Εξετάσεις Μαθηματική Στατιστική – Ιούνιος 2022

Θέμα 1: Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με πυκνότητα

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp\Big(-\frac{1}{\sigma} \cdot |x|\Big), \qquad x \in \mathbb{R},$$

όπου $\sigma > 0$ άγνωστη παράμετρος.

(α) Να υπολογιστούν η μέση τιμή $\mathbb{E}(X_1)$ και η διασπορά $\mathbb{V}(X_1)$ και να προταθεί κατάλληλη εκτιμήτρια ροπών $\overline{\sigma}_n$ του σ.

(β) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.) $\widehat{\sigma}_n$ του σ.

(γ) Να υπολογιστεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ της ε.μ.π. $\widehat{\sigma}_n$ του σ και να εξεταστεί αν είναι συνεπής εκτιμήτρια.

(δ) Να δειχθεί ότι η ε.μ.π. $\widehat{\sigma}_n$ του σ είναι ασυμπτωτικά κανονική.

(ε) Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του σ.

Θέμα 2: Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ από κατανομή με πυκνότητα

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^2} \exp\Big(-\theta \cdot \frac{1-x}{x}\Big), \qquad 0 < x < 1,$$

όπου $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος.

(α) Εξετάστε αν η παραπάνω οικογένεια κατανομών αποτελεί εκθετική οικογένεια και βρείτε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση $T(X_1, \ldots, X_n)$.

(β) Ποιά είναι η κατανομή της $Y_1 = \frac{1-X_1}{X_1}$?

(γ) Υπολογίστε ένα $(1-\alpha)$–διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών, βασιζόμενοι στην επαρκή στατιστική συνάρτηση του ερωτήματος (α).

(δ) Να αποδείξετε ότι η κατανομή έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών, και να πραγματοποιήσετε ομοιόμορφα ισχυρότατο έλεγχο (ΟΙΕ) για την υπόθεση

$$H_0 : \theta \leq \frac{1}{2} \quad \text{έναντι της} \quad H_1 : \theta > \frac{1}{2}.$$

Απαντήστε σε όλα τα θέματα - ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ενδεικτικές Λύσεις Θεμάτων

Θέμα 1: Διαίσθηση: Μοιάζει με την εκθετική, όπου $\theta = 1/\sigma$. Όμως $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει συντελεστής $1/2$. Η κατανομή είναι συμμετρική, αφού $f(x) = f(-x)$. Είναι διαισθητικά φανερό ότι αποτελεί μία "διπλωμένη" εκθετική. Λέγεται και Laplace. Αντί να υπολογίσουμε "μηχανικά" μέση τιμή και διασπορά μπορούμε να τις γράψουμε:

$$X_i = S_i Y_i = \sigma S_i E_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{1}$$

όπου $\{S_i\}_{i=1}^n$ επιλέγουν τα πρόσημα, δηλ. $S_i \in \{-1, 1\}$, δίνοντας βάρος $1/2$ σε κάθε τιμή και οι $Y_i \sim \mathcal{E}(\sigma)$, όπου το σ είναι παράμετρος κλίμακας. Αυτό εκφράζεται ξεκάθαρα και από τη δεύτερη ισότητα με $E_i \sim \mathcal{E}(1)$. Είναι φανερό ότι οι $\{S_i\}_{i=1}^n$ θα είναι ανεξάρτητες από τις $\{Y_i\}_{i=1}^n$ ή τις $\{E_i\}_{i=1}^n$ αντίστοιχα. Οι αναπαραστάσεις αυτές προκύπτουν από τη σκέψη ότι θα μπορούσαμε να τις παράγουμε αν πρώτα παράξουμε μία εκθετική (ελέγξτε ότι η απόλυτη τιμή ακολουθεί κατάλληλη εκθετική) και στη συνέχεια, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα επιλέγαμε το πρόσημο με πιθ. $1/2$. Εκφράζονται και ως εξής:

$$X_i = \begin{cases} Y_i & \text{με πιθ. 1/2,} \\ -Y_i & \text{με πιθ. 1/2.} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω αναπαράσταση και λόγω ότι $\mathbb{E}(S_1) = 0$ (επιλέγει ισοπίθανα 1 ή -1) και $S_1^2 = 1$ προκύπτουν τα εξής:

