ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Το παρόν έγγραφο περιλαμβάνει λυμένες ασκήσεις που αντικατοπτρίζουν την ύλη του προπτυχιακού μαθήματος «Μαθηματική Στατιστική» του τμήματος Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Οι ασκήσεις προέρχονται από τις σημειώσεις των διδασκόντων του μαθήματος.

Το παρόν έγγραφο συντάχθηκε από το διδακτορικό φοιτητή Ιωάννη Οικονομίδη για τις ανάγκες των μαθημάτων ενισχυτικής διδασκαλίας στο πλαίσιο της Πράξης με τίτλο «Υποστήριξη των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων των ΑΕΙ με την ενσωμάτωση ενισχυτικής διδασκαλίας επιπρόσθετα των κυρίων διαλέξεων για το ακαδημαϊκό έτος 2021-2022».

Αθήνα,

Εαρινό Εξάμηνο 2022

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

ΣΗΜΕΙΟΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

Άσκηση 1: Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0,$$

με παράμετρο $\lambda \in \Theta = (0, +\infty)$.

i. Να δειχθεί ότι η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.
ii. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης σ.σ. για το λ.
iii. Να βρεθεί η $E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$ και η $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)$.
iv. Να βρεθεί η ΕΡ (εκτιμήτρια ροπών) του λ.
v. Να βρεθεί η ΕΜΠ (εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας) του $\lambda^3 + 1$.
vi. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. (αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς) του λ.
vii. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\lambda}$.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Η κατανομή που δίνεται στο πρόβλημα είναι η $Exp(\lambda)$, όπου λ παράμετρος ρυθμού.

Α' τρόπος: Συνάρτηση πυκνότητας μίας παρατήρησης

Αρχικά, το στήριγμα $S_{X_i} = [0, +\infty)$ είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου. Θα δείξω ότι μία παρατήρηση ανήκει στην ΕΟΚ. Γράφουμε την κατανομή στη μορφή της ΕΟΚ:

$$f(x_i;\theta) = e^{-B(\theta)+\eta(\theta)T(x_i)+H(x_i)}, \qquad x_i \in S.$$

Έχουμε

$$f(x;\lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x} = e^{\log\lambda - \lambda x},$$

δηλαδή

$$T(X_i) = X_i, \qquad \eta(\lambda) = -\lambda, \qquad B(\lambda) = -\log\lambda, \qquad H(X_i) = 0.$$

Άρα η κατανομή μίας παρατήρησης ανήκει στην ΕΟΚ. Από γνωστό θεώρημα, η από κοινού κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ και έχουμε

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, B(\lambda) = -n\log\lambda$$

Β' τρόπος: Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

Αρχικά, το στήριγμα της από κοινού κατανομής του δείγματος είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου,

$$S = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times \dots \times [0, +\infty) = [0, +\infty)^n.$$

Θα δείξουμε ότι η από κοινού κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

$$f(x;\lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n\,;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda x_1} \cdot e^{-\lambda x_2} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda x_n}$$
$$= \lambda^n e^{-\lambda x_1 - \lambda x_2 - \dots - \lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Γράφουμε την κατανομή στη μορφή της ΕΟΚ:

$$f(x_i;\theta) = e^{-B(\theta)+\eta(\theta)T(x_i)+H(x_i)}, \qquad x_i \in S.$$

Έχουμε

$$f(x;\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = e^{\log \lambda^n - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} = e^{n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

δηλαδή

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad \eta(\lambda) = -\lambda, \qquad B(\lambda) = -n\log\lambda, \qquad H(X) = 0.$$

Άρα η από κοινού κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

Ερώτημα ii.

Από γνωστό θεώρημα, επειδή η από κοινού κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ, η $T(X)$ είναι επαρκής για το λ.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για να είναι πλήρης, πρέπει να δείξουμε ότι

- $\eta(\Theta) = (-\infty, 0)$, περιέχει ανοιχτό, μη κενό, υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
- $d = g = 1$, όπου d η διάσταση της $T(X)$, g η διάσταση της $\eta(\lambda)$.

Άρα, η $T(X)$ είναι επιπλέον πλήρης σ.σ. για το λ.

Ερώτημα iii

Παρατηρούμε ότι $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Θα φέρουμε την σ.π.π. στην κανονική μορφή της ΕΟΚ, δηλαδή στη μορφή

$$f(x_i;\eta) = e^{-A(\eta)+\eta T(x_i)+H(x_i)}, \qquad x_i \in S.$$

Από το ερώτημα i. έχουμε ότι

$$f(x;\lambda) = e^{n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}, x \geq 0.$$

Κάνουμε την αναπαραμετροποίηση $\eta = -\lambda$ και παίρνουμε

$$f(x;\eta) = e^{n \log(-\eta) + \eta \sum_{i=1}^{n} X_i}, x \geq 0.$$

Δηλαδή $A(\eta) = -n \log(-\eta)$. Επομένως έχουμε ότι

$$E\big(T(X)\big) = \frac{dA(\eta)}{d\eta} = -\frac{n}{\eta} = \frac{n}{\lambda}.$$

$$Var\big(T(X)\big) = \frac{d^2A(\eta)}{d\eta^2} = \frac{n}{\eta^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Ερώτημα iv

Εάν γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της $X \sim Exp(\lambda)$, όπου λ παράμετρος ρυθμού, είναι $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε. Αν όχι, πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της κατανομής.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\, f(x,\lambda)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x\, e^{-\lambda x}dx$$

Κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\left(x\, e^{-\lambda x}\right)' = 1 \cdot e^{-\lambda x} + xe^{-\lambda x} \cdot (-\lambda x)' = e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} \Rightarrow \lambda x e^{-\lambda x} = -\left(x\, e^{-\lambda x}\right)' + e^{-\lambda x}$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \lambda x\, e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} \left(x\, e^{-\lambda x}\right)' dx + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = -\left[x\, e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Επομένως έχουμε $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Θα βρούμε την εκτιμήτρια ροπών.

$$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Προσοχή! Η σχέση $E(X) = \overline{X}$ δεν είναι ταυτότητα, δεν ισχύει δηλαδή γενικά. Είναι μία εξίσωση που λύνω για να πάρω μία εκτίμηση για την παράμετρο. Τι ισχύει πραγματικά;

Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών: Έστω ένα δείγμα από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $E(X_1) < +\infty$. Τότε:

$$\overline{X_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} E(X), \quad \text{δηλαδή} \quad P\left(\overline{X_n} \to E(X)\right) = 1.$$

Ερώτημα v.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n\,; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\lambda) = \log L(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Παραγωγίζουμε την $\ell(\lambda)$ και βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda_0)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\lambda_0} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά την $\ell(\lambda)$:

$$\frac{\partial^2 \ell(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0.$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο λ_0 είναι σημείο μεγίστου. Επομένως η ΕΜΠ του λ είναι

$$\hat{\lambda} = \lambda_0 = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Αναζητάμε όμως την ΕΜΠ του $\lambda^3 + 1$. Από το αναλλοίωτο της ΕΜΠ για την $g(x) = x^3 + 1$ έχουμε ότι

$$\widehat{\lambda^3 + 1} = \widehat{g(\lambda)} = g(\hat{\lambda}) = \left(\frac{1}{\overline{X}}\right)^3 + 1.$$

Ερώτημα vi.

Έχουμε την εκτιμήτρια

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}.$$

Εξετάζουμε αν είναι αμερόληπτη, δηλαδή αν

$$E\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \lambda.$$

Προσοχή! Το παρακάτω δεν ισχύει

$$E\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = \frac{1}{E(\overline{X})}.$$

Επιστρέφω στη στατιστική συνάρτηση $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Θα δοκιμάσουμε να βρούμε τη μέση τιμή της $1/T(X)$.

Υπενθύμιση! Αν έχω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, τότε $T(X) = \sum X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$. Η μέση τιμή της $\Gamma(n, \lambda)$, όπου το λ είναι παράμετρος ρυθμού, είναι ίση με

$$E(T) = \frac{n}{\lambda}.$$

Γνωρίζουμε ότι η $T(X) \sim \Gamma(n, \lambda)$. Επομένως έχει σ.π.π.

$$f(t, \lambda) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt, \qquad t \geq 0.$$

Υπολογίζουμε τη μέση τιμή της $1/T(X)$,

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t, \lambda) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt$$

Παρατηρούμε ότι αν μία κατανομή ακολουθεί την $\Gamma(n-1, \lambda)$, τότε έχει σ.π.π.

$$f(t, \lambda) = \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt, \qquad t \geq 0,$$

επομένως $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt = 1$. Αυτό μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα:

$$E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{(n-2)!}{\lambda^{n-1}} = \frac{\lambda}{n-1}.$$

Η $1/T(X)$ δεν είναι αμερόληπτη για το λ. Εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, παίρνουμε την εκτιμήτρια

$$\delta(X) = \frac{n-1}{T(X)} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Υπολογίζουμε

$$E\big(\delta(X)\big) = E\left(\frac{n-1}{T(X)}\right) = (n-1)E\left(\frac{1}{T(X)}\right) = (n-1)\frac{\lambda}{n-1} = \lambda.$$

Δηλαδή η $\delta(X)$ είναι α.ε. του λ. Επιπλέον είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους σ.σ. $T(X)$. Επομένως, από το πόρισμα του θεωρήματος Lehmann–Scheffé, είναι η α.ε.ε.δ. για το λ.

Ερώτημα vii.

Από γνωστό θεώρημα, στην ΕΟΚ η $T(X)$ είναι αποτελεσματική για την $E\big(T(X)\big)$, δηλαδή για την κανονική μορφή της ΕΟΚ του ερωτήματος iii.,

$$f(x;\eta) = e^{n\log(-\eta)+\eta\sum_{i=1}^{n} X_i}, x \geq 0$$

έχουμε ότι η $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $E\big(T(X)\big) = \frac{n}{\lambda}$. Κάνουμε αναπαραμετροποίηση $\varphi = n\eta$ και έχουμε

$$f(x;\varphi) = e^{n\log\left(-\frac{\varphi}{n}\right)+\varphi\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}, x \geq 0,$$

δηλαδή έχουμε $A^\star(\varphi) = -n\log\left(-\frac{\varphi}{n}\right)$, και $T^\star(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Επομένως, η $T^\star(X)$ είναι αποτελεσματική για την

$$E\big(T^\star(X)\big) = \frac{dA^\star(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{n}{\varphi} = -\frac{n}{-n\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Άσκηση 2: Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή $\Gamma(\alpha, \theta), \alpha, \theta > 0$, με α γνωστό και θ άγνωστο. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{a-1} e^{-\theta x}, \qquad x \geq 0.$$

i. Να δειχθεί ότι η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.
ii. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ.
iii. Να βρεθεί η $E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$ και η $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i)$.
iv. Να βρεθεί η ΕΡ (εκτιμήτρια ροπών) του θ.
v. Να βρεθεί η ΕΜΠ (εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας) του e^θ.
vi. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. του $1/\theta$ και να ελεγχθεί αν είναι αποτελεσματική.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Παρατηρούμε ότι το στήριγμα της από κοινού κατανομής του δείγματος είναι το $S = [0, +\infty)^n$, ανεξάρτητο του θ. Επιπλέον,

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} = \frac{\theta^{n\alpha}}{\Gamma^n(\alpha)} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$
$$= e^{n\alpha \log\theta - n\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Άρα η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ, με

$$B(\theta) = -n\alpha\log\theta, \qquad \eta(\theta) = -\theta, \qquad T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad H(X) = -n\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

Ερώτημα ii.

Από γνωστό θεώρημα της ΕΟΚ, η $T(X)$ είναι επαρκής για το θ. Επιπλέον το $g(\Theta) = (-\infty, 0)$ περιέχει ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και οι $\eta(\theta), T(X)$ έχουν την ίδια διάσταση ($g = d = 1$). Επομένως η $T(X)$ είναι και πλήρης για το θ.

Ερώτημα iii.

Παρατηρούμε ότι $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Θα φέρουμε την σ.π.π. στην κανονική μορφή της ΕΟΚ, δηλαδή στη μορφή

$$f(x_i;\eta) = e^{-A(\eta) + \eta T(x_i) + H(x_i)}, \qquad x_i \in S.$$

Από το ερώτημα i. έχουμε ότι

$$f(x;\theta) = e^{n\alpha\log\theta - n\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i}, \qquad x \geq 0.$$

Κάνουμε την αναπαραμετροποίηση $\eta = -\theta$ και παίρνουμε

$$f(x;\eta) = e^{n\alpha\log(-\eta) - n\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i + \eta\sum_{i=1}^{n} x_i}, \qquad x \geq 0.$$

Δηλαδή $A(\eta) = -n\alpha\ln(-\eta)$. Επομένως έχουμε ότι

$$E\big(T(X)\big) = \frac{dA(\eta)}{d\eta} = -\frac{n\alpha}{\eta} = \frac{n\alpha}{\theta}.$$

$$Var\big(T(X)\big) = \frac{d^2A(\eta)}{d\eta^2} = \frac{n\alpha}{\eta^2} = \frac{n\alpha}{\theta^2}.$$

Ερώτημα iv.

Εάν γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της $X \sim \Gamma(\alpha, \theta)$, όπου θ παράμετρος ρυθμού, είναι $E(X) = \frac{\alpha}{\theta}$, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε. Αν όχι, πρέπει να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της κατανομής.

Θα βρούμε την εκτιμήτρια ροπών.

$$\mathrm{E(X)} = \overline{\mathrm{X}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\hat{\theta}} = \overline{\mathrm{X}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\alpha}{\overline{\mathrm{X}}}.$$

Ερώτημα v.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$\mathrm{L}(\theta) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n\,;\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{n}\alpha\log\theta - \mathrm{n}\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\mathrm{x_i} - \theta\,\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i}}.$$

Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\theta) = \log\mathrm{L}(\theta) = \mathrm{n}\alpha\log\theta - \mathrm{n}\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\mathrm{x_i} - \theta\,\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i}.$$

Παραγωγίζουμε την $\ell(\theta)$ και βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{n}\alpha}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i}$$

$$\frac{\partial\ell(\theta_0)}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{n}\alpha}{\theta_0} - \sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i} = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\mathrm{n}\alpha}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i}} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\alpha}{\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i}}{\mathrm{n}}} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{\alpha}{\overline{\mathrm{x}}}$$

Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά την $\ell(\theta)$:

$$\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{\mathrm{n}\alpha}{\theta^2} < 0$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο θ_0 είναι σημείο μεγίστου. Επομένως η ΕΜΠ του λ είναι

$$\hat{\theta} = \theta_0 = \frac{\alpha}{\overline{\mathrm{X}}}$$

Αναζητάμε όμως την ΕΜΠ του e^{θ}. Από το αναλλοίωτο της ΕΜΠ για την $\mathrm{g(x)} = e^{x}$ έχουμε ότι

$$\widehat{e^{\theta}} = \widehat{\mathrm{g}(\theta)} = \mathrm{g}\big(\hat{\theta}\big) = e^{\frac{\alpha}{\overline{\mathrm{X}}}}.$$

Ερώτημα vi.

Από γνωστό θεώρημα, στην ΕΟΚ η $T(X)$ είναι αποτελεσματική για την $E\big(T(X)\big)$, δηλαδή για την κανονική μορφή της ΕΟΚ του ερωτήματος iii.,

$$\mathrm{f}(x;\eta) = \mathrm{e}^{\mathrm{n}\alpha\log(-\eta)-\mathrm{n}\log\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log \mathrm{x_i}+\eta\ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{x_i}}, \qquad x \geq 0$$

έχουμε ότι η $T(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X_i}$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια της $E\big(T(X)\big) = \frac{n\alpha}{\theta}$. Κάνουμε αναπαραμετροποίηση $\varphi = n\alpha\eta$ και έχουμε

$$\mathrm{f}(x;\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{n}\alpha\log\left(-\frac{\varphi}{na}\right)-\mathrm{n}\log\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log \mathrm{x_i}+\varphi\frac{\sum_{i=1}^{n}x_\mathrm{i}}{na}}, x \geq 0,$$

δηλαδή έχουμε $A^{\star}(\varphi) = \mathrm{n}\alpha\log\left(-\frac{\varphi}{na}\right)$, και $\mathrm{T}^{\star}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X_i}}{na} = \frac{\overline{\mathrm{X}}}{\alpha}$. Επομένως, η $\mathrm{T}^{\star}(X)$ είναι αποτελεσματική για την

$$E\big(\mathrm{T}^{\star}(X)\big) = \frac{dA^{\star}(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{na}{\varphi} = -\frac{na}{-na\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

Επομένως, η $\mathrm{T}^{\star}(\mathrm{X}) = \frac{\overline{\mathrm{X}}}{\alpha}$, είναι αποτελεσματική για την $\mathrm{g}(\theta) = 1/\theta$, άρα είναι και α.ε.ε.δ. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Lehmann–Scheffé για να δείξουμε ότι είναι α.ε.ε.δ. και να δείξουμε ότι η διασπορά της πετυχαίνει το κάτω φράγμα Cramer-Rao.

