ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2017

Θέμα 1: Έστω $X_1, X_2, ..., X_{\nu_x}$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_{\nu_y}$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από κανονικές κατανομές $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ και $N(0, \sigma_y^2)$ αντίστοιχα, όπου $\mu_x, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ είναι άγνωστες παράμετροι.

α): Βρείτε κατάλληλες αμερόληπτες εκτιμήτριες των σ_x^2 και σ_y^2 (μέση τιμή άγνωστη και γνωστή αντίστοιχα)
<u>Υπόδειξη:</u> αν χ_k^2 είναι η κατανομή χι-τετράγωνο με k βαθμούς ελευθερίας, τότε ικανοποιούν τη σχέση $k\,\widehat{\sigma^2} \sim \sigma^2\,\chi_k^2,\ \sigma^2 \in \{\sigma_x^2, \sigma_y^2\}$ με διαφορετικές τιμές του k

β): Κατασκευάστε ένα $1-\alpha$