(α)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= \sigma \mathbb{E}(S_1)\mathbb{E}(E_1) = 0, \\ \mathbb{V}(X_1) &\overset{\mathbb{E}(X_1)=0}{=} \mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2\, \mathbb{E}(\underbrace{S_1^2}_{1})\underbrace{\mathbb{E}(E_1^2)}_{1+1} = 2\sigma^2, \end{aligned}$$

καθώς $\mathbb{E}(\mathcal{E}(1)) = \mathbb{V}(\mathcal{E}(1)) = 1$ και άρα $\mathbb{E}(E_1^2) = \mathbb{V}(E_1) + \mathbb{E}^2(E_1) = 2$.

Μία κατάλληλη εκτιμήτρια ροπών προκύπτει λοιπόν από τη δεύτερη σχέση (η πρώτη δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί) και μας δίνει

$$\overline{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\overline{X^2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{2n}}. \tag{2}$$

Εναλλακτικά, είναι δεκτή και η λύση

$$\overline{\sigma}_n = \sqrt{M_2/2},$$

όπου M_2 είναι η δειγματική κεντρική ροπή 2ης τάξης, όπου αντί για X_i στην (2) χρησιμοποιείται ο όρος $X_i - \overline{X}$.

(β) Με απλό υπολογισμό παρατηρούμε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι ισοδύναμη με αυτήν που προκύπτει από ένα τυχαίο δείγμα από $\mathcal{E}(\sigma)$, όπου στη θέση των X_i έχουμε $|X_i|$. Αυτό το βλέπει κάποιος και από την (1), αν παρατηρήσει ότι $Y_i = |X_i|$ και η εξάρτηση στο σ εμφανίζεται μόνο στην Y_i. Η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας (ε.μ.π.) προκύπτει λοιπόν άμεσα και είναι $\widehat{\sigma}_n = \overline{|X|} = \sum_{i=1}^n |X_i|/n$.

(γ) Έχουμε $|X_i| \sim \mathcal{E}(\sigma)$. Άρα το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ της ε.μ.π. υπολογίζεται ως εξής:

$$MSE_{\widehat{\sigma}_n}(\sigma) = \mathbb{V}_\theta(\widehat{\sigma}_n) + (\mathbb{E}_\theta(\widehat{\sigma}_n) - \sigma)^2 = \frac{\mathbb{V}_\theta |X_1|}{n} = \frac{\mathbb{V}_\theta Y_1}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Η συνέπεια έπεται άμεσα από γνωστή Πρόταση, αφού $MSE_{\widehat{\sigma}_n}(\sigma) \to 0$, καθώς $n \to \infty$.

(δ) Η ε.μ.π. $\widehat{\sigma}_n$ του σ είναι ασυμπτωτικά κανονική από μία άμεση εφαρμογή του Κ.Ο.Θ., καθώς

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\sigma}_n - \sigma) = \sqrt{n}\left(\overline{Y}_n - \mathbb{E}_\theta Y_1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{V}_\theta Y_1\right) = \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

(ε) Υπάρχουν διάφοροι τρόποι επαλήθευσης ότι η ε.μ.π. αποτελεί και αποτελεσματική εκτιμήτρια του σ, π.χ. άμεσα βλέπουμε ότι το τυχαίο δείγμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$ αντιστοιχεί σε μία μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ.

$$f(x;\sigma) = \exp\{\varphi(\sigma)\delta(X) - B(\sigma)\} \cdot h(x),$$

με $\varphi(\sigma) = -n/\sigma$ συνεχώς διαφορίσιμη ($\varphi'(\sigma) \neq 0$), $\delta(X) = \widehat{\sigma}_n$ και $g(\sigma) = \dfrac{B'(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} = \sigma$, άρα από γνωστό θεώρημα η $\delta(X) = \widehat{\sigma}_n$ είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του $g(\sigma) = \sigma$.