Άσκηση 3: Έστω ότι το χαρακτηριστικό X του πληθυσμού που μελετάμε είναι ο αριθμός των ατόμων που μπαίνουν σε ένα κατάστημα στο διάστημα 9-10πμ. Υποθέτουμε ότι $X \sim P(\lambda), \lambda \in (0, +\infty)$.

i. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης σ.σ. για το λ.
ii. Να βρεθεί η ΕΡ του λ.
iii. Να βρεθεί η ΕΜΠ του $e^{\lambda+5}$.
iv. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. για το λ.
v. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. για την $P(X = 0)$.
vi. Χρησιμοποιώντας την α.ε.ε.δ του λ, προτείνετε μία plug-in εκτιμήτρια της $P(X = 0)$.
vii. Αν οι πελάτες του καταστήματος που μπαίνουν στο διάστημα 9-10πμ μέσα σε 10 μέρες ήταν 5, 2, 0, 1, 4, 0, 3, 1, 2, 2, ποια είναι η εκτίμησή σας για την $P(X = 0)$;

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Α' τρόπος: Συνάρτηση πυκνότητας μίας παρατήρησης

Αρχικά, το στήριγμα $S_{X_i} = \mathbb{N}$ είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου. Θα δείξουμε ότι μία παρατήρηση ανήκει στην ΕΟΚ. Γράφουμε την κατανομή στη μορφή της ΕΟΚ:

$$f(x_i; \theta) = e^{-B(\theta)+\eta(\theta)T(x_i)} \cdot h(x_i), \qquad x_i \in S.$$

Έχουμε

$$f(x_i; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda + x_i \log\lambda} \frac{1}{x_i!}, \quad x \in \mathbb{N}.$$

δηλαδή

$$T(X_i) = X_i, \qquad \eta(\lambda) = \log\lambda, \qquad B(\lambda) = \lambda, \qquad h(X_i) = \frac{1}{X_i!}.$$

Άρα η κατανομή μίας παρατήρησης ανήκει στην ΕΟΚ. Από γνωστό θεώρημα, η από κοινού κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ και έχουμε

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \,, B(\lambda) = n\lambda.$$

Β' τρόπος: Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας

Αρχικά, το στήριγμα της από κοινού κατανομής του δείγματος είναι $S = \mathbb{N}^n$, ανεξάρτητο της παραμέτρου. Θα δείξουμε ότι η από κοινού κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.

$$f(x; \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \left(e^{-\lambda}\right)^n \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$
$$= e^{-n\lambda + \log\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} = e^{-n\lambda + \log\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!},$$

δηλαδή

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad \eta(\lambda) = \log\lambda\,, \qquad B(\lambda) = n\lambda, \qquad h(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} X_i!}.$$

Επομένως η από κοινού κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ. Άρα η $T(X)$ είναι επαρκής για το λ. Επιπλέον

- $d = g = 1$, όπου d η διάσταση της $T(X)$ και g η διάσταση της $\eta(\lambda)$.
- $\eta(\Theta) = (-\infty, +\infty)$ περιέχει ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Επομένως, η $T(X)$ είναι και πλήρης σ.σ. για το λ.

Υπενθύμιση! Στατιστική συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το δείγμα και όχι από την παράμετρο. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 10 φορές και μετρήσουμε το πλήθος των κορωνών, αυτό είναι η στατιστική συνάρτηση

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Πολλή προσοχή, δεν είναι εκτιμήτρια. Εκτιμήτρια ονομάζεται μία στατιστική συνάρτηση με πεδίο τιμών τον παραμετρικό χώρο Θ. Εδώ, άγνωστη παράμετρος είναι η $p \in \Theta = (0,1)$. Η $T(X)$ παίρνει τιμές στο $\{0, 1, \dots, n\}$, όχι στο $(0,1)$. Η εκτιμήτριά μας είναι η

$$\delta(X) = \frac{T(X)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X}.$$

Ερώτημα ii.

Γνωρίζουμε ότι $E(X) = \lambda$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ροπών:

$$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{X}.$$

Επομένως η εκτιμήτρια ροπών είναι η $\hat{\lambda} = \overline{X}$.

Ερώτημα iii.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = \left(e^{-\lambda}\right)^n \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}.$$

Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\lambda) = \log L(\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log\lambda - \log\prod_{i=1}^{n} x_i!.$$

Παραγωγίζουμε την $\ell(\lambda)$ και βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\frac{\partial\ell(\lambda)}{\partial\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}.$$

$$\frac{\partial\ell(\lambda_0)}{\partial\lambda} = 0 \Leftrightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda_0} = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Leftrightarrow \lambda_0 = \overline{x}.$$

Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά την $\ell(\theta)$:

$$\frac{\partial^2 \ell(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0.$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο λ_0 είναι σημείο μεγίστου. Επομένως η ΕΜΠ του λ είναι

$$\hat{\lambda} = \lambda_0 = \overline{X}.$$

Αναζητάμε όμως την ΕΜΠ του $e^{\lambda+5}$. Από το αναλλοίωτο της ΕΜΠ για την $g(x) = e^{x+5}$ έχουμε ότι

$$\widehat{g(\lambda)} = \widehat{e^{\lambda+5}} = g(\hat{\lambda}) = e^{\overline{X}+5}.$$

Ερώτημα iv.

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Lehmann–Scheffé. Χρειαζόμαστε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ η οποία να είναι συνάρτηση μία επαρκούς και πλήρους σ.σ. T(X). Θα εξετάσουμε αν το $\hat{\lambda} = \overline{X}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του λ.

$$E(\hat{\lambda}) = E(\overline{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{1}{n}\, n\lambda = \lambda.$$

Επομένως η $\hat{\lambda}$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια που χρειαζόμαστε. Επιπλέον,

$$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{T(X)}{n},$$

όπου η $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης για το λ από το ερώτημα i. Επομένως, από το πόρισμα του θεωρήματος Lehmann–Scheffé, η $\hat{\lambda} = \overline{X}$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για το λ.

Ερώτημα v.

Αρχικά πρέπει να εκφράσουμε την πιθανότητα $P(X = 0)$ ως συνάρτηση της παραμέτρου λ:

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

Επομένως αναζητάμε την αεεδ για την παραμετρική συνάρτηση $g(\lambda) = e^{-\lambda}$.

Θα εφαρμόσουμε το Lehmann–Scheffé. Χρειαζόμαστε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\lambda)$ και μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. Η $g(\lambda)$ είναι 1-1 και επί, επομένως η T(X) που βρήκαμε στην αρχή είναι επαρκής και πλήρης όχι μόνο για το λ αλλά και για το $g(\lambda)$.

Ορίζουμε τη δείκτρια

$$I_0 = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \;\; X_1 = 0 \\ 0 & \alpha\nu \;\; X_1 \neq 0' \end{cases}$$

η οποία έχει μέση τιμή

$$E(I_0) = 1 \cdot P(X_1 = 0) + 0 \cdot P(X_1 \neq 0) = P(X_1 = 0) = e^{-\lambda} = g(\lambda),$$

είναι δηλαδή αμερόληπτη εκτιμήτρια της $g(\lambda)$. Από το θεώρημα Lehmann–Scheffé, η εκτιμήτρια $\delta(X) = E(I_0|T(X) = t)$ είναι η α.ε.ε.δ. για την $g(\lambda)$. Μένει να υπολογίσουμε την $\delta(X)$.

Υπενθύμιση! Αν X και T είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές, με S το στήριγμα της X, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x \in S} \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x})\,.$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{T} = \mathrm{t}) = \sum_{x \in S} \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}|\mathrm{T} = \mathrm{t}).$$

$$\begin{aligned}
\delta(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}(\mathrm{I}_0|\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{t}) \\
&= 1 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0|\mathrm{T} = \mathrm{t}) + 0 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \neq 0|\mathrm{T} = \mathrm{t}) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0|\mathrm{T} = \mathrm{t}) \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0,\ \mathrm{T} = \mathrm{t})}{\mathrm{P}(\mathrm{T} = \mathrm{t})} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0,\ \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t})}{\mathrm{P}(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t})} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0,\ \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t} - 0)}{\mathrm{P}(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t})} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0) \cdot \mathrm{P}(\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t})}{\mathrm{P}(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t})}.
\end{aligned}$$

Υπενθύμιση! Αν έχω $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n} \sim \mathrm{P}(\lambda)$, τότε $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} \sim \mathrm{P}(\mathrm{n}\lambda)$.

Υπολογίζουμε τις τρεις παραπάνω πιθανότητες:

$$\mathrm{X}_1 \sim \mathrm{P}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda},$$

$$\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} \sim \mathrm{P}\big((\mathrm{n}-1)\lambda\big) \Rightarrow \mathrm{P}\left(\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t}\right) = \mathrm{e}^{-(\mathrm{n}-1)\lambda} \cdot \frac{[(\mathrm{n}-1)\lambda]^\mathrm{t}}{\mathrm{t}!},$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} \sim \mathrm{P}(\mathrm{n}\lambda) \Rightarrow \mathrm{P}\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i} = \mathrm{t}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda} \cdot \frac{(\mathrm{n}\lambda)^\mathrm{t}}{\mathrm{t}!}.$$

Άρα

$$\delta(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \mathrm{e}^{-(\mathrm{n}-1)\lambda} \cdot \frac{[(\mathrm{n}-1)\lambda]^\mathrm{t}}{\mathrm{t}!}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{n}\lambda} \cdot \frac{(\mathrm{n}\lambda)^\mathrm{t}}{\mathrm{t}!}} = \frac{(\mathrm{n}-1)^\mathrm{t}}{\mathrm{n}^\mathrm{t}} = \left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}}\right)^\mathrm{t}, \qquad \mathrm{t} \geq 0.$$

Ερώτημα vi.

Έστω $\mathrm{X} \sim \mathrm{P}(\lambda)$. Τότε:

$$\mathrm{g}(\lambda) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Επομένως, έχοντας την ΕΜΠ $\hat{\lambda} = \overline{\mathrm{X}}$ οδηγούμαστε στην plug-in εκτιμήτρια

$$\delta^\star(\mathrm{X}) = \mathrm{g}(\hat{\lambda}) = \mathrm{e}^{-\overline{\mathrm{X}}}.$$

Λόγω το αναλλοίωτο της ΕΜΠ η παραπάνω εκτιμήτρια είναι και η ΕΜΠ της $g(\lambda)$. Παρατηρούμε όμως ότι δεν είναι η α.ε.ε.δ. της $g(\lambda)$.

Ερώτημα vii.

Για το συγκεκριμένο δείγμα x έχουμε $n = 10,\ t = \sum_{i=1}^{n} x_i = 20,\ \bar{x} = 2.$

Η α.ε.ε.δ. της $P(X = 0)$ είναι η

$$\delta(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \approx 0.122 = 12.2\%.$$

Η ΕΜΠ της $P(X = 0)$ είναι η

$$\delta^{\star}(x) = g(\hat{\lambda}) = e^{-\bar{x}} \approx 0.135 = 13.5\%.$$

Άσκηση 4: Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή $N(0, 4\theta^2)$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, από την κατανομή $N(0, 9\theta^2)$ με παράμετρο $\theta \in \Theta = (0, +\infty)$.

i. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ.
ii. Να βρεθεί η ΕΡ (εκτιμήτρια ροπών) του θ^2.
iii. Να βρεθεί η ΕΜΠ (εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας) του $e^{3\theta^2}$.
iv. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. (αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς) του θ^2.
v. Να εξετάσετε αν η παραπάνω α.ε.ε.δ. είναι αποτελεσματική.
vi. Να εξετάσετε αν η παραπάνω α.ε.ε.δ. είναι συνεπής.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Θα μετασχηματίσουμε τις τυχαίες μεταβλητές. Θέτουμε:

$$Z_i = \frac{X_i}{2} \sim N(0, \theta^2), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$Z_{n+i} = \frac{Y_i}{3} \sim N(0, \theta^2), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Έτσι παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα (ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.) $Z_1, Z_2, \dots Z_{n+m} \sim N(0, \theta^2)$.

Παρατήρηση! Οι μετασχηματισμοί μπορούν να μας βοηθήσουν να ενώσουμε δύο δείγματα σε ένα. Για παράδειγμα, έστω ότι δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή $N(\mu - 3, 4)$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, από την κατανομή $N(\mu + 2, 4)$ με παράμετρο $\theta \in \Theta = (0, +\infty)$. Θέτουμε τις τ.μ.

$$Z_i = X_i + 3 \sim N(\mu, 4), \quad i = 1, \dots, n,$$
$$Z_{n+i} = Y_i - 2 \sim N(\mu, 4), i = 1, \dots, m.$$

Έτσι παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα (ανεξάρτητες και ισόνομες) $Z_1, Z_2, \dots Z_{n+m} \sim N(\mu, 4)$.

Έχουμε τις $Z_1, Z_2, \dots Z_{n+m} \sim N(0, \theta^2)$, που η κάθε μία έχει στήριγμα $S = \mathbb{R}$ άρα το δείγμα έχει στήριγμα $S^{n+m} = \mathbb{R}^{n+m}$. Η σ.π.π. μίας παρατήρησης είναι

$$f(z_i; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2} z_i^2}, z_i \in \mathbb{R}.$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+m};\ \theta) = \prod_{i=1}^{n+m} f(z_i;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2} z_i^2} = (2\pi\theta^2)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}$$

Η γενική μορφή της από κοινού σ.π.π. στην μονοπαραμετρική ΕΟΚ είναι:

$$f(x; \theta) = e^{-B(\theta) + \eta(\theta) T(x) + H(x)}, \qquad x \in S,$$
$$f(z;\ \theta) = e^{-\frac{n+m}{2} \log 2\pi\theta^2 - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}, \qquad z_i \in \mathbb{R}.$$

Άρα η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ και έχουμε

$$B(\theta) = \frac{n+m}{2}\log 2\pi\theta^2\,,\ \ \eta(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}, \qquad T(z) = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2\,, \qquad H(z) = 0.$$

Επομένως η $T(Z)$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το θ. Επιπλέον,

- $\eta(\Theta) = (-\infty, 0)$ περιέχει ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
- $d = g = 1$, όπου d η διάσταση της $T(Z)$ και g η διάσταση της $\eta(\theta)$.

Άρα, η $T(Z)$ είναι και πλήρης σ.σ. για το θ.

Ερώτημα ii.

Για να βρούμε την εκτιμήτρια ροπών πρέπει να λύσουμε το σύστημα $E(Z^k) = \overline{Z^k}$ ως προς την παράμετρο για κατάλληλες τιμές του $k = 1, 2, \dots$. Παρατηρούμε ότι $E(Z) = 0$, ανεξάρτητη της παραμέτρου θ, επομένως προχωράμε στη δεύτερη ροπή $E(Z^2)$ και λύνουμε την εξίσωση:

$$E(Z^2) = \overline{Z^2} \ \Rightarrow \mathrm{Var}(Z) + E(Z)^2 = \ \overline{Z^2} \Rightarrow \widehat{\theta^2} = \overline{Z^2}.$$

Υπενθύμιση! Έστω X μία τ.μ. με $E(X) \in \mathbb{R}, Var(X) \in (0, +\infty)$. Τότε:

$$\mathrm{Var}(X) = E((X-\mu)^2) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \Rightarrow E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + E(X)^2.$$

Άρα η Ε.Ρ. του θ^2 είναι

$$\widehat{\theta^2} = \overline{Z^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2}{n+m}.$$

Ερώτημα iii.

Γράφουμε την πιθανοφάνεια του δείγματος:

$$L(\theta^2) = f(z_1, z_2, \dots, z_{n+m};\ \theta) = (2\pi\theta^2)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}.$$

Λογαριθμίζουμε για να βρούμε τη λογαριθμοπιθανοφάνεια:

$$\ell(\theta^2) = \log L(\theta^2) = -\frac{n+m}{2}\log(2\pi\theta^2) - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2.$$

Θέτουμε $\lambda = \theta^2$ για να διευκολύνουμε την παραγώγιση:

$$\ell(\lambda) = -\frac{n+m}{2}\log(2\pi\lambda) - \frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2.$$

Παραγωγίζουμε την $\ell(\lambda)$ και βρίσκουμε τα στάσιμα σημεία:

$$\frac{\partial\ell(\lambda)}{\partial\lambda} = -\frac{n+m}{2}\frac{2\pi}{2\pi\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2 = -\frac{n+m}{2}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda_0)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{n+m}}{2}\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{2{\lambda_0}^2}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2 = 0 \Leftrightarrow -(\mathrm{n+m}) + \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}{\mathrm{n+m}}$$

Για να βρούμε λοιπόν ότι είναι σημείο μεγίστου είτε χρησιμοποιούμε την 1η παράγωγο ξανά

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda} > 0 \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{n+m}}{2}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum \mathrm{z_i^2} > 0 \Leftrightarrow -(\mathrm{n+m}) + \frac{1}{\lambda}\sum \mathrm{z_i^2} > 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{\sum \mathrm{z_i^2}}{\mathrm{n+m}}$$

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda} < 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda > \frac{\sum \mathrm{z_i^2}}{\mathrm{n+m}}.$$

είτε υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο στο λ_0

$$\frac{\partial^2 \ell(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{\mathrm{n+m}}{2}\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{2\lambda^3}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{n+m}}{2} - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\lambda_0)}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}\left(\frac{\mathrm{n+m}}{2} - \frac{\mathrm{n+m}}{\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2\right) = \frac{1}{\lambda_0^2}\left(\frac{\mathrm{n+m}}{2} - \frac{\mathrm{n+m}}{1}\right) = -\frac{1}{\lambda_0^2}\frac{\mathrm{n+m}}{2} < 0.$$

Επομένως έχουμε μοναδικό σημείο μεγίστου, στο λ_0, άρα έχουμε ΕΜΠ

$$\widehat{\theta^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2}{\mathrm{n+m}}$$

Αναζητάμε την ΕΜΠ της $\mathrm{e}^{3\theta^2}$. Από το αναλλοίωτο της ΕΜΠ για τη συνάρτηση $\mathrm{g(x)} = \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}$, έχουμε

$$\widehat{\mathrm{e}^{3\theta^2}} = \widehat{\mathrm{g}(\theta^2)} = \mathrm{g}\left(\widehat{\theta^2}\right) = \mathrm{e}^{3\widehat{\theta^2}} = \mathrm{e}^{3\frac{\sum \mathrm{z_i^2}}{\mathrm{n+m}}}.$$

Ερώτημα iv.

