητα Cramer–Rao

(ανισότητα πληροφορίας).

Μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο (έμμεσο) εύρεσης α.ε.ε.δ. με το κ.φ.-διασποράς.

Θεώρημα

Έστω $T(X)$ μια σ.σ. με $V_\theta[T(X)] < +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$.

Αν ισχύουν οι Σ.Ο. & επιπλέον

$$0 < I(\theta) < +\infty \quad , \forall \theta \in \Theta \quad , \text{τότε}$$

(α) η $\mu(\theta) := E_\theta[T(X)]$ είναι παραγωγίσιμη

(β) $\boxed{V_\theta[T(X)] \geq \left(\mu'(\theta)\right)^2 / I(\theta) \quad , \forall \theta \in \Theta .}$

Απόδειξη

(α) Κατ' αρχάς θ.δ.ο. $E_\theta\left|T(X)S_X(\theta)\right| < +\infty$,

$\forall \theta \in \Theta \Longrightarrow$.

$\exists$ η μέση τιμή $E_\theta\left(T(X)S'_X(\theta)\right)$, $\forall \theta \in \Theta$.

Θα θυμηθούμε μία βασική ανισότητα από τις Πιθαν.

[Cauchy-Schwartz για τ.μ.].

$$E|XY| \le \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

$$\Downarrow$$

$$|Cov(X,Y)| \le \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$$

13

προηγ. $\Rightarrow E_\theta|T(X)S_X(\theta)| \leq \sqrt{E_\theta(T^2(X))} \cdot \sqrt{E_\theta(S_X^2(\theta))}$, $\forall \sigma\iota\ \theta$.

$$\left.\begin{array}{l} V_\theta(T(X)) < +\infty \Rightarrow E_\theta(T^2(X)) < +\infty, \ \forall \theta \in \Theta \\ I(\theta) = E[S_X^2(\theta)] < +\infty, \quad \forall \theta \in \Theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$E_\theta|T(X)S_X(\theta)| < +\infty \Rightarrow \exists\ E_\theta[T(X)S_X(\theta)]\ \forall \theta$.

Από τις συνθήκες ομαλότητας, θα συμπεράναμε ότι $\exists\ \mu'(\theta)$, $\forall \theta$, και

$$\frac{d}{d\theta}\mu(\theta) = \frac{d}{d\theta}E_\theta[T(X)] = E_\theta[T(X) \cdot S_X(\theta)]$$

(β) Έχουμε $E_\theta(S_{\underline{X}}(\theta))=0$.

$$\mu'(\theta) = E_\theta\left[T(X)S_X(\theta)\right] = Cov_\theta\left[T(X), S_X(\theta)\right].$$

$$\Rightarrow (\mu'(\theta))^2 = Cov^2(T(X), S_X(\theta)) \leq V_\theta[T(X)]\,V_\theta[S_X(\theta)]$$

$$\Rightarrow V_\theta[T(X)] \geq \frac{(\mu'(\theta))^2}{V[S_X(\theta)]} = \frac{(\mu'(\theta))^2}{I(\theta)}. \checkmark$$

Παρατήρηση

Η ποσότητα $\boxed{\dfrac{(\mu'(\theta))^2}{I(\theta)}}$ λέγεται κάτω φράγμα Cramer-Rao $\boxed{\text{κ.φ.}-CR}$

Πορίσματα

Αν ισχύουν οι υποθέσεις CR, τότε

(i) αν T είναι εκτιμήτρια του $g(\theta)$ και $g(\theta)$ παραγωγ(ίσιμη)

τότε $$V_\theta(T) \geq \frac{\left(g'(\theta) + b_T'(\theta)\right)^2}{I(\theta)}, \quad \underline{\forall \theta}$$

$$\left[\ \mu(\theta) = g(\theta) + \underbrace{(\mu(\theta) - g(\theta))}_{\underbrace{E(T(X)) - g(\theta)}_{b_T(\theta).}}\right.$$

(ii) αν T είναι α.ε. του $g(\theta)$, τότε.

$$V_\theta(T) \geq \frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{I(\theta)}, \quad \underline{\forall \theta}$$

(iii) αν $g(\theta) = \theta$, και T είναι α.ε. του θ, τότε.

$$V_\theta(T) \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad \left(\text{όπου } I(\theta) = I_n(\theta)\right), \quad \overset{=}{} n I_1(\theta)$$

Άμεση Εφαρμογή

π.χ. στο τ.δ. $Be(p)$ είχαμε

ότι $\overline{X}$ είναι α.ε. του p. $(g(p)=p)$

Το μ.π.-F είναι $I(p)=\dfrac{n}{p(1-p)}$ $(n\,I_1(p))$.

Παρατ. ότι $V_p(\overline{X})=\dfrac{p(1-p)}{n}$ και

συμπεραίνουμε $V_p(\overline{X})=\dfrac{1}{I(p)}$ και άρα

από κ.φ.-CR συμπεραίναμε ο δ.μ. $\overline{X}$ είναι α.ε.ε.δ. του p.