Στατιστική Ι - Εργασία 5

Εργασία. *Το χειμερινό εξάμηνο του 2015-16, 30 φοιτητές του μαθήματος Στατιστική Ι, πραγματοποίησαν ένα πείραμα τύχης με νομίσματα σε 2 στάδια. Σε κάθε στάδιο έγινε ρίψη ενός νομίσματος από κάθε φοιτητή. Τα νομίσματα θεωρούνται αντίγραφα ενός τυπικού νομίσματος του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα p να εμφανιστεί Γράμματα. Όλες οι ρίψεις θεωρούνται ανεξάρτητες. Τα αποτελέσματα των δοκιμών αυτών συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα*

	Συχνότητα Εμφάνισης	
Ρίψεις	Κορώνα (Κ)	Γράμματα (Γ)
Ρίψη 1	12	18
Ρίψη 2	16	14

Κάνοντας την σύμβαση ότι $K \to 0$ *και* $\Gamma \to 1$*, μπορούμε να θεωρήσουμε (σύμφωνα με τις υποθέσεις) ότι τα συγκεκριμένα αποτελέσματα αποτελούν πραγματοποιήσεις ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών* $X_i \sim Be(p)$*, όπου το* p *(η πιθανότητα να εμφανιστεί Γράμματα) είναι μία υπό εκτίμηση παράμετρος με* $0 \leq p \leq 1$*. Η πληροφορία βέβαια που δίνεται αφορά το συνολικό πλήθος των επιτυχιών και των αποτυχιών στις 30 ρίψεις των φοιτητών σε κάθε στάδιο.*

(i) *Αφού βρείτε την εκτιμήτρια ροπών* $\overline{p}_\nu$ *του* p *που αντιστοιχεί σε δείγμα μεγέθους* ν*, εκτιμήστε το* p *στο στάδιο 1, όπου* $\nu = 30$*, και στη συνέχεια συνδιάστε τα αποτελέσματα του σταδίου 2, για να δώσετε μία εκτίμηση του* p *με* $\nu = 60$*.*

(ii) *Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας* $f_\nu(x;p)$ *της* $\overline{p}_\nu$ *και τη συνάρτηση κατανομής της* $F_\nu(x;p)$*.*

(iii) *Με τη βοήθεια ενός λογισμικού Στατιστικής, προγραμματίστε μία συνάρτηση που να υπολογίζει την* $f_\nu(x;p)$*.*

(iv) *Για* $p = 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6$ *και* $\nu = 30, 60$ *υπολογίστε (με πρόγραμμα στον υπολογιστή) την πιθανότητα να ξεπεράσετε ένα* ϵ*-σφάλμα στην εκτίμησή σας, δηλ., την* $P(|\overline{p}_\nu - p| > \epsilon)$ *για* $\epsilon = 0.01$ *και* $\epsilon = 0.02$ *(20 περιπτώσεις). Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα και σχολιάστε τα.*

(v) *Για* $p = 0.5$*, βρείτε τις ελάχιστες τιμές του* ν *για τις οποίες πετυχαίνουμε ακρίβεια* $\epsilon = 0.01$ *και* $\epsilon = 0.02$ *με πιθανότητα* 0.95 *και* 0.99 *(4 περιπτώσεις).*

(vi) *Κάντε μία ασυμπτωτική προσέγγιση της* $P(|\overline{p}_\nu - p| > \epsilon)$ *εκτιμώντας την τυπική απόκλιση της* $Be(p)$ *με την ρίζα της αμερόληπτης δειγματικής διασποράς.*

(vii) *Αναζητήστε έναν αντιστρέψιμο μετασχηματισμό* $\phi(p)$*, τέτοιον ώστε*

$$\sqrt{\nu}(\phi(\overline{p}_\nu) - \phi(p)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c),$$

όπου $c > 0$*, σταθερά ανεξάρτητη του* p*. Λέμε ότι ο* ϕ *είναι ένας μετασχηματισμός που σταθεροποιεί τη διασπορά. Εμπνευστείτε απο αυτόν τον μετασχηματισμό για να κάνετε μία ασυμπτωτική προσέγγιση της* $P(|\overline{p}_\nu - p| > \epsilon)$*.*

(viii) *Συγκρίνετε τα αποτελέσματα των* $(iv), (vi), (vii)$ *για* $\epsilon = 0.01, 0.02$ *και* $\nu = 30, 60$ *και σχολιάστε τα αποτελέσματα.*