Θα εξετάσουμε αν η $\widehat{\theta^2}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ^2, δηλαδή αν $\mathrm{E}\left(\widehat{\theta^2}\right) = \theta^2$.

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\theta^2}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2}{\mathrm{n+m}}\right) = \frac{1}{\mathrm{n+m}}\mathrm{E}\left(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n+m}} \mathrm{Z_i^2}\right) = \frac{1}{\mathrm{n+m}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n+m}} \mathrm{E}\left(\mathrm{Z_i^2}\right) = \frac{1}{\mathrm{n+m}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n+m}} \theta^2 = \frac{(\mathrm{n+m})\theta^2}{\mathrm{n+m}} = \theta^2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\mathrm{E}(\mathrm{Z}^2) = \theta^2$. Βρήκαμε μία αμερόληπτη εκτιμήτρια του θ^2, η οποία είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους σ.σ. $\mathrm{T(X)} = \sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2$. Επομένως, από το πόρισμα του θεωρήματος θεωρήματος Lehmann–Scheffé, είναι η α.ε.ε.δ. για το θ^2.

Ερώτημα v.

Για την αποτελεσματικότητα θα βασιστούμε στην ΕΟΚ. Για την από κοινού σ.π.π. έχουμε

$$\mathrm{f}(z;\ \theta) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{n+m}}{2}\log 2\pi\theta^2 - \frac{n+m}{2\theta^2}\frac{\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}{n+m}}, \qquad z_i \in \mathbb{R},$$

όπου $\eta(\theta) = -\frac{n+m}{2\theta^2}$. Γράφουμε την από κοινού σ.π.π. στην κανονική μορφή της ΕΟΚ, κάνοντας την αναπαραμέτρηση $\eta = -\frac{n+m}{2\theta^2}$:

$$f(z;\ \eta) = e^{-\frac{n+m}{2}\log -\frac{\pi(n+m)}{\eta}+\eta\frac{\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}{n+m}} = e^{-\frac{n+m}{2}\log(-\pi(n+m))+\frac{n+m}{2}\log\eta+\eta\frac{\sum_{i=1}^{n+m} z_i^2}{n+m}}, \qquad z_i \in \mathbb{R},$$

και έχουμε $A(\eta) = -\frac{n+m}{2}\log\eta$. Η $T(X)$ είναι αποτελεσματική για την $E\big(T(X)\big)$, δηλαδή για την

$$E\big(T(X)\big) = \frac{dA(\eta)}{d\eta} = -\frac{n+m}{2\eta} = \theta^2.$$

Επομένως, η $\widehat{\theta^2} = T(X) = \frac{\sum Z_i^2}{n+m}$ είναι αποτελεσματική για το θ^2.

Ερώτημα vi.

Για τη συνέπεια, θέλουμε να δείξουμε ότι η $\widehat{\theta^2}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο θ^2, δηλαδή

$$\widehat{\theta^2} \xrightarrow{p} \theta^2$$

Ξέρουμε ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επομένως το ίδιο θα ισχύει και για τις Z_i^2. Θέτουμε $K_i = Z_i^2$, $N = n + m$ και παρατηρούμε ότι:

$$\widehat{\theta^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n+m} Z_i^2}{n+m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} K_i}{N} = \overline{K_N}$$

Από τον Ασθενή Νόμο των Μεγάλων Αριθμών (ΑΝΜΑ) έχουμε ότι

$$\overline{K_N} \xrightarrow{p} E(K),$$

όπου

$$E(K) = E(Z^2) = Var(Z) + E(Z)^2 = \theta^2.$$

Δηλαδή

$$\widehat{\theta^2} = \overline{K_N} \xrightarrow{p} E(K) = \theta^2,$$

άρα η α.ε.ε.δ. $\widehat{\theta^2}$ είναι και συνεπής για το θ^2.

Άσκηση 5: Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή

$$f(x, \theta) = (\theta + 1)(1 - x)^{\theta} \quad x \in (0,1),$$

με παράμετρο $\theta \in \Theta = (-1, +\infty)$.

i. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ.
ii. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της $\delta(X) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i)$.
iii. Να βρεθεί η αποτελεσματική εκτιμήτρια για την παραμετρική συνάρτηση $1/(\theta + 1)$, το αντίστοιχο κάτω φράγμα Cramer – Rao καθώς και η πληροφορία κατά Fisher του θ για το δείγμα.
iv. Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια $\delta(X)$ είναι συνεπής για την $g(\theta) = 1/(\theta + 1)$.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Θα εξετάσουμε αν η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ. Για μία παρατήρηση X_i έχουμε στήριγμα $S_{X_i} = (0,1)$. Για όλο το δείγμα έχουμε $S = (0,1)^n$, ανεξάρτητο της παραμέτρου θ. Η από κοινού σ.π.π. για όλο το δείγμα είναι:

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{\iota=1}^{n} f(x_i;\ \theta) = \prod_{\iota=1}^{n} (\theta + 1)(1 - x_i)^{\theta} = (\theta + 1)^n \prod_{\iota=1}^{n} (1 - x_i)^{\theta}$$
$$= e^{n \log(\theta+1)} \prod_{\iota=1}^{n} e^{\theta \log(1-x_i)} = e^{n \log(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^{n} \log(1-x_i)}.$$

Άρα η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με

$$B(\theta) = -n \log(\theta + 1), \qquad \eta(\theta) = \theta, \qquad T(X) = \sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i), \qquad H(X) = 0.$$

Επομένως η $T(X) = \sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i)$ είναι επαρκής για το θ. Επιπλέον

- $\eta(\Theta) = (-1, +\infty)$ περιέχει ανοιχτό, μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
- $d = g = 1$, όπου d η διάσταση της $T(X)$ και g η διάσταση της $\eta(\theta)$.

Άρα η $T(X)$ είναι και πλήρης για το θ.

Ερώτημα ii.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω έκφραση της από κοινού σ.π.π. είναι στην κανονική μορφή της ΕΟΚ ($\eta(\theta) = \theta$). Επομένως έχουμε

$$E\big(T(X)\big) = \frac{dB(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta + 1}.$$

$$Var\big(T(X)\big) = \frac{d^2B(\theta)}{d\theta^2} = \frac{n}{(\theta + 1)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς παίρνουμε

$$E\big(\delta(X)\big) = E\left(-\frac{1}{n}T(X)\right) = -\frac{1}{n}E\big(T(X)\big) = \frac{1}{\theta + 1},$$

$$\mathrm{Var}\big(\delta(X)\big) = \mathrm{Var}\left(-\frac{1}{n}T(X)\right) = \frac{1}{n^2}E\big(T(X)\big) = \frac{1}{n(\theta+1)^2}.$$

Ερώτημα iii.

Θα υπολογίσουμε το κάτω φράγμα Cramer Rao, που για αμερόληπτες εκτιμήτριες δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{LB_{CR}} = \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{I_n(\theta)}.$$

Έχουμε

$$g'(\theta) = \left(\frac{1}{\theta+1}\right)' = -\frac{1}{(\theta+1)^2}.$$

Θα υπολογίσουμε την πληροφορία κατά Fisher. Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\theta) = f(x_1, \dots x_n; \theta) = (\theta+1)^n \prod_{\iota=1}^{n} (1-x_i)^\theta.$$

Λογαριθμίζουμε για να βρούμε τη λογαριθμοπιθανοφάνεια:

$$\ell(\theta) = \log f(x_1, \dots x_n; \theta) = n\log(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i).$$

Παραγωγίζουμε για να βρούμε την Score function:

$$S(X;\theta) = \frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i)$$

$$\frac{\partial S(X;\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{(\theta+1)^2}.$$

Υπολογίζουμε την πληροφορία κατά Fisher:

$$I_n(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2\ell(\theta)}{\partial\theta^2}\right] = -E\left[-\frac{n}{(\theta+1)^2}\right] = \frac{n}{(\theta+1)^2}.$$

Επομένως το κάτω φράγμα Cramer Rao είναι:

$$\mathrm{LB_{CR}} = \frac{\big(g'(\theta)\big)^2}{I_n(\theta)} = \frac{\frac{1}{(\theta+1)^4}}{\frac{n}{(\theta+1)^2}} = \frac{1}{n(\theta+1)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\delta(X)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια και πετυχαίνει το κάτω φράγμα Cramer-Rao, επομένως είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $\frac{1}{\theta+1}$, (άρα και α.ε.ε.δ.).

Ερώτημα iv.

Α' τρόπος: Νόμος Μεγάλων Αριθμών

Παρατηρούμε ότι η $\delta(X)$ μπορεί να εκφραστεί ως ένας δειγματικός μέσος. Πράγματι, αν κάνουμε τον μετασχηματισμό $Y_i = -\log(1 - \mathrm{X_i})$, έχουμε

$$\delta(X) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(1 - \mathrm{X_i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y_n}.$$

Από τον ΑΝΜΑ έχουμε ότι

$$\overline{Y_n} \xrightarrow{\mathrm{p}} \mathrm{E}(Y).$$

Για τις τ.μ. Y_i, από το ερώτημα (ii) προκύπτει ότι $E(Y_i) = \frac{1}{\theta+1}$, επομένως:

$$\delta(X) \xrightarrow{\mathrm{p}} \frac{1}{\theta + 1},$$

Δηλαδή η $\delta(\mathrm{X})$ είναι συνεπής για την $\mathrm{g}(\theta)$.

Β' τρόπος: L_2 σύγκλιση (Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα)

Για την $\delta(X)$ έχουμε ότι είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $\mathrm{g}(\theta)$, δηλαδή ότι $\mathrm{E}\big(\delta(\mathrm{X})\big) = \frac{1}{\theta+1}$, και

$$\mathrm{Var}\big(\delta(\mathrm{X})\big) = \mathrm{Var}\left(-\frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{T}(\mathrm{X})\right) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\mathrm{E}\big(\mathrm{T}(\mathrm{X})\big) = \frac{1}{\mathrm{n}(\theta + 1)^2} \longrightarrow 0.$$

Επομένως έχουμε ότι $\mathrm{MT\Sigma}\big(\delta(\mathrm{X}), \mathrm{g}(\theta)\big) \longrightarrow 0$, δηλαδή η $\delta(X)$ είναι $L_2 -$ συνεπής για την $\mathrm{g}(\theta)$, άρα είναι και συνεπής για την $\mathrm{g}(\theta)$.

Άσκηση 6: Έστω $X_1, \dots X_n$ τυχαίο δείγμα (ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις) από την κατανομή $\mathrm{Unif}[0,\theta], \theta \in \Theta = (0,+\infty)$.

i. Να εξετάσετε αν η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.
ii. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ.
iii. Να βρεθεί η ΕΡ του θ.
iv. Να βρεθεί η ΕΜΠ του θ.
v. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. του θ.
vi. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. θ^w.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Η συνάρτηση πυκνότητας μίας παρατήρησης X_i είναι

$$f(x_i;\theta) = \frac{1}{\theta}\, 1_{[0,\theta]}(x_i)$$

Το στήριγμα είναι το $S = [0,\theta]$, που εξαρτάται από την παράμετρο θ, επομένως η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ.

Υπενθύμιση! Οι δείκτριες είναι δίτιμες συναρτήσεις της μορφής:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Στη στατιστική, τις χρησιμοποιούμε συχνά για να υποδείξουμε το στήριγμα μίας κατανομής.

Ερώτημα ii.

Διατάσσουμε το δείγμα σε αύξουσα σειρά $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του δείγματος είναι:

$$f(x;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} 1_{[0,\theta]}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} 1_{[0,\theta]}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n 1_{[0,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) 1_{(-\infty,\theta]}\left(x_{(n)}\right).$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\prod_{i=1}^{n} 1_{[0,\theta]}(x_i) = 1$ ανν όλα τα x_i να είναι στο διάστημα $[0,\theta]$, δηλαδή ανν $0 \le x_{(1)},\ x_{(n)} \le \theta$. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι

$$1_{(-\infty,\theta]}\left(x_{(n)}\right) = 1 \Leftrightarrow -\infty < x_{(n)} \le \theta < +\infty \Leftrightarrow 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta) = 1,$$

η από κοινού σ.π.π. γράφεται

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta^n} 1_{[0,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta).$$

Θα εφαρμόσουμε το παραγοντικό κριτήριο Neyman. Η παραπάνω πυκνότητα είναι στη μορφή

$$f(x;\theta) = g(T(X);\theta) \cdot h(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Theta,$$

όπου

$$g(T(X);\theta) = \frac{1}{\theta^n} 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta), \qquad T(X) = X_{(n)}, \qquad h(X) = 1_{[0,+\infty)}\left(X_{(1)}\right).$$

Επομένως, η $T(X)$ είναι επαρκής για το θ. Θα δείξουμε ότι είναι και πλήρης με χρήση του ορισμού της πληρότητας.

Βήμα 1: Βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής της $F_X(x)$.

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(y)dy = \int_0^x \frac{1}{\theta} dy = \left[\frac{y}{\theta}\right]_0^x = \frac{x}{\theta}, \quad 0 \le x \le \theta$$

Τι γίνεται για $x > \theta$;

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(y)dy = \int_0^\theta f(y)dy + \int_\theta^x f(y)dy = \frac{\theta}{\theta} + \int_\theta^x 0dy = 1 + 0 = 1$$

Βήμα 2: Βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \le t) = P\left(X_{(n)} \le t\right) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_n \le t) \\ &= P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t) \cdot \dots \cdot P(X_n \le t) = F_X(t) \cdot F_X(t) \cdot \dots \cdot F_X(t) \\ &= \left(F_X(t)\right)^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n = \frac{t^n}{\theta^n}, \quad 0 \le t \le \theta. \end{aligned}$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε την συνάρτηση πυκνότητας $f_T(t)$

$$f_T(t) = \left(F_T(t)\right)' = \left(\frac{t^n}{\theta^n}\right)' = \frac{1}{\theta^n} n t^{n-1}, \quad 0 \le t \le \theta.$$

Θα δείξουμε ότι η $T(X)$ είναι πλήρης. Έστω μία συνάρτηση $\psi: T(S) = [0, +\infty) \to \mathbb{R}$: $E\left(\psi(T)\right) = 0$. Τότε:

$$E\left(\psi(T)\right) = \int_0^\theta \psi(t) f_T(t) dt = \int_0^\theta \psi(t) \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta \psi(t) t^{n-1} dt,$$

άρα

$$E\left(\psi(T)\right) = 0 \Rightarrow \int_0^\theta \psi(t) t^{n-1} dt = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού στην παραπάνω σχέση, δηλαδή παραγωγίζουμε ως προς θ και παίρνουμε

$$\psi(\theta)\theta^{n-1} - 0 = 0 \Rightarrow \psi(\theta) = 0, \qquad \forall \theta \in \Theta = (0, +\infty).$$

Επομένως, η $T(X) = X_{(n)}$ είναι πλήρης σ.σ. για το θ.

Ερώτημα iii.

Θα βρούμε την εκτιμήτρια ροπών για το θ. Θα λύσουμε την εξίσωση:

$$E(X) = \overline{X}.$$

Για την τ.μ. $X \sim \text{Unif}(0,\theta)$ ισχύει $E(X) = \frac{\theta}{2}$. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε:

$$E(X) = \int_0^\theta x f(x) dx = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta} dx = \left[\frac{x^2}{2\theta}\right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{2\theta} - \frac{0}{2\theta} = \frac{\theta}{2}$$

Επομένως:

$$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \frac{\hat{\theta}}{2} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$$

Δηλαδή η εκτιμήτρια ροπών είναι η $\hat{\theta} = 2\overline{X}$.

Ερώτημα iv.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n 1_{[0,+\infty)}(x_{(1)}) 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta).$$

Ξαναγράφουμε την $L(\theta)$ σαν δίκλαδη συνάρτηση:

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} 1_{[0,+\infty)}(x_{(1)}), & \text{αν} \quad \theta \geq x_{(n)} \\ 0, & \text{αν} \quad \theta < x_{(n)} \end{cases}.$$

Ο πρώτος κλάδος είναι μη-αρνητικός, άρα αναζητάμε το σημείο μεγίστου σε αυτόν. Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\theta) = -n\log\theta \, 1_{[0,+\infty)}(x_{(1)}), \qquad \theta \geq x_{(n)}.$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ:

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} 1_{[0,+\infty)}(x_{(1)}) < 0.$$

Η παράγωγος είναι αρνητική για κάθε $\theta \in [x_{(n)}, +\infty)$, επομένως η $\ell(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το σημείο μεγίστου είναι το αριστερό άκρο του διαστήματος, δηλαδή έχουμε ΕΜΠ

$$\hat{\theta} = X_{(n)}.$$

Προσοχή! Εάν είχαμε δείγμα από την κατανομή $\text{Unif}(0,\theta)$ με σ.π.π. $f(x_i;\theta) = \frac{1}{\theta} 1_{(0,\theta)}(x_i)$, τότε η $\ell(\theta)$ θα ήταν αρνητική στο ανοιχτό διάστημα $(x_{(n)}, +\infty)$ και δεν θα υπήρχε σημείο μεγίστου, αφού στο $x_{(n)}$ θα είχαμε $\ell(x_{(n)}) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει ΕΜΠ.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι πολλές φορές η κατανομή $\text{Unif}(0,\theta)$ ορίζεται στο κλειστό διάστημα, δηλαδή με σ.π.π. $f(x_i;\theta) = \frac{1}{\theta} 1_{[0,\theta]}(x_i)$, όπως στο παρόν παράδειγμα. Για λόγους καθαρότητας γράφουμε $\text{Unif}[0,\theta]$.

Ερώτημα v.

Αναζητάμε την α.ε.ε.δ. του θ. Η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Lehmann–Scheffé. Χρειαζόμαστε μία α.ε. $\delta(X)$ η οποία να είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους σ.σ. $T(X)$. Θα δοκιμάσουμε την $T(X)$. Υπολογίζουμε τη μέση της τιμή:

$$E(T) = \int_0^\theta t\, f_T(t)dt = \int_0^\theta t\ \frac{1}{\theta^n} n t^{n-1} dt = \frac{1}{\theta^n} n \int_0^\theta t^n dt = \frac{1}{\theta^n} n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{1}{\theta^n} n \left[\frac{\theta^{n+1}}{n+1} - 0\right] = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Επομένως ορίζουμε την

$$\delta(X) = \frac{n+1}{n} T(X) = \frac{n+1}{n}\ X_{(n)},$$

η οποία είναι α.ε. του θ, αφού

$$E(\delta) = E\left(\frac{n+1}{n} T(X)\right) = \frac{n+1}{n} E\big(T(X)\big) = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}\theta = \theta.$$

Από το πόρισμα του θεωρήματος Lehmann–Scheffé, η $\delta(X)$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του θ.

Ερώτημα v.

Από τα προηγούμενα ερωτήματα βλέπουμε ότι η $E\big(T(X)\big)$ είναι συνάρτηση του θ, όχι του θ^w. Δοκιμάζουμε την $\delta(X) = T^w(X) = X_{(n)}^w$. Θα βρούμε τη μέση τιμή της $\delta(X)$.

$$E(\delta) = E(T^w) = \int_0^\theta t^w f_T(t)dt = \int_0^\theta t^w \frac{1}{\theta^n} n t^{n-1} dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^{w+n-1} dt = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{w+n}}{w+n}\right]_0^\theta = \frac{n\theta^w}{w+n}.$$

Βλέπουμε ότι η $\delta(X)$ δεν είναι αμερόληπτη για το θ^w. Ορίζουμε τη $\delta^*(X) = \frac{w+n}{n}\delta(X) = \frac{w+n}{n} X_{(n)}^w$. Από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι

$$E(\delta^*(X)) = E\left(\frac{w+n}{n}\delta(X)\right) = \frac{w+n}{n} E(\delta(X)) = \frac{w+n}{n}\frac{n\theta^w}{w+n} = \theta^w,$$

Επομένως η $\delta^*(X)$ είναι αμερόληπτη για το θ^w και επιπλέον είναι συνάρτηση της $Y_{(n)}$, επομένως είναι η α.ε.ε.δ. του θ^w. Παρατηρούμε ότι για $w = 1$, παίρνουμε τη λύση του προηγούμενου ερωτήματος.

Άσκηση 7: Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = 2e^{-2(x-\theta)}, \qquad x \geq \theta,$$

με παράμετρο $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$.

i. Να βρεθεί η ΕΡ (εκτιμήτρια ροπών) του θ.
ii. Να βρεθεί η ΕΜΠ (εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας) του $\theta^3 - 5$.
iii. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το θ.
iv. Να βρεθεί η α.ε.ε.δ. (αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς) του θ.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Έστω η τ.μ. $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$, με σ.π.π. $f_Y(y) = 2e^{-2y}$, $y \geq 0$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε ένα μετασχηματισμό θέσης. Πράγματι, θέτοντας $X = Y + \theta$, ή $X = g(Y)$ όπου $g(y) = y + \theta$ και $g^{-1}(x) = x - \theta$, έχουμε στήριγμα $S_X = [\theta, +\infty)$ και από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής

$$f_X(x;\theta) = f_Y(g^{-1}(x))\,\frac{dg^{-1}(x)}{dx} = 2e^{-2(x-\theta)} \cdot 1 = 2e^{-2(x-\theta)}, \qquad x \in [\theta, +\infty).$$

Το στήριγμα εξαρτάται από την παράμετρο θ, επομένως η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ.

Θέλουμε να βρούμε την εκτιμήτρια ροπών. Θα λύσουμε την εξίσωση $E(X) = \overline{X}$.

Πρέπει να υπολογίσουμε την $E(X)$. Αυτό μπορεί να γίνει με τον ορισμό:

$$E(X) = \int_\theta^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_\theta^{+\infty} x2e^{-2(x-\theta)}dx = \int_\theta^{+\infty} x2e^{-2x+2\theta}dx = e^{2\theta}\int_\theta^{+\infty} 2xe^{-2x}dx.$$

Κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$(xe^{-2x})' = e^{-2x} - 2xe^{2x} \Rightarrow 2xe^{-2x} = e^{-2x} - (xe^{-2x})'.$$

Επομένως:

$$\int_\theta^{+\infty} 2xe^{-2x}dx = \int_\theta^{+\infty} e^{-2x}dx - \int_\theta^{+\infty} (xe^{-2x})'dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_\theta^{+\infty} - [xe^{-2x}]_\theta^{+\infty}$$
$$= \left(0 + \frac{1}{2}e^{-2\theta}\right) - \left(0 - \theta e^{-2\theta}\right) = \left(\frac{1}{2} + \theta\right)e^{-2\theta}$$

Επιστρέφουμε στη μέση τιμή

$$E(X) = e^{2\theta}\left(\frac{1}{2} + \theta\right)e^{-2\theta} = \frac{1}{2} + \theta.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να στηριχθούμε στη σχέση $X = Y + \theta$. Παίρνοντας μέσες τιμές:

$$E(X) = E(Y + \theta) = E(Y) + \theta = \frac{1}{2} + \theta.$$

Για την εκτιμήτρια ροπών έχουμε:

$$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \frac{1}{2} + \hat{\theta} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{2}.$$

Άρα η εκτιμήτρια ροπών είναι η $\hat{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{2}$.

Ερώτημα ii.

Πρώτα απ όλα γράφουμε την πιθανοφάνεια

$$L(\theta) = f(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2e^{-2(x_i-\theta)} 1_{(\theta,+\infty)}(x_i) = 2^n e^{-2\sum(x_i-\theta)} \prod_{i=1}^{n} 1_{(\theta,+\infty)}(x_i).$$

Παρατηρούμε ότι:

- $\prod_{i=1}^{n} 1_{(\theta,+\infty)}(x_i) = 1 \Leftrightarrow x_i \geq \theta,\ i = 1, 2, \dots, n \ \Leftrightarrow x_1 \geq \theta \Leftrightarrow 1_{(\theta,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) = 1,$
- $\prod_{i=1}^{n} 1_{(\theta,+\infty)}(x_i) = 0 \Leftrightarrow \exists x_i < \theta \Leftrightarrow x_1 < \theta \Leftrightarrow 1_{(\theta,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) = 0.$

Επομένως

$$\prod_{i=1}^{n} 1_{(\theta,+\infty)}(x_i) = 1_{(\theta,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) = 1_{\left(-\infty,x_{(1)}\right)}(\theta).$$

Άρα

$$L(\theta) = 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} 1_{\left(-\infty,x_{(1)}\right)}(\theta).$$

Ξαναγράφουμε την $L(\theta)$ σαν δίκλαδη συνάρτηση:

$$L(\theta) = \begin{cases} 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & \text{αν} \quad \theta \leq x_{(1)} \\ 0, & \text{αν} \quad \theta > x_{(1)} \end{cases}.$$

Ο πρώτος κλάδος είναι μη-αρνητικός, άρα αναζητάμε το σημείο μεγίστου σε αυτόν. Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\theta) = -n\log 2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta), \qquad \theta \leq x_{(1)}.$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ:

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = 2n > 0.$$

Η παράγωγος είναι θετική για κάθε $\theta \in \left(-\infty, x_{(1)}\right]$, επομένως η $\ell(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Το σημείο μεγίστου είναι το δεξί άκρο του διαστήματος, δηλαδή έχουμε ΕΜΠ

$$\hat{\theta} = X_{(1)}.$$

Ζητείται η ΕΜΠ του $\theta^3 - 5$. Από το αναλλοίωτο της ΕΜΠ, έχουμε

$$\widehat{\theta^3 - 5} = \widehat{g(\theta)} = g\left(\hat{\theta}\right) = \hat{\theta}^3 - 5 = X_{(1)}^3 - 5.$$

Ερώτημα iii.

Θα χρησιμοποιήσουμε το παραγοντικό κριτήριο Neyman για να βρούμε επαρκή στατιστική συνάρτηση.

$$f(x;\theta) = 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} 1_{(-\infty,x_{(1)})}(\theta) = 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n} x_i + 2n\theta} 1_{(-\infty,x_{(1)})}(\theta) = 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{2n\theta} 1_{(-\infty,x_{(1)})}(\theta).$$

Επομένως $f(x;\theta) = h(X)g(T(X);\theta)$, όπου

$$g(T(X);\theta) = e^{+2n\theta} 1_{(-\infty,x_{(1)})}(\theta), \qquad T(X) = X_{(1)}.$$

Άρα η $T(X)$ είναι επαρκής. Θα δείξουμε ότι είναι και πλήρης.

Βήμα 1: Βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής της X_i

$$F_{X_i}(x) = P(X_i \le x) = \int_\theta^x f(y)dy = \int_\theta^x 2e^{-2(y-\theta)}dy = e^{2\theta}\int_\theta^x 2e^{-2y}dy = e^{2\theta}[-e^{-2y}]_\theta^x$$
$$= e^{2\theta}\left(-e^{-2x} + e^{-2\theta}\right) = -e^{-2(x-\theta)} + 1 = 1 - e^{-2(x-\theta)}, \qquad x \ge \theta$$

Βήμα 2: Βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής της $T(X)$

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P(T \le t) = P\left(X_{(1)} \le t\right) = 1 - P\left(X_{(1)} > t\right) = 1 - P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_n > t) \\
&= 1 - P(X_1 > t)\cdot P(X_2 > t)\cdot \dots \cdot P(X_n > t) \\
&= 1 - [1 - P(X_1 \le t)]\cdot[1 - P(X_2 \le t)]\cdot \dots \cdot\cdot [1 - P(X_n \le t)] \\
&= 1 - \left[1 - F_{X_1}(t)\right]\cdot\left[1 - F_{X_2}(t)\right]\cdot \dots \cdot\cdot \left[1 - F_{X_n}(t)\right] \\
&= 1 - \left(e^{-2(t-\theta)}\right)\left(e^{-2(t-\theta)}\right)\cdot \dots \cdot \left(e^{-2(t-\theta)}\right) \\
&= 1 - e^{-2n(t-\theta)}, \qquad t \ge \theta
\end{aligned}$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε την συνάρτηση πυκνότητας της $T(X)$,

$$f_T(t) = \left(F_T(t)\right)' = \left(1 - e^{-2n(t-\theta)}\right)' = -e^{-2n(t-\theta)}(-2n) = 2ne^{-2n(t-\theta)}, \qquad t \ge \theta$$

Είμαστε έτοιμοι να δείξουμε ότι η T είναι πλήρης. Έστω μία $\psi: T(S) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $E\left(\psi(T)\right) = 0$. Τότε:

$$E\left(\psi(T)\right) = \int_\theta^{+\infty} \psi(t) f_T(t)dt = \int_\theta^{+\infty} \psi(t) 2ne^{-2n(t-\theta)}dt = 2ne^{2n\theta}\int_\theta^{+\infty} \psi(t)e^{-2nt}dt.$$

Άρα

$$E\left(\psi(T)\right) = 0 \Rightarrow \int_\theta^{+\infty} \psi(t)e^{-2nt}dt = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-\theta} \psi(-u)e^{2nu}du = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού στην παραπάνω σχέση, δηλαδή παραγωγίζουμε ως προς θ και παίρνουμε

$$\psi(\theta)e^{-2n\theta} = 0 \Rightarrow \psi(\theta) = 0, \qquad \forall\theta \in \Theta = \mathbb{R}.$$

Επομένως, η $T(X) = X_{(1)}$ είναι πλήρης σ.σ. για το θ.

Ερώτημα iv.

Πρέπει να βρούμε την α.ε.ε.δ. του θ. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Lehmann–Scheffé. Εξετάζουμε αν η ΕΜΠ $\hat{\theta} = T(X) = X_{(1)}$ είναι αμερόληπτη. Έχουμε ήδη υπολογίσει την σ.π.π. της $T(X)$

$$f_T(t) = 2ne^{-2n(t-\theta)}, \qquad t \geq \theta.$$

Έστω μία τ.μ. $Y \sim Exp(2n)$. Τότε

$$f_Y(t) = 2ne^{-2nt}, \qquad t \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $T = Y + \theta$ (μπορούμε να το δείξουμε όπως και στο ερώτημα i.). Επομένως:

$$E(T) = E(Y + \theta) = E(Y) + \theta = \frac{1}{2n} + \theta.$$

Επιλέγουμε την εκτιμήτρια $\delta(X) = T(X) - \frac{1}{2n} = X_{(1)} - \frac{1}{2n}$. Τότε:

$$E\big(\delta(X)\big) = E\left(T(X) - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} + \theta - \frac{1}{2n} = \theta,$$

δηλαδή η $\delta(X)$ είναι μία α.ε. του θ που επιπλέον είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους $T(X)$. Από το πόρισμα του θεωρήματος Lehmann–Scheffé, η $\delta(X)$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του θ.

Άσκηση 8: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \geq 2$, τυχαίο δείγμα από την $\mathrm{Exp}(\theta)$ με $\theta \in \Theta = (0, +\infty)$. Να διατυπωθεί το θεώρημα Basu και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι οι τυχαίες μεταβλητές $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ και $S(X) = X_1 / \sum_{i=1}^{n} X_i$, είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

<u>Λύση:</u>

Σύμφωνα με το θεώρημα Basu, κάθε φραγμένα πλήρης και ελάχιστα επαρκής στατιστική συνάρτηση είναι στοχαστικά ανεξάρτητη από συμπληρωματικές στατιστικές συναρτήσεις. Επομένως θα δείξουμε ότι η $T(X)$ είναι φραγμένα πλήρης και ελάχιστα επαρκής, ενώ η $S(X)$ είναι συμπληρωματική στατιστική συνάρτηση.

Αρχικά, το στήριγμα της από κοινού κατανομής του δείγματος $S_X = [0, +\infty)^n$, είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου. Επιπλέον, η από κοινού σ.π.π. γράφεται στη μορφή

$$f(x; \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n\,; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} = e^{n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

δηλαδή γράφεται στη μορφή $f(x_i; \theta) = e^{-B(\theta) + \eta(\theta) T(x_i) + H(x_i)}$, $x_i \in S$, όπου

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad \eta(\theta) = -\theta, \qquad B(\lambda) = -n\log\theta, \qquad H(X) = 0.$$

Άρα η από κοινού κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ. Επομένως η $T(X)$ είναι επαρκής για το θ. Επιπλέον,

- $\eta(\Theta) = (-\infty, 0)$, περιέχει ανοιχτό, μη κενό, υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
- $d = g = 1$, όπου d η διάσταση της $T(X)$, g η διάσταση της $\eta(\theta)$.

Άρα, η $T(X)$ είναι επιπλέον πλήρης σ.σ. για το θ. Μένει να δείξουμε ότι είναι ελάχιστα επαρκής. Η $T(X)$ είναι ελάχιστα επαρκής ανν ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$\frac{f(x; \theta)}{f(y; \theta)} \text{ ανεξ. του } \theta \Leftrightarrow T(X) = T(Y).$$

Εδώ έχουμε ότι

$$\frac{f(x; \theta)}{f(y; \theta)} = \frac{\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} y_i}} = e^{\theta\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \text{ ανεξ. του } \theta \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \;\Leftrightarrow T(X) = T(Y).$$

Επομένως η $T(X)$ είναι (φραγμένα) πλήρης και ελάχιστα επαρκής σ.σ. για το θ.

Για την $S(X)$ παρατηρούμε ότι η εκθετική κατανομή είναι μία οικογένεια κατανομών κλίμακας, δηλαδή αν $\theta \in \Theta$ και $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$, τότε $X = Z/\theta \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, ή αντίστροφα, $Z = \theta X \sim \mathrm{Exp}(1)$. Επομένως,

$$S(X) = \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{\theta X_1}{\theta \sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{\theta X_1}{\sum_{i=1}^{n} \theta X_i},$$

όπου $\theta X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$, άρα ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος ακολουθεί την $\mathrm{Exp}(1)$ και ο παρονομαστής την $\mathrm{Gamma}(n, 1)$. Επομένως η κατανομή του $S(X)$ είναι ανεξάρτητη του θ. (Μπορεί να αποδειχθεί ότι $S(X) \sim \mathrm{Beta}(1, n)$ με το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής). Άρα η $S(X)$ είναι συμπληρωματική στατιστική συνάρτηση. Από το θεώρημα Basu έπεται άμεσα ότι οι $T(X), S(X)$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητες.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Άσκηση 1: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. με $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \Theta = \mathbb{R}$, σ^2 γνωστό.

i. Να κατασκευαστεί ένα$(1-\alpha)100\%$-δ.ε. ίσων ουρών για το μ.
ii. Ποιο είναι το ελάχιστο μέγεθος δείγματος ν έτσι ώστε να έχουμε $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. για το μ που να έχει μήκος $\leq d$, για κάποιο γνωστό d;
iii. Να γίνει αριθμητική εφαρμογή για $1-\alpha = 0.95, d = 2, \sigma^2 = 4,\ \ Z_{0.025} = 1.96$.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Από τις ιδιότητες της κανονικής κατανομής έχουμε ότι:

$$\overline{X_n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Κάνουμε τυποποίηση:

$$Z = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Θέλουμε ένα δ.ε. ίσων ουρών, επομένως χρειαζόμαστε δύο ποσοστημόρια c_1, c_2 ώστε:

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = 1 - \alpha, \qquad P(Z < c_1) = \frac{\alpha}{2}, \qquad P(Z > c_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Τα ποσοστημόρια αυτά μπορούν να υπολογιστούν (είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά), επομένως θεωρούνται γνωστά, και συμβολίζονται ως $c_1 = Z_{1-a/2}$, $c_2 = Z_{a/2}$. Συγκεκριμένα για την $N(0,1)$, τα δύο αυτά ποσοστημόρια είναι συμμετρικά ως προς το 0, δηλαδή $c_1 = -c_2 = -Z_{a/2}$. Το $(1-\alpha)100\%$ −δ.ε. είναι το

$$c_1 \leq Z \leq c_2 \Rightarrow -Z_{a/2} \leq \frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{a/2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2} \leq \mu \leq \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}.$$

Ερώτημα ii.

Το διάστημα εμπιστοσύνης που βρήκαμε έχει μήκος $2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a\backslash 2}$ Θέλουμε

$$2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a\backslash 2} \leq d \ \Rightarrow 2\frac{\sigma}{d} Z_{a\backslash 2} \leq \sqrt{n} \ \Rightarrow n \geq \left(2\frac{\sigma}{d} Z_{a\backslash 2}\right)^2.$$

Επομένως το έλαχιστο n είναι το $n_{min} = \left[\left(2\frac{\sigma}{d} Z_{a\backslash 2}\right)^2\right] + 1$, όπου με [...] συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος.

Ερώτημα iii.

$$n_{min} = \left[\left(2\frac{\sigma}{d} Z_{a\backslash 2}\right)^2\right] + 1 = \left[\left(2\frac{2}{2} 1.96\right)^2\right] + 1 = [3.92^2] + 1 = [15.3664] + 1 = 15 + 1 = 16.$$

Άσκηση 2: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. με $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \Theta = \mathbb{R}$, σ^2 γνωστό. Έστω $p = P(X_i > 0)$.

i. Να βρεθεί η ΕΜΠ $\widehat{p_n}$ του p. Θεωρείται γνωστό ότι η ΕΜΠ του μ είναι $\widehat{\mu_n} = \overline{X_n}$.
ii. Να κατασκευαστεί ένα ακριβές $(1-\alpha)$-δ.ε. $I_{1-a}(X)$ για το p.
iii. Να κατασκευαστεί ένα ασυμπτωτικό $(1-\alpha)$-δ.ε. $\widetilde{I_{1-a}}(X)$ για το p.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Αρχικά, θα εκφράσουμε το p ως συνάρτηση του μ.

$$p = P(X_i > 0) = P\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} > -\frac{\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le -\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right),$$

όπου $Z \sim N(0,1)$ και Φ η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $N(0,1)$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε $p = g(\mu)$, όπου $g(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$. Από το αναλλοίωτο της ΕΜΠ, έχουμε

$$\widehat{p_n} = \Phi\left(\frac{\widehat{\mu_n}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\overline{X_n}}{\sigma}\right).$$

Ερώτημα ii.

Για το μ έχουμε το $(1-\alpha)$-δ.ε

$$\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2} \le \mu \le \overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}.$$

Παρατηρούμε ότι η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (καθώς η Φ είναι γνησίως αύξουσα). Επομένως δεν θα επηρεάσει τη φορά της παραπάνω ανίσωσης. Τελικά:

$$g\left(\overline{X_n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}\right) \le g(\mu) \le g\left(\overline{X_n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{a/2}\right),$$

δηλαδή,

$$\Phi\left(\frac{\overline{X_n}}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{a/2}\right) \le p \le \Phi\left(\frac{\overline{X_n}}{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{a/2}\right).$$

Άρα ένα ακριβές $(1-\alpha)$-δ.ε. για το p είναι το

$$I_{1-a}(X) = \left[\Phi\left(\frac{\overline{X_n}}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{a/2}\right), \qquad \Phi\left(\frac{\overline{X_n}}{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_{a/2}\right)\right].$$

Ερώτημα iii.

Από το ΚΟΘ έχουμε ότι

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1),$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{d} \sigma Z.$$

Η $g(x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \Phi'\left(\frac{x}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \neq 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

επομένως εφαρμόζουμε μέθοδο Δέλτα:

$$\sqrt{n}\left(g(\overline{X_n}) - g(\mu)\right) \xrightarrow{d} g'(\mu)\sigma Z,$$

δηλαδή

$$\sqrt{n}(\widehat{p_n} - p) \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} Z.$$

Από τον ΑΝΜΑ έχουμε ότι

$$\overline{X_n} \xrightarrow{p} E(X_i) = \mu,$$

άρα από το Θεώρημα Συνεχούς Απεικόνισης (ΘΣΑ)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}.$$

Από το Λήμμα Slutsky διαιρώντας τις τ.μ. της παραπάνω σχέσης με εκείνες του ΚΟΘ,

$$\frac{\sqrt{n}(\widehat{p_n} - p)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}}} \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}} Z,$$

και απλοποιώντας παίρνουμε

$$Z_n = \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}}(\widehat{p_n} - p) \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ασυμπτωτικό δ.ε. βασιζόμενοι στην $N(0,1)$, δηλαδή

$$P\left(-Z_{a/2} \leq Z_n \leq Z_{a/2}\right) \longrightarrow P\left(-Z_{a/2} \leq Z \leq Z_{a/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Λύνουμε την ανίσωση:

$$-Z_{a/2} \leq Z_n \leq Z_{a/2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \widehat{p_n} - \frac{e^{-\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi n}} Z_{a/2} \leq p \leq \widehat{p_n} + \frac{e^{-\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi n}} Z_{a/2}.$$

Άρα ένα ασυμπτωτικό $(1-\alpha)$-δ.ε. για το p είναι το

$$\widetilde{I_{1-a}}(X) = \left[\widehat{p_n} - \frac{e^{-\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi n}} Z_{\frac{a}{2}}, \qquad \widehat{p_n} + \frac{e^{-\frac{\overline{X_n}^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi n}} Z_{a/2}\right].$$

Άσκηση 3: Έστω δείγμα από ανεξάρτητες $X_1, X_2, \dots, X_n$ με $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \theta), \theta \in \Theta = (0, +\infty)$ παράμετρος κλίμακας και α_i γνωστά.

i. Να κατασκευαστεί ένα $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. ίσων ουρών για το θ.
ii. Να κατασκευαστεί ένα $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. ίσων ουρών για το e^{θ}.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Το δείγμα δεν είναι τυχαίο, αλλά αυτό δε μας πειράζει, αρκεί που οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες. Από τις ιδιότητες της κατανομής $\Gamma(\alpha_i, \theta)$, έχουμε ότι:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(k, \theta),$$

όπου $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Ψάχνουμε συνάρτηση οδηγό. Ισχύει ότι

$$Y = \frac{2}{\theta}\, T \sim \Gamma\left(\frac{2k}{2}, 2\right) \equiv X_{2k}^2$$

Θέλουμε ποσοστημόρια c_1, c_2 τέτοια ώστε

$$P(c_1 \le Y \le c_2) = 1 - \alpha, \qquad P(Y < c_1) = \frac{\alpha}{2}, \qquad P(Y > c_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Τα ποσοστημόρια αυτά μπορούν να υπολογιστούν (είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά), επομένως θεωρούνται γνωστά, και συμβολίζονται ως $c_1 = X_{2k,1-\alpha/2}^2$, $c_2 = X_{2k,\alpha/2}^2$. Το $(1-\alpha)100\%$ −δ.ε. είναι το

$$c_1 \le Y \le c_2 \Rightarrow X_{2k,1-\alpha/2}^2 \le \frac{2}{\theta}\, T \le X_{2k,\alpha/2}^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{X_{2k,\alpha/2}^2} \le \theta \le \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{X_{2k,1-\alpha/2}^2}.$$

Αν το θ ήταν παράμετρος ρυθμού, το αντίστοιχο δ.ε. θα ήταν

$$\frac{X_{2k_n,1-\alpha/2}^2}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \le \theta \le \frac{X_{2k_n,\alpha/2}^2}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Ερώτημα ii.

Για το διάστημα του e^{θ}, καθώς η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα δεν αλλάζει τη φορά της ανίσωσης, επομένως:

$$e^{\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{X_{2k,\alpha/2}^2}} \le e^{\theta} \le e^{\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{X_{2k,1-\alpha/2}^2}}.$$

Άσκηση 4: Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ με $X_i \sim Pois(\lambda), \lambda \in \Theta = (0, +\infty)$.

i. Να κατασκευαστεί ένα ασυμπτωτικό $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. για το λ.

ii. Να βρεθεί η οριακή κατανομή της εκτιμήτριας $\widehat{\lambda_n} = \overline{X_n}$ και της $e^{-\overline{X_n}}$.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Για το τυχαίο δείγμα ισχύει $\mu = E(X_i) = \lambda \in \mathbb{R}, \sigma = Var(X_i) = \lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ):

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z, \;\; Z \sim N(0,1).$$

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ασυμπτωτικό δ.ε. βασιζόμενοι στην $N(0,1)$.

$$P\left(-Z_{a/2} \le Z_n \le Z_{a/2}\right) \longrightarrow P\left(-Z_{a/2} \le Z \le Z_{a/2}\right) = 1 - \alpha.$$

Για την Z_n έχουμε:

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}},$$

επομένως συναντάμε ένα πρόβλημα αφού η διπλή ανισότητα

$$-Z_{a/2} \le \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le Z_{a/2},$$

δύσκολα λύνεται ως προς λ. Επιπλέον, ακόμα και αν λυθεί στο παρόν πρόβλημα, σε άλλα είναι πιθανό να είναι αδύνατο να την λύσουμε. Επομένως θέλουμε να αντικαταστήσουμε το άγνωστο $\sqrt{\lambda}$ του παρονομαστή με μία γνωστή ποσότητα. Εδώ, μπορούμε να βάλουμε στη θέση του το $\sqrt{\overline{X_n}}$, όπου υπενθυμίζουμε ότι το $\overline{X_n}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του λ. Η αυστηρή απόδειξη των παραπάνω γίνεται ως εξής:

Από τον ΑΝΜΑ έχουμε

$$\overline{X_n} \xrightarrow{p} E(X_i) = \lambda.$$

Από το Θεώρημα Συνεχούς Απεικόνισης για την συνεχή συνάρτηση $g(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{x}}$, έχουμε

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\overline{X_n}}} \xrightarrow{p} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 1.$$

Από το Λήμμα Slutsky, συνδυάζοντας την παραπάνω σύγκλιση με αυτή του ΚΟΘ, έχουμε

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\overline{X_n}}} \xrightarrow{d} 1 \cdot Z, \;\; Z \sim N(0,1).$$

Τελικά,

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}} \xrightarrow{d} Z, \;\; Z \sim N(0,1).$$

Επομένως λύνουμε τη διπλή ανισότητα

$$-Z_{\frac{a}{2}} \leq Z_n \leq Z_{\frac{a}{2}} \Rightarrow -Z_{\frac{a}{2}} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}} \leq Z_{\frac{a}{2}} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overline{X_n} - \frac{\sqrt{\overline{X_n}}}{\sqrt{n}} Z_{a/2} \leq \lambda \leq \overline{X_n} + \frac{\sqrt{\overline{X_n}}}{\sqrt{n}} Z_{a/2}.$$

Ερώτημα ii.

Από το ΚΟΘ έχουμε ότι

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Από το λήμμα του Slutsky, κάνοντας χρήση της τετριμμένης σχέσης $\sqrt{\lambda} \xrightarrow{p} \sqrt{\lambda}$, έχουμε ότι

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{\lambda} \xrightarrow{d} \sqrt{\lambda}\, Z \sim N\left(0, \left(\sqrt{\lambda}\right)^2\right).$$

Επομένως,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\lambda_n} - \lambda\right) \xrightarrow{d} \sqrt{\lambda}\, Z \sim N(0, \lambda).$$

Για την $e^{-\overline{X_n}}$, έχουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με $g'(x) = -e^{-x} \neq 0$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Δέλτα:

$$\sqrt{n}\left(g\left(\widehat{\lambda_n}\right) - g(\lambda)\right) \xrightarrow{d} g'(\lambda)\sqrt{\lambda}\, Z \sim N\left(0, \lambda\left(g'(\lambda)\right)^2\right).$$

Επομένως,

$$\sqrt{n}\left(e^{-\widehat{\lambda_n}} - e^{-\lambda}\right) \xrightarrow{d} g'(\lambda)\sqrt{\lambda}\, Z \sim N\left(0, \lambda e^{-2\lambda}\right).$$

Άσκηση 5: Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$ με $X_i \sim Unif(0,\theta), \theta \in \Theta = (0,+\infty)$.

i. Να κατασκευαστεί ένα $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. ίσων ουρών για το θ.
ii. Να κατασκευαστεί ένα $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. ελαχίστου μήκους για το θ.

<u>Λύση:</u>

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη παρατήρηση $T(X) = X_{(n)}$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ. Η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνονται από τους τύπους (βλ. ασκήσεις σημειοεκτιμητικής)

$$F_T(t) = \frac{t^n}{\theta^n}, \qquad f_T(t) = \frac{1}{\theta^n} n t^{n-1}, \qquad 0 \le t \le \theta.$$

Θα κάνουμε τον μετασχηματισμό $Y = \frac{X}{\theta} \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. Τότε, ορίζοντας $T^*(Y) = Y_{(n)} = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ έχουμε

$$F_{T^*}(t) = t^n, \qquad f_{T^*}(t) = n t^{n-1}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Θέλουμε ένα δ.ε., επομένως χρειαζόμαστε δύο ποσοστημόρια c_1, c_2 ώστε:

$$P(c_1 \le T^* \le c_2) = 1-\alpha, \qquad P(T^* < c_1) = \alpha_1, \qquad P(T^* > c_2) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ποσοστημόρια αυτά αναλυτικά, αφού

$$P(T^* < c_1) = \alpha_1 \Leftrightarrow P(T^* \le c_1) = \alpha_1 \Leftrightarrow F_{T^*}(c_1) = \alpha_1 \Leftrightarrow {c_1}^n = \alpha_1 \Leftrightarrow c_1 = {\alpha_1}^{1/n},$$
$$P(T^* > c_2) = \alpha_2 \Leftrightarrow P(T^* \le c_2) = 1-\alpha_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow c_2 = (1-\alpha_2)^{1/n}.$$

Επομένως έχουμε

$$c_1 \le T^* \le c_2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \le \frac{X_{(n)}}{\theta} \le \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n} \Leftrightarrow \frac{X_{(n)}}{(1-\alpha_2)^{1/n}} \le \theta \le \frac{X_{(n)}}{{\alpha_1}^{1/n}}.$$

Ερώτημα i.

Θέλουμε ένα δ.ε. ίσων ουρών, επομένως χρειάζεται να υπολογίσουμε δύο ποσοστημόρια c_1, c_2 ώστε:

$$P(T^* < c_1) = \alpha_1 = \frac{\alpha}{2}, \qquad P(T^* > c_2) = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2},$$

Επομένως το $(1-\alpha)100\%$-δ.ε. ίσων ουρών για το θ είναι το

$$\frac{X_{(n)}}{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}} \le \theta \le \frac{X_{(n)}}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/n}}.$$

Ερώτημα ii.

Θέλουμε ένα δ.ε. ελαχίστου μήκους, επομένως χρειάζεται να υπολογίσουμε δύο ποσοστημόρια c_1, c_2 ώστε το μήκος του διαστήματος

$$\mathrm{d}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}}{{\alpha_1}^{1/n}} - \frac{\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}}{(1-\alpha_2)^{1/n}},$$

να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Γράφουμε το α_2 ως συνάρτηση του α_1:

$$(1-\alpha_2)^{1/n} = (1-\alpha+\alpha_1)^{1/n}.$$

Επομένως μπορούμε να δούμε το μήκος d ως συνάρτηση μόνο του α_1, δηλαδή

$$\mathrm{d}(x) = \frac{\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}}{x^{1/n}} - \frac{\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}}{(1-\alpha+x)^{1/n}}, \qquad x \in [0, a].$$

Ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση ως προς x:

$$\mathrm{d}'(x) = \mathrm{X}_{(\mathrm{n})}\left[-\frac{1}{nx^{\frac{1}{n}+1}} + \frac{1}{n(1-a+x)^{\frac{1}{n}+1}}\right] = \frac{\mathrm{X}_{(\mathrm{n})}}{n}\left[\frac{1}{(1-a+x)^{\frac{1}{n}+1}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}+1}}\right] < 0,$$

αφού $(1-a+x) > x$, επομένως το μήκος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x και ελαχιστοποιείται όταν το x πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή, δηλαδή $x = a$. Επομένως έχουμε $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0$, και το δ.ε. παίρνει τη μορφή

$$X_{(n)} \leq \theta \leq \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}}.$$

Άσκηση 6: Δίνονται παρατηρήσεις $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, από την κατανομή $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, όλες ανεξάρτητες. Αν μ_1 γνωστό και $\mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0$ άγνωστα, να κατασκευάσετε ένα $(1-\alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης για

i. το μ_2.
ii. τα σ_1^2 και σ_2^2.
iii. το λόγο σ_1^2/σ_2^2.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Καθώς το σ_2^2 είναι άγνωστο, δε μπορούμε να πάρουμε ως συνάρτηση οδηγό την

$$Z_2 \frac{\sqrt{n}(\overline{Y} - \mu_2)}{\sigma_2} \sim N(0,1).$$

(αφού πέρα από το μ_2 περιέχει και το σ_2). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την S_2^2 στη θέση της σ_2^2

$$S_2^2 = \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$$

$$T_2 = \frac{\overline{Y} - \mu_2}{S_2/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{Y} - \mu_2)/\sigma_2}{S_2/\sigma_2} = \frac{Z_2}{\sqrt{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{Z_2}{\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{(n-1)\sigma_2^2}}}$$

Αν θέσουμε $Q_2 = \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma_2^2}$, ξέρουμε ότι $Q_2 \sim X_{n-1}^2$, και $Z_2 \sim N(0,1)$, όπου τα $\overline{X}, S^2$ είναι ανεξάρτητα, επομένως

$$T_2 = \frac{Z_2}{\sqrt{\frac{Q_2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$$

Θέλουμε λοιπόν c_1, c_2 τέτοια ώστε

$$P(c_1 \le T_2 \le c_2) = 1 - a.$$

Αν επιλέξουμε ίσες ουρές, έχουμε $c_2 = t_{n-1,a/2}$ (το $\frac{\alpha}{2}$ −ποσοστημόριο). Η t είναι συμμετρική, επομένως το $c_1 = -t_{n-1,a/2}$.

$$c_1 \le T_2 \le c_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \overline{Y} - \frac{S_2}{\sqrt{n}} c_2 \le \mu_2 \le \overline{Y} - \frac{S_2}{\sqrt{n}} c_1$$

Αντικαθιστώντας τα c_1, c_2, παίρνουμε το $(1-a)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης

$$\overline{Y} - \frac{S_2}{\sqrt{n}} t_{n-1,\frac{a}{2}} \le \mu_2 \le \overline{Y} + \frac{S_2}{\sqrt{n}} t_{n-1,a/2}$$

Το οποίο γράφεται συνοπτικά ως $\mu_2 \in \overline{Y} \pm \frac{S_2}{\sqrt{n}} t_{n-1,a/2}$.

Παρατήρηση! Καθώς το $n \to +\infty$, η t_n συγκλίνει στην κανονική κατανομή $N(0,1)$. Επομένως για πολύ μεγάλα n, συχνά χρησιμοποιούμε $t_{n-1,a/2} \approx Z_{a/2}$.

Ερώτημα ii.

Για το σ_1^2, καθώς η μέση τιμή μ_1 είναι γνωστή, έχουμε δει ότι μία επαρκής σ.σ. είναι η $\sum(X_i - \mu)^2$. Γνωρίζουμε ότι

$$Q_1 = \frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim X_n^2.$$

Θέλουμε c_1, c_2 τέτοια ώστε

$$P(c_1 \le Q_1 \le c_2) = 1 - a.$$

Αν επιλέξουμε ίσες ουρές, έχουμε

$$P(Q_1 > c_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow c_2 = X_{n,a/2}^2,$$

$$P(Q_1 < c_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow c_1 = X_{n,1-a/2}^2.$$

Προσοχή, η X_n^2 δεν είναι συμμετρική. Έχουμε

$$c_1 \le Q_1 \le c_2 \Rightarrow c_1 \le \frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \le c_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{c_2} \le \sigma_1^2 \le \frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{c_1}.$$

Αντικαθιστώντας τα c_1, c_2, παίρνουμε το $(1-a)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης

$$\frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{X_{n,a/2}^2} \le \sigma_1^2 \le \frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{X_{n,1-a/2}^2}.$$

Για το σ_2^2, καθώς η μέση τιμή μ_2 είναι άγνωστη, έχουμε δει ότι μία επαρκής σ.σ. είναι η $\sum(Y_i - \overline{Y})^2$. Γνωρίζουμε ότι

$$Q_2 = \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma_2^2} \sim X_{n-1}^2.$$

Ομοίως με παραπάνω, παίρνουμε το $(1-a)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης

$$\frac{\sum(Y_i - Y)^2}{X_{n-1,a/2}^2} \le \sigma_2^2 \le \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{X_{n-1,1-a/2}^2}.$$

Ερώτημα iii.

Ισχύει ότι

$$Q_1 = \frac{\sum(X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim X_n^2, \qquad Q_2 = \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})^2}{\sigma_2^2} \sim X_{n-1}^2.$$

Επιπλέον, οι Q_1, Q_2 είναι ανεξάρτητες, αφού οι αρχικές παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες, επομένως

$$F = \frac{Q_1/n}{Q_2/(n-1)} = \frac{(n-1)\sum(X_i - \mu_1)^2}{n\sum(Y_i - \overline{Y})^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim \mathcal{F}_{n,n-1}.$$

Θέλουμε c_1, c_2 τέτοια ώστε

$$P(c_1 \leq F \leq c_2) = 1 - a.$$

Αν επιλέξουμε ίσες ουρές, έχουμε

$$P(F > c_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow c_2 = \mathcal{F}_{n,n-1,\ a/2},$$

$$P(F < c_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow c_1 = \mathcal{F}_{n,n-1,\ 1-a/2}.$$

Προσοχή, η κατανομή Fisher δεν είναι συμμετρική. Έχουμε

$$c_1 \leq F \leq c_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{(n-1)\sum(X_i - \mu_1)^2}{nc_2\sum(Y_i - \overline{Y})^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{(n-1)\sum(X_i - \mu_1)^2}{nc_1\sum(Y_i - \overline{Y})^2}.$$

Αντικαθιστώντας τα c_1, c_2, παίρνουμε το $(1-a)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης

$$\frac{(n-1)\sum(X_i - \mu_1)^2}{n\mathcal{F}_{n,n-1,\ a/2}\sum(Y_i - \overline{Y})^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{(n-1)\sum(X_i - \mu_1)^2}{n\mathcal{F}_{n,n-1,\ 1-a/2}\sum(Y_i - \overline{Y})^2}.$$

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Άσκηση 1: Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες τ.μ. όπου $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ και $Y \sim \mathrm{Exp}(5\theta), \theta > 0$.

i. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του $g(\theta) = 5\sqrt{\theta} + 8$.
ii. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο
$$H_0: \theta = \theta_0, \qquad H_1: \theta = \theta_1, \qquad (\theta_1 > \theta_0)$$
σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Προκειμένου να έχουμε ένα τυχαίο δείγμα, ονομάζουμε $X_1 = X$ και κάνουμε τον μετασχηματισμό $X_2 = 5Y \sim \mathrm{Exp}(\theta)$.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n\,; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta\, e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Παραγωγίζουμε την $\ell(\theta)$ και βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

$$\frac{\partial \ell(\theta_0)}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta_0} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Παραγωγίζουμε δεύτερη φορά την $\ell(\theta)$:

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0.$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο θ_0 είναι σημείο μεγίστου. Επομένως η ΕΜΠ του θ είναι η

$$\widehat{\theta_n} = \frac{1}{\overline{X_n}}.$$

Χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο της ΕΜΠ, έχουμε ότι η ΕΜΠ για το $g(\theta)$ είναι η

$$g\left(\widehat{\theta_n}\right) = 5\sqrt{\frac{1}{\overline{X_n}}} + 8.$$

Στο παρόν πρόβλημα, έχουμε 2 παρατηρήσεις, επομένως $\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2}{2}$.

Ερώτημα ii.

Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα Neyman-Pearson.

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < k \Leftrightarrow \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum_{i=1}^n x_i}}{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i}} < k \Leftrightarrow \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{(\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^n x_i} < k \Leftrightarrow e^{(\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^n x_i} < \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{-n} k$$

$$\Leftrightarrow (\theta_1-\theta_0)\sum_{i=1}^n x_i < \log\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{-n} k\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i < \frac{\log\left(\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{-n} k\right)}{(\theta_1-\theta_0)}$$

Καθώς η δεξιά πλευρά της ανίσωσης δεν είναι άμεσου ενδιαφέροντος, μπορούμε σε κάθε βήμα να την αντικαθιστούμε με $k_1, k_2, \ldots$ για ευκολία. Τελικά, παίρνουμε ότι

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i < c_a.$$

Στο παρόν πρόβλημα, καθώς έχουμε μόλις δύο παρατηρήσεις, η ελεγχοσυνάρτηση $T = \sum_{i=1}^n X_i$ απλοποιείται σε $T = X_1 + X_2 = X + 5Y$. Από το λήμμα Neyman-Pearson, ο Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & T < c_a \\ \gamma & T = c_a. \\ 0 & T > c_a \end{cases}$$

Από γνωστή ιδιότητα, αν $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ ανεξάρτητες, τότε $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, \theta)$, επομένως $T \sim \mathrm{Gamma}(2, \theta)$. Καθώς η ελεγχοσυνάρτηση T έχει συνεχή κατανομή, η μορφή του ελέγχου απλοποιείται σε

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & T \le c_a \\ 0 & T > c_a \end{cases}.$$

Απομένει να καθοριστεί η τιμή του c_a: $E_{\theta_0}\big(\varphi(X)\big) = \alpha$. Υπό τη μηδενική υπόθεση, έχουμε ότι:

$$T \sim \mathrm{Gamma}(2, \theta_0) \Leftrightarrow T^* = 2\theta_0 T \sim \mathrm{Gamma}\left(\frac{4}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv X_4^2.$$

Επομένως,

$$E_{\theta_0}\big(\varphi(X)\big) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(T \le c_a) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(2\theta_0 T \le 2\theta_0 c_a) = \alpha \Leftrightarrow P_{\theta_0}(T^* \le 2\theta_0 c_a) = \alpha$$
$$\Leftrightarrow P_{\theta_0}(T^* > 2\theta_0 c_a) = 1-\alpha \Leftrightarrow 2\theta_0 c_a = X_{4,1-\alpha}^2 \Leftrightarrow c_a = \frac{X_{4,1-\alpha}^2}{2\theta_0}.$$

Τελικά, ο Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α του ζητούμενου ελέγχου είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & X + 5Y \le \frac{X_{4,1-\alpha}^2}{2\theta_0} \\ 0 & X + 5Y > \frac{X_{4,1-\alpha}^2}{2\theta_0} \end{cases}.$$

Άσκηση 2: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή

$$f(x;\lambda) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \qquad \lambda > 0, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

i. Πραγματοποιήστε τον έλεγχο $H_0: \lambda = \lambda_0,\ H_1: \lambda = \lambda_1,\ (\lambda_1 < \lambda_0)$, σε ε.σ.σ. α. Είναι ο έλεγχος αυτός ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για την $H_0: \lambda = \lambda_0,\ H_1: \lambda < \lambda_0$;

ii. Εάν $n = 10, \lambda_0 = \frac{1}{2}$, ποιες είναι οι τιμές της ελεγχοσυνάρτησης για τις οποίες η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε ε.σ.σ. 0.05, αλλά όχι σε ε.σ.σ. 0.025;
Δίνονται $x^2_{0.025}(10) = 20.483, x^2_{0.05}(10) = 18.307, x^2_{0.025}(20) = 34.170, x^2_{0.05}(20) = 31.410,$ $x^2_{0.975}(10) = 3.247, x^2_{0.95}(10) = 3.940, x^2_{0.975}(20) = 9.951, x^2_{0.95}(20) = 10.851.$

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Κάνουμε το μετασχηματισμό $Y_i = |X_i| \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, με σ.π.π.

$$f(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}, \qquad \lambda > 0, \qquad 0 \le x < +\infty.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα Neyman-Pearson.

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < k \Leftrightarrow \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n y_i}}{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i}} < k_1 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n e^{(\lambda_1-\lambda_0)\sum_{i=1}^n y_i} < k_1 \Leftrightarrow e^{(\lambda_1-\lambda_0)\sum_{i=1}^n y_i} < k_2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{i=1}^n y_i < k_3 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i > k_4$$

Τελικά, παίρνουμε ότι

$$\frac{L(\lambda_0)}{L(\lambda_1)} < k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i > c_a.$$

Από γνωστή ιδιότητα, αν $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ανεξάρτητες, τότε $T(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \mathrm{Gamma}(n,\lambda)$. Καθώς η ελεγχοσυνάρτηση $T(Y)$ έχει συνεχή κατανομή, από το λήμμα Neyman-Pearson, ο Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 1 & T(Y) \ge c_a \\ 0 & T(Y) < c_a \end{cases}.$$

Απομένει να καθοριστεί η τιμή του c_a: $E_{\theta_0}\big(\varphi(Y)\big) = \alpha$. Υπό τη μηδενική υπόθεση, έχουμε ότι:

$$T(Y) \sim \mathrm{Gamma}(n,\lambda_0) \Leftrightarrow T^*(Y) = 2\lambda_0 T(Y) \sim \mathrm{Gamma}\left(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv X^2_{2n}.$$

Επομένως,

$$E_{\lambda_0}\big(\varphi(X)\big) = \alpha \Leftrightarrow P_{\lambda_0}(T(Y) \ge c_a) = \alpha \Leftrightarrow P_{\lambda_0}(2\lambda_0 T(Y) \ge 2\lambda_0 c_a) = \alpha \Leftrightarrow P_{\lambda_0}(T^*(Y) \ge 2\lambda_0 c_a) = \alpha$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda_0 c_a = x^2_\alpha(2n) \Leftrightarrow c_a = \frac{x^2_\alpha(2n)}{2\lambda_0}.$$

Τελικά, ο Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α του ζητούμενου ελέγχου είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq \frac{x_\alpha^2(2n)}{2\lambda_0} \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} |X_i| < \frac{x_\alpha^2(2n)}{2\lambda_0} \end{cases}.$$

Καθώς η μορφή του παραπάνω ελέγχου δεν εξαρτάται από την τιμή του λ_1, παρά μόνο από την μονοτονία $\lambda_1 < \lambda_0$, ο παραπάνω έλεγχος είναι και ο Ο.Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α για το $H_0: \lambda = \lambda_0,\ H_1: \lambda < \lambda_0$.

Ερώτημα ii.

Έστω δύο διαφορετικά ε.σ.σ. α, α^*, με $\alpha^* < \alpha$. Τότε, οι αντίστοιχες κρίσιμες περιοχές του παραπάνω ελέγχου είναι

$$K_\alpha = \left\{X: \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq c_a = \frac{x_\alpha^2(2n)}{2\lambda_0}\right\}, \qquad K_{\alpha^*} = \left\{X: \sum_{i=1}^{n} |X_i| \geq c_{a^*} = \frac{x_{\alpha^*}^2(2n)}{2\lambda_0}\right\},$$

με $K_{\alpha^*} \subset K_\alpha$. Προκειμένου να απορρίπτουμε σε ε.σ.σ. α αλλά όχι σε ε.σ.σ. α^*, πρέπει το δείγμα μας x να είναι τέτοιο ώστε $x \in K_\alpha$, $x \notin K_{\alpha^*}$, δηλαδή

$$c_\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i| < c_{a^*}.$$

Στο συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα έχουμε

$$c_a = \frac{x_\alpha^2(2n)}{2\lambda_0} = x_{0.05}^2(20) = 31.410,$$
$$c_{a^*} = \frac{x_{\alpha^*}^2(2n)}{2\lambda_0} = x_{0.025}^2(20) = 34.170,$$

επομένως πρέπει $\sum_{i=1}^{n} |X_i| \in [31.410, 34.170)$.

Άσκηση 3: Να κατασκευάσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο (ΟΙΕ) επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις

$$H_0: \theta \leq \theta_0, \qquad H_1: \theta > \theta_0,$$

όπου $\theta_0 > 0$ γνωστή σταθερά, όταν το τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα $f(x,\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1}\, I_{(0,1)}(x), \theta \in \Theta = (0,+\infty)$. Υπόδειξη: βρείτε την κατανομή της $Y = -2\theta_0 \sum_{i=1}^{n} \log(1-X_i)$, όταν η πραγματική τιμή είναι $\theta = \theta_0$.

<u>Λύση:</u>

Κάνουμε το μετασχηματισμό $Y_i = g(X_i) = -\log(1-X_i)$. Το στήριγμα της X_i είναι το $S_{X_i} = (0,1)$ επομένως το στήριγμα της Y_i είναι το $S_{Y_i} = g(S_{X_i}) = (0,+\infty)$. Η σ.π.π. της τ.μ. Y_i μπορεί να βρεθεί από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής:

$$f_{Y_i}(y;\theta) = f_{X_i}(g^{-1}(y);\theta)\, \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Έχουμε $g^{-1}(y) = 1 - e^{-y}$, επομένως

$$f_{Y_i}(y;\theta) = \theta[1-(1-e^{-y})]^{\theta-1}\, I_{(0,+\infty)}(y)\, |e^{-y}| = \theta e^{-(\theta-1)y} e^{-y} I_{(0,+\infty)}(y) = \theta e^{-\theta y} I_{(0,+\infty)}(y),$$

Δηλαδή $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, όπου θ παράμετρος ρυθμού. Θα βρούμε την κατανομή του δείγματος των Y_i:

$$f_Y(y;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta y_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} y_i} = e^{n \log\theta - \theta \sum_{i=1}^{n} y_i},$$

Με στήριγμα το $S_Y = (0,+\infty)^n$. Επομένως, η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $Q(\theta) = -\theta$ (φθίνουσα) και $T(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, άρα έχει την ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών (ΜΛΠ) ως προς την $T(Y)$. Ο Ομοιόμορφα Ισχυρότατος Έλεγχος (ΟΙΕ) σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 1 & T(Y) < c_a \\ \gamma & T(Y) = c_a, \\ 0 & T(Y) > c_a \end{cases}$$

όπου καθώς η $T(Y)$ είναι συνεχής κατανομή, ο έλεγχος απλοποιείται σε

$$\varphi(Y) = \begin{cases} 1 & T(Y) \leq c_a \\ 0 & T(Y) > c_a \end{cases}.$$

Απομένει να υπολογιστεί η σταθερά c_a, τέτοια ώστε $E_{\theta_0}(\varphi(Y)) = \alpha$. Υπό την υπόθεση ότι η πραγματική τιμή του θ είναι θ_0, ισχύει ότι $T(Y) \sim \mathrm{Gamma}(n, \theta_0)$, ή ισοδύναμα $T^*(Y) = 2\theta_0 T(Y) \sim \mathrm{Gamma}\left(\frac{2n}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv X_{2n}^2$ επομένως

$$E_{\theta_0}(\varphi(Y)) = P_{\theta_0}(T(Y) \leq c_a) = P_{\theta_0}(2\theta_0 T(Y) \leq 2\theta_0 c_a) = P_{\theta_0}(T^*(Y) \leq 2\theta_0 c_a),$$

$$P_{\theta_0}(T^*(Y) \leq 2\theta_0 c_a) = \alpha \Leftrightarrow X_{2n,1-\alpha}^2 = 2\theta_0 c_a \Leftrightarrow c_a = \frac{X_{2n,1-\alpha}^2}{2\theta_0}.$$

Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i) \geq \frac{X^2_{2n,1-\alpha}}{2\theta_0} \\ 0 & -\sum_{i=1}^{n} \log(1 - X_i) < \frac{X^2_{2n,1-\alpha}}{2\theta_0} \end{cases}.$$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1: Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με αθροιστική συνάρτηση

$$F(x;\theta) = \frac{x-1}{\theta-1}, \qquad \theta > 1, \qquad 1 \le x \le \theta.$$

i. Να εξετάσετε αν η συγκεκριμένη κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.
ii. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για το θ.
iii. Να βρεθεί η ΕΡ του θ.
iv. Να βρεθεί η ΕΜΠ του θ.
v. Να βρεθεί α.ε.ε.δ. του θ.
vi. Να βρεθεί ένα $(1-\alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για το θ.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Το στήριγμα της κατανομής μίας παρατήρησης είναι το $S = [1, \theta]$, το οποίο εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο. Επομένως η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση κατανομής είναι αυτή της $\mathrm{Unif}(1, \theta)$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής είναι

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta-1}, \qquad \theta > 1, \qquad 1 \le x \le \theta.$$

Ερώτημα ii.

Διατάσσουμε το δείγμα σε αύξουσα σειρά $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του δείγματος είναι:

$$f(x;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta-1} 1_{[1,\theta]}(x_i) = \left(\frac{1}{\theta-1}\right)^n \prod_{i=1}^{n} 1_{[1,\theta]}(x_i)$$
$$= \left(\frac{1}{\theta-1}\right)^n 1_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) 1_{(-\infty,\theta]}\left(x_{(n)}\right).$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\prod_{i=1}^{n} 1_{[1,\theta]}(x_i) = 1$ ανν όλα τα x_i να είναι στο διάστημα $[1, \theta]$, δηλαδή ανν $1 \le x_{(1)},\ x_{(n)} \le \theta$. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι

$$1_{(-\infty,\theta]}\left(x_{(n)}\right) = 1 \Leftrightarrow -\infty < x_{(n)} \le \theta < +\infty \Leftrightarrow 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta) = 1,$$

η από κοινού σ.π.π. γράφεται

$$f(x;\ \theta) = \left(\frac{1}{\theta-1}\right)^n 1_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta).$$

Θα εφαρμόσουμε το παραγοντικό κριτήριο Neyman. Η παραπάνω πυκνότητα είναι στη μορφή

$$f(x;\theta) = g(T(X);\theta) \cdot h(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \theta \in \Theta,$$

όπου

$$g(T(X);\theta) = \left(\frac{1}{\theta-1}\right)^n 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta), \qquad T(X) = X_{(n)}, \qquad h(X) = 1_{[1,+\infty)}\left(X_{(1)}\right).$$

Επομένως, η $T(X)$ είναι επαρκής για το θ. Θα δείξουμε ότι είναι και πλήρης με χρήση του ορισμού της πληρότητας. Αρχικά, βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$

$$F_T(t) = P(T \le t) = P\left(X_{(n)} \le t\right) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_n \le t)$$
$$= P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t) \cdot \dots \cdot P(X_n \le t) = F_X(t) \cdot F_X(t) \cdot \dots \cdot F_X(t)$$
$$= \left(F_X(t)\right)^n = \left(\frac{t-1}{\theta-1}\right)^n, \quad 1 \le t \le \theta.$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε την συνάρτηση πυκνότητας $f_T(t)$

$$f_T(t) = \left(F_T(t)\right)' = \left(\left(\frac{t-1}{\theta-1}\right)^n\right)' = \frac{n(t-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}, \quad 1 \le t \le \theta.$$

Θα δείξουμε ότι η $T(X)$ είναι πλήρης. Έστω μία συνάρτηση $\psi: T(S) = [1, +\infty) \to \mathbb{R}$: $E\left(\psi(T)\right) = 0$. Τότε:

$$E\left(\psi(T)\right) = \int_1^\theta \psi(t) f_T(t) dt = \int_1^\theta \psi(t) \frac{n(t-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n} dt = \frac{n}{(\theta-1)^n} \int_1^\theta \psi(t)(t-1)^{n-1} dt,$$

άρα

$$E\left(\psi(T)\right) = 0 \Rightarrow \int_1^\theta \psi(t)(t-1)^{n-1} dt = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού στην παραπάνω σχέση, δηλαδή παραγωγίζουμε ως προς θ και παίρνουμε

$$\psi(\theta)(\theta-1)^{n-1} - 0 = 0 \Rightarrow \psi(\theta) = 0, \qquad \forall \theta \in \Theta = (1, +\infty).$$

Επομένως, η $T(X) = X_{(n)}$ είναι πλήρης σ.σ. για το θ.

Ερώτημα iii.

Θα βρούμε την εκτιμήτρια ροπών για το θ. Θα λύσουμε την εξίσωση:

$$E(X) = \overline{X}.$$

Για την τ.μ. $X \sim \text{Unif}(1, \theta)$ ισχύει $E(X) = \frac{\theta+1}{2}$. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε:

$$E(X) = \int_1^\theta x f(x) dx = \int_1^\theta x \frac{1}{\theta-1} dx = \left[\frac{x^2}{2(\theta-1)}\right]_1^\theta = \frac{\theta^2-1}{2(\theta-1)} = \frac{\theta+1}{2}.$$

Επομένως:

$$E(X) = \overline{X} \Rightarrow \frac{\hat{\theta}+1}{2} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X} - 1.$$

Δηλαδή η εκτιμήτρια ροπών είναι η $\hat{\theta} = 2\overline{X} - 1$.

Ερώτημα iv.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n 1_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) 1_{[x_{(n)},+\infty)}(\theta).$$

Ξαναγράφουμε την $L(\theta)$ σαν δίκλαδη συνάρτηση:

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}\, 1_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right), & \text{αν} \quad \theta \geq x_{(n)} \\ 0, & \text{αν} \quad \theta < x_{(n)} \end{cases}.$$

Ο πρώτος κλάδος είναι μη-αρνητικός, άρα αναζητάμε το σημείο μεγίστου σε αυτόν. Λογαριθμίζουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$\ell(\theta) = -n\log\theta\, 1_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right), \qquad \theta \geq x_{(n)}.$$

Παραγωγίζουμε ως προς θ:

$$\frac{d\ell(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} 1_{[1,+\infty)}\left(x_{(1)}\right) < 0.$$

Η παράγωγος είναι αρνητική για κάθε $\theta \in \left[x_{(n)}, +\infty\right)$, επομένως η $\ell(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το σημείο μεγίστου είναι το αριστερό άκρο του διαστήματος, δηλαδή έχουμε ΕΜΠ

$$\hat{\theta} = X_{(n)}.$$

Ερώτημα v.

Αναζητάμε την α.ε.ε.δ. του θ. Η κατανομή δεν ανήκει στην ΕΟΚ, επομένως θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Lehmann–Scheffé. Χρειαζόμαστε μία α.ε. $\delta(X)$ η οποία να είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους σ.σ. $T(X)$. Θα δοκιμάσουμε την $T(X) - 1$. Υπολογίζουμε τη μέση της τιμή:

$$E(T-1) = \int_1^\theta (t-1) f_T(t)dt = \int_1^\theta (t-1)\, \frac{n(t-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n} dt = \frac{n}{(\theta-1)^n} \int_1^\theta (t-1)^n dt$$
$$= \frac{n}{(\theta-1)^n} \left[\frac{(t-1)^{n+1}}{n+1}\right]_1^\theta = \frac{n}{(\theta-1)^n} \left[\frac{(\theta-1)^{n+1}}{n+1} - 0\right] = \frac{n}{n+1}(\theta-1).$$

Επομένως ορίζουμε την

$$\delta(X) = \frac{n+1}{n}(T-1) + 1 = \frac{n+1}{n}\, X_{(n)} - \frac{1}{n},$$

η οποία είναι α.ε. του θ, αφού

$$E(\delta) = E\left(\frac{n+1}{n}(T-1) + 1\right) = \frac{n+1}{n}\, E(T-1) + 1 = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1}(\theta-1) + 1 = \theta.$$

Από το πόρισμα του θεωρήματος Lehmann–Scheffé, η $\delta(X)$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς του θ.

Ερώτημα vi.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη παρατήρηση $T(X) = X_{(n)}$ είναι επαρκής και πλήρης σ.σ. για το θ, με συνάρτηση κατανομής

$$F_T(t) = \left(\frac{t-1}{\theta-1}\right)^n, \quad 1 \le t \le \theta.$$

Θέλουμε ένα δ.ε., επομένως χρειαζόμαστε δύο ποσοστημόρια c_1, c_2 ώστε:

$$P(c_1 \le T \le c_2) = 1 - \alpha, \qquad P(T < c_1) = \alpha_1, \qquad P(T > c_2) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ποσοστημόρια αυτά αναλυτικά, αφού

$$P(T < c_1) = \alpha_1 \Leftrightarrow P(T \le c_1) = \alpha_1 \Leftrightarrow F_T(c_1) = \alpha_1 \Leftrightarrow \left(\frac{c_1-1}{\theta-1}\right)^n = \alpha_1 \Leftrightarrow c_1 = (\theta-1){\alpha_1}^{1/n} + 1,$$

$$P(T > c_2) = \alpha_2 \Leftrightarrow P(T \le c_2) = 1 - \alpha_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow c_2 = (\theta-1)(1-\alpha_2)^{1/n} + 1.$$

Επομένως έχουμε

$$c_1 \le T \le c_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \frac{X_{(n)}-1}{(1-\alpha_2)^{1/n}} + 1 \le \theta \le \frac{X_{(n)}-1}{{\alpha_1}^{1/n}} + 1.$$

Θέλουμε ένα δ.ε. ελαχίστου μήκους, επομένως χρειάζεται να υπολογίσουμε δύο ποσοστημόρια c_1, c_2 ώστε το μήκος του διαστήματος

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{X_{(n)}-1}{{\alpha_1}^{1/n}} + 1\right) - \left(\frac{X_{(n)}-1}{(1-\alpha_2)^{1/n}} + 1\right) = \frac{X_{(n)}-1}{{\alpha_1}^{1/n}} - \frac{X_{(n)}-1}{(1-\alpha_2)^{1/n}},$$

να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Γράφουμε το α_2 ως συνάρτηση του α_1:

$$(1-\alpha_2)^{1/n} = (1-\alpha+\alpha_1)^{1/n}.$$

Επομένως μπορούμε να δούμε το μήκος d ως συνάρτηση μόνο του α_1, δηλαδή

$$d(x) = \frac{X_{(n)}-1}{x^{1/n}} - \frac{X_{(n)}-1}{(1-\alpha+x)^{1/n}}, \qquad x \in [0, a].$$

Ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση ως προς x:

$$d'(x) = X_{(n)}\left[-\frac{1}{nx^{\frac{1}{n}+1}} + \frac{1}{n(1-a+x)^{\frac{1}{n}+1}}\right] = \frac{X_{(n)}}{n}\left[\frac{1}{(1-a+x)^{\frac{1}{n}+1}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}+1}}\right] < 0,$$

αφού $(1-a+x) > x$, επομένως το μήκος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x και ελαχιστοποιείται όταν το x πάρει τη μέγιστη δυνατή τιμή, δηλαδή $x = a$. Επομένως έχουμε $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = 0$, και το δ.ε. παίρνει τη μορφή

$$X_{(n)} \le \theta \le \frac{X_{(n)}-1}{\alpha^{1/n}} + 1.$$

Άσκηση 2: Δίνεται τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή $\Gamma(\theta_1, \theta_2), \theta_1, \theta_2 > 0$, άγνωστα. Δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1)} x^{\theta_1 - 1} e^{-\theta_2 x}, \qquad x \geq 0.$$

i. Να δειχθεί ότι η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ.
ii. Να βρεθεί μία επαρκής και πλήρης σ.σ. για το $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.
iii. Αν $T_1 = \sum_{i=1}^n \log X_i$, $T_2 = \sum_{i=1}^n X_i$, , να βρεθούν οι $E(T_1), E(T_2), Var(T_2)$ και $Cov(T_1, T_2)$.
iv. Να βρεθεί η ΕΡ (εκτιμήτρια ροπών) του θ.
v. Θεωρώντας μοναδική άγνωστη σταθερά το θ_2 (θ_1 γνωστό και $\theta = \theta_2$), να κατασκευάσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο (ΟΙΕ) επιπέδου σημαντικότητας $\alpha \in (0,1)$ για τις υποθέσεις

$$H_0: \theta_2 \leq \theta_2^\star, \qquad H_1: \theta_2 > \theta_2^\star,$$

όπου $\theta_2^\star > 0$ γνωστή σταθερά.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Παρατηρούμε ότι το στήριγμα της από κοινού κατανομής του δείγματος είναι το $S = [0, +\infty)^n$, ανεξάρτητο του θ. Επιπλέον,

$$f(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta_2^{\theta_1}}{\Gamma(\theta_1)} x^{\theta_1 - 1} e^{-\theta_2 x} = \frac{\theta_2^{n\theta_1}}{\Gamma^n(\theta_1)} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta_1 - 1} e^{-\theta_2 \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$= e^{n\theta_1 \log \theta_2 - n \log \Gamma(\theta_1) + \theta_1 \sum_{i=1}^n \log x_i - \theta_2 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log x_i}$$

Άρα η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ, με

$$B(\theta) = -n\theta_1 \log \theta_2 + n \log \Gamma(\theta_1), \eta(\theta) = (\theta_1, -\theta_2), T(X) = \left(\sum_{i=1}^n \log X_i, \sum_{i=1}^n X_i \right), H(X) = -\sum_{i=1}^n \log X_i$$

Ερώτημα ii.

Από γνωστό θεώρημα της ΕΟΚ, η $T(X)$ είναι επαρκής για το θ. Επιπλέον ο παραμετρικός χώρος είναι ο $\Theta = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ άρα το $\eta(\Theta) = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$ περιέχει ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και οι $\eta(\theta), T(X)$ έχουν την ίδια διάσταση ($g = d = 2$). Επομένως η $T(X)$ είναι και πλήρης για το θ.

Ερώτημα iii.

Παρατηρούμε ότι $T(X) = \left(T_1(X), T_2(X)\right) = (\sum_{i=1}^n \log X_i, \sum_{i=1}^n X_i)$. Θα φέρουμε την σ.π.π. στην κανονική μορφή της ΕΟΚ, δηλαδή στη μορφή

$$f(x_i; \eta) = e^{-A(\eta) + \sum_{j=1}^d \eta_j T_j(x_i) + H(x_i)}, \qquad x_i \in S.$$

Κάνουμε την αναπαραμετροποίηση $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (\theta_1, -\theta_2)$ και παίρνουμε

$$f(x; \eta) = e^{n\eta_1 \log(-\eta_2) - n \log \Gamma(\eta_1) + \eta_1 \sum_{i=1}^n \log x_i + \eta_2 \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log x_i}, \qquad x \geq 0.$$

Δηλαδή $A(\eta) = -n\eta_1 \log(-\eta_2) + n \log \Gamma(\eta_1)$. Επομένως έχουμε ότι

$$E\big(T_1(X)\big) = \frac{dA(\eta)}{d\eta_1} = -n\log(-\eta_2) + \frac{n\Gamma'(\eta_1)}{\Gamma(\eta_1)} = -n\log\theta_2 + \frac{n\Gamma'(\theta_1)}{\Gamma(\theta_1)},$$
$$E\big(T_2(X)\big) = \frac{dA(\eta)}{d\eta_2} = -\frac{n\eta_1}{\eta_2} = \frac{n\theta_1}{\theta_2},$$
$$Var\big(T_2(X)\big) = \frac{d^2A(\eta)}{d\eta_2^2} = \frac{n\eta_1}{\eta_2^2} = \frac{n\theta_1}{\theta_2^2},$$
$$Cov\big(T_1(X), T_2(X)\big) = \frac{d^2A(\eta)}{d\eta_1 d\eta_2} = -\frac{n}{\eta_2} = \frac{n}{\theta_2}.$$

Ερώτημα iv.

Γνωρίζουμε ότι για την $X \sim \Gamma(\theta_1, \theta_2)$, όπου θ_2 παράμετρος ρυθμού, ισχύει $E(X) = \frac{\theta_1}{\theta_2}, Var(X) = \frac{\theta_1}{\theta_2^2}$.

Θα βρούμε την εκτιμήτρια ροπών. Παρατηρούμε ότι:

$$\theta_2 = \frac{E(X)}{Var(X)}, \theta_1 = \frac{E^2(X)}{Var(X)}.$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο ροπών, λύνουμε το σύστημα $E(X) = \overline{X}$ και $Var(X) = M_2$ ως προς τις παραμέτρους και παίρνουμε:

$$\widehat{\theta_2} = \frac{\overline{X}}{M_2}, \widehat{\theta_1} = \frac{(\overline{X})^2}{M_2}.$$

Ερώτημα v.

Θεωρώντας το θ_1 γνωστό, η κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $\eta(\theta_2) = -\theta_2$ (φθίνουσα) και $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$, άρα έχει την ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών (ΜΛΠ) ως προς την $T(X)$. Ο Ομοιόμορφα Ισχυρότατος Έλεγχος (ΟΙΕ) σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & T(X) < c_a \\ \gamma & T(X) = c_a, \\ 0 & T(X) > c_a \end{cases}$$

όπου καθώς η $T(X)$ είναι συνεχής κατανομή, ο έλεγχος απλοποιείται σε

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & T(X) \le c_a \\ 0 & T(X) > c_a \end{cases}.$$

Απομένει να υπολογιστεί η σταθερά c_a, τέτοια ώστε $E_{\theta_2^\star}\big(\varphi(X)\big) = \alpha$. Υπό την υπόθεση ότι η πραγματική τιμή του θ είναι $\theta_2^\star$, ισχύει ότι $T(X) \sim Gamma(n\theta_1, \theta_2^\star)$, ή $T^*(X) = 2\theta_2^\star T(X) \sim Gamma\left(\frac{2n\theta_1}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv X^2_{2n\theta_1}$, επομένως

$$E_{\theta_2^\star}\big(\varphi(X)\big) = P_{\theta_2^\star}(T(X) \ge c_a) = P_{\theta_2^\star}(2\theta_2^\star T(X) \ge 2\theta_2^\star c_a) = P_{\theta_2^\star}(T^*(X) \ge 2\theta_2^\star c_a),$$

$$P_{\theta_2^\star}(T^*(X) \ge 2\theta_2^\star c_a) = \alpha \Leftrightarrow X^2_{2n\theta_1,\alpha} = 2\theta_2^\star c_a \Leftrightarrow c_a = \frac{X^2_{2n\theta_1,\alpha}}{2\theta_2^\star}.$$

Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{X^2_{2n\theta_1,\alpha}}{2\theta_2^\star} \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} X_i > \frac{X^2_{2n\theta_1,\alpha}}{2\theta_2^\star} \end{cases}.$$

Άσκηση 3: Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή με πυκνότητα

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\cdot|x|\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

όπου $\sigma > 0$ άγνωστη παράμετρος.

i. Να υπολογιστούν η μέση τιμή $E(X_1)$ και η διασπορά $V(X_1)$ και να προταθεί κατάλληλη εκτιμήτρια ροπών $\widetilde{\sigma_n}$ του σ.
ii. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.) $\widehat{\sigma_n}$ του σ.
iii. Να υπολογιστεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ της ε.μ.π. $\widehat{\sigma_n}$ του σ και να εξεταστεί αν είναι συνεπής εκτιμήτρια.
iv. Να δειχθεί ότι η ε.μ.π. $\widehat{\sigma_n}$ του σ είναι ασυμπτωτικά κανονική.
v. Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του σ.

<u>Λύση:</u>

Παρατήρηση! Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η κατανομή που δίνεται ονομάζεται Διπλή Εκθετική ή Laplace. Αν θέσουμε $Y_i = |X_i|$, τότε $Y_i \sim Exp(\sigma)$, όπου σ παράμετρος κλίμακας. Παρ' όλα αυτά η λύση που παρουσιάζεται παρακάτω δεν κάνει χρήση αυτής της ιδιότητας (η οποία απλοποιεί τους υπολογισμούς).

Ερώτημα i.

Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της X_1 θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας είναι άρτια (δηλ. $f(-x) = f(x)$). Επομένως έχουμε:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στο πρώτο ολοκλήρωμα, $y = -x$, και έχουμε:

$$E(X_1) = \int_{+\infty}^{0} -yf(-y)(-1)dy + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} yf(y)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή (ροπή πρώτης τάξης) δεν είναι συνάρτηση της άγνωστης παραμέτρου σ. Για να βρούμε την εκτιμήτρια ροπών πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E(X_1^2)$ ή τη διασπορά $Var(X_1^2)$. Προκειμένου να βρούμε τη διασπορά θα υπολογίσουμε τη ροπή δεύτερης τάξης $E(X_1^2)$.

$$E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Κάνοντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής, προκύπτει ότι

$$E(X_1^2) = +\int_{0}^{+\infty} y^2 f(y)dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Παρατήρηση! Τα παραπάνω αφορούν οποιαδήποτε κατανομή με άρτια συνάρτηση πυκνότητας. Παρατηρήστε ότι ο τύπος της συγκεκριμένης πυκνότητας δε χρησιμοποιήθηκε πουθενά (παρά μόνο η ιδιότητά της).

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα (παρατηρούμε ότι το $|x|$ μπορεί να απλοποιηθεί σε x):

$$E(X_1^2) = 2\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\cdot|x|\right)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\cdot x\right)dx.$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε είτε να λύσουμε το ολοκλήρωμα, είτε να παρατηρήσουμε ότι ταυτίζεται με τη $E(Y^2)$ όπου $Y \sim Exp(\sigma)$, όπου σ παράμετρος κλίμακας. Θεωρώντας γνωστή τη μέση τιμή και τη διασπορά στην εκθετική κατανομή, έχουμε:

$$E(X_1^2) = E(Y^2) = Var(Y) + E(Y)^2 = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 2\sigma^2.$$

Υπολογίζουμε την εκτιμήτρια ροπών $\widetilde{\sigma_n}$ του σ λύνοντας την εξίσωση:

$$\overline{X^2} = E(X_1^2) \Rightarrow \overline{X^2} = 2\tilde{\sigma}^2 \Rightarrow \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\overline{X^2}}{2}}.$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τη διασπορά,

$$M_2 = Var(X_1) \Rightarrow M_2 = 2\tilde{\sigma}^2 \Rightarrow \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{M_2}{2}}.$$

Ερώτημα ii.

Γράφουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας:

$$L(\sigma) = f(x_1, x_2, \dots, x_n\,;\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\sigma) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\cdot|x_i|\right) = \frac{1}{2^n\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right).$$

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας:

$$l(\sigma) = \log\left(\frac{1}{2^n\sigma^n}\exp\left(-\frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)\right) = -n\log 2 - n\log\sigma - \frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Παραγωγίζουμε ως προς σ:

$$l'(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Βρίσκουμε το σημείο ολικού μεγίστου:

$$l'(\sigma_0) = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\sigma_0} + \frac{1}{{\sigma_0}^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0 \Rightarrow \sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n} = \overline{|x_n|}.$$

$$l'(\sigma) > 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sigma < \sigma_0$$

$$l'(\sigma) < 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \sigma > \sigma_0$$

Επομένως έχουμε ολικό μέγιστο στο σ_0, άρα είναι η ε.μ.π., δηλαδή

$$\widehat{\sigma_n} = \overline{|X_n|}.$$

Ερώτημα iii.

Για το ΜΤΣ της $\widehat{\sigma_n}$ έχουμε ότι:

$$\text{ΜΤΣ}(\widehat{\sigma_n}, \sigma) = \text{bias}^2(\widehat{\sigma_n}, \sigma) + \text{Var}(\widehat{\sigma_n}).$$

Θα χρειαστούμε τις $E(|X_i|), \text{Var}(|X_i|)$, οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν είτε μέσω ορισμού, είτε μέσω της ΕΟΚ (εδώ θα δείξουμε το δεύτερο τρόπο).

Το στήριγμα της από κοινού κατανομής είναι το $S = \mathbb{R}^n$, ανεξάρτητο της άγνωστης παραμέτρου σ. Για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του δείγματος έχουμε δείξει στο προηγούμενο ερώτημα ότι:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n\,; \sigma) = \frac{1}{2^n \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{\sigma} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = \frac{1}{2^n} \exp\left(-n \log \sigma - \frac{1}{\sigma} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right).$$

Επομένως η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ και θέτοντας $\varphi = -\frac{1}{\sigma}$ παίρνουμε τη κανονική μορφή

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n\,; \varphi) = \frac{1}{2^n} \exp\left(-n \log\left(-\frac{1}{\varphi}\right) + \varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|\right).$$

Έχουμε $T(X) = \sum_{i=1}^{n} |X_i|\,, A(\varphi) = n \log\left(-\frac{1}{\varphi}\right)$. Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της $T(X)$ ως:

$$E\big(T(X)\big) = A'(\varphi) = n \frac{1}{-\frac{1}{\varphi}} \left(-\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{n}{\varphi} = n\sigma.$$

Αντίστοιχα, η διασπορά της $T(X)$ υπολογίζεται ως:

$$\text{Var}\big(T(X)\big) = A''(\varphi) = +\frac{n}{\varphi^2} = \nu\sigma^2.$$

Επιστρέφουμε στο ΜΤΣ. Για τη μεροληψία:

$$E(\widehat{\sigma_n}) = E\big(\overline{|X_n|}\big) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{n}\right) = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} |X_i|)}{n} = \sigma.$$

Επομένως

$$\text{bias}(\widehat{\sigma_n}, \sigma) = \sigma - \sigma = 0.$$

Για τη διασπορά:

$$\text{Var}(\widehat{\sigma_n}) = \text{Var}\big(\overline{|X_n|}\big) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i|}{n}\right) = \frac{\text{Var}(\sum_{i=1}^{n} |X_i|)}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Τελικά:

$$\text{ΜΤΣ}(\widehat{\sigma_n}, \sigma) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι για $n \to +\infty$, $\text{ΜΤΣ}(\widehat{\sigma_n}, \sigma) \to 0$, άρα η $\widehat{\sigma_n}$ είναι L_2 −συνεπής, άρα και συνεπής.

Ερώτημα iv.

Παρατηρούμε ότι η ε.μ.π. $\widehat{\sigma_n} = \overline{|X_n|}$ είναι ο δειγματικός μέσος για την ακολουθία $Y_i = |X_i|$, η οποία έχει $E(Y_i) = \sigma$ και $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$ (από το προηγούμενο ερώτημα). Από το Κ.Ο.Θ. έχουμε ότι

$$\sqrt{n}\frac{\overline{Y_n} - E(Y_i)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i)}} = \sqrt{n}\frac{\widehat{\sigma_n} - \sigma}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Χρησιμοποιώντας το Θ.Σ.Α. για την $g(x) = \sigma x$, ή το Λήμμα του Slutsky για την (τετριμμένη) σύγκλιση $\sigma \xrightarrow{p} \sigma$ έχουμε ότι

$$\sqrt{n}(\widehat{\sigma_n} - \sigma) \xrightarrow{d} \sigma Z \sim N(0, \sigma^2),$$

Επομένως η $\widehat{\sigma_n}$ είναι ασυμπτωτικά κανονική.

Ερώτημα v.

Εμφανίζουμε την ε.μ.π. στον τύπο της από κοινού κατανομής του δείγματος και την φέρνουμε σε κανονική μορφή θέτοντας $\varphi = -n/\sigma$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n\,; \sigma) = \frac{1}{2^n}\exp\left(-n\log\sigma - \frac{n}{\sigma}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}\right) = \frac{1}{2^n}\exp\left(-n\log\left(-\frac{n}{\varphi}\right) + \varphi\cdot\widehat{\sigma_n}\right).$$

Έχουμε $T^*(X) = \widehat{\sigma_n}$, $A^*(\varphi) = n\log\left(-\frac{n}{\varphi}\right)$. Η από κοινού κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ, επομένως η $T(X)$ είναι αποτελεσματική για τη $E\big(T(X)\big)$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της $T^*(X)$ ως:

$$E\big(T^*(X)\big) = A^{*\prime}(\varphi) = n\frac{1}{-\frac{n}{\varphi}}\left(-\frac{n}{\varphi}\right)' = -\frac{n}{\varphi} = \sigma.$$

Επομένως η $\widehat{\sigma_n}$ είναι αποτελεσματική για το σ.

Άσκηση 4: Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \dots, X_n$, από την κατανομή με πυκνότητα

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2}\exp\left(-\theta \cdot \frac{1-x}{x}\right), \qquad 0 < x < 1,$$

όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

i. Εξετάστε αν η παραπάνω οικογένεια κατανομών αποτελεί εκθετική οικογένεια και βρείτε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση $T(X_1, \dots, X_n)$.
ii. Ποια είναι η κατανομή της $Y_1 = \frac{1-X_1}{X_1}$;
iii. Υπολογίστε ένα $(1-\alpha)$-διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών, βασιζόμενοι στην επαρκή στατιστική συνάρτηση του ερωτήματος i.
iv. Να αποδείξετε ότι η κατανομή έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών και να πραγματοποιήσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο (ΟΙΕ) για την υπόθεση $H_0: \theta \le \frac{1}{2}$ έναντι της $H_1: \theta > \frac{1}{2}$.

<u>Λύση:</u>

Ερώτημα i.

Το στήριγμα της από κοινού κατανομής είναι το $S = [0,1]^n$, ανεξάρτητο της άγνωστης παραμέτρου θ. Για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του δείγματος έχουμε ότι:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n\,;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^2}\exp\left(-\theta \cdot \frac{1-x_i}{x_i}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i^2}\exp\left(+n\log\theta - \theta \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{1-x_i}{x_i}\right).$$

Επομένως η κατανομή ανήκει στην ΕΟΚ και μάλιστα είναι στην κανονική μορφή για

$$T(X) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1-X_i}{X_i}, A(\theta) = -n\log\theta\,, \varphi(\theta) = \theta.$$

Η $T(X)$ είναι επαρκής και πλήρης για το θ, αφού $\dim(T) = \dim(\theta) = 1$ και το $\varphi(\Theta) = (0, +\infty)$ περιέχει ανοιχτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Ερώτημα ii.

Θα βρούμε τη σχέση των κατανομών των X_1, Y_1. Αρχικά, για το στήριγμα της κατανομής έχουμε

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1-x}{x} < +\infty,$$

άρα $S_Y = [0, +\infty)$. Για τη συνάρτηση κατανομής F_Y έχουμε:

$$F_Y(x) = P(Y_1 < x) = P\left(\frac{1-X_1}{X_1} < x\right) = P\left(X_1 > \frac{1}{1+x}\right) = 1 - P\left(X_1 \le \frac{1}{1+x}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Βρίσκουμε τη συνάρτηση πυκνότητας f_Y παραγωγίζοντας ως προς x:

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \left(1 - F_X\left(\frac{1}{1+x}\right)\right)' = -f_X\left(\frac{1}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \cdots = \theta \cdot e^{-\theta x}, \qquad 0 < x < +\infty,$$

άρα $Y_1 \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, όπου θ παράμετρος ρυθμού.

Ερώτημα iii.

Η επαρκής και πλήρης σ.σ. του ερωτήματος i σε συνδυασμό με το ερώτημα ii μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των Y_i, $T(Y) = -\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Γνωρίζουμε ότι $Y_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$ και είναι ανεξάρτητες για $i = 1, \dots, n$, επομένως $\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n, \theta)$. Θέτουμε $\delta(Y) = -2\theta T(Y) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) \equiv X_{2n}^2$. Η σ.σ. $\delta(Y)$ θα είναι η συνάρτηση οδηγός για το διάστημα εμπιστοσύνης που θα κατασκευάσουμε. Αναζητούμε δύο σταθερές c_1, c_2 ώστε:

$$P(c_1 < \delta(Y) < c_2) = 1 - a.$$

Ζητείται Δ.Ε. ίσων ουρών, επομένως επιλέγουμε τα (άνω) ποσοστημόρια $c_1 = X_{2n,1-a/2}^2$, $c_2 = X_{2n,a/2}^2$. Λύνουμε ως προς την παράμετρο θ:

$$X_{2n,1-a/2}^2 < \delta(Y) < X_{2n,a/2}^2 \Rightarrow X_{2n,1-a/2}^2 < 2\theta \sum_{i=1}^{n} Y_i < X_{2n,a/2}^2 \Rightarrow \frac{X_{2n,1-a/2}^2}{2\sum_{i=1}^{n} Y_i} < \theta < \frac{X_{2n,a/2}^2}{2\sum_{i=1}^{n} Y_i}.$$

Ερώτημα iv.

Η από κοινού κατανομή του δείγματος ανήκει στην ΕΟΚ με $\varphi(\theta) = \theta$ αύξουσα συνάρτηση ως προς θ και $T(X) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1-X_i}{X_i}$. Επομένως έχει την ισιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών ως προς την $T(X)$. Ο Ομοιόμορφα Ισχυρότατος Έλεγχος (ΟΙΕ) σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & T(X) > c_a \\ \gamma & T(X) = c_a, \\ 0 & T(X) < c_a \end{cases}$$

όπου καθώς η $T(X)$ έχει συνεχής κατανομή, ο έλεγχος απλοποιείται σε

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & T(X) \geq c_a \\ 0 & T(X) < c_a \end{cases}.$$

Απομένει να υπολογιστεί η σταθερά c_a, τέτοια ώστε $E_{\theta_0}\big(\varphi(X)\big) = \alpha$, όπου $\theta_0 = \frac{1}{2}$. Υπό την υπόθεση ότι η πραγματική τιμή του θ είναι θ_0, ισχύει ότι $\delta(X) = -2\theta_0 T(X) \sim X_{2n}^2$, επομένως

$$E_{\theta_0}\big(\varphi(X)\big) = P_{\theta_0}(T(X) \geq c_a) = P_{\theta_0}(-2\theta_0 T(X) \leq -2\theta_0 c_a) = P_{\theta_0}(\delta(X) \leq -2\theta_0 c_a),$$

$$P_{\theta_0}(\delta(X) \leq -2\theta_0 c_a) = \alpha \Leftrightarrow X_{2n,1-\alpha}^2 = -2\theta_0 c_a \Leftrightarrow c_a = -\frac{X_{2n,1-\alpha}^2}{2\theta_0}.$$

Τελικά, ο Ο.Ι.Ε. σε ε.σ.σ. α είναι ο

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & -\sum_{i=1}^{n} \frac{1-X_i}{X_i} \geq -\frac{X_{2n,1-\alpha}^2}{2\theta_0} \\ 0 & -\sum_{i=1}^{n} \frac{1-X_i}{X_i} < -\frac{X_{2n,1-\alpha}^2}{2\theta_0} \end{cases},$$

ή πιο απλά,

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - X_i}{X_i} \leq \frac{X^2_{2n,1-\alpha}}{2\theta_0} \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - X_i}{X_i} > \frac{X^2_{2n,1-\alpha}}{2\theta_0} \end{cases}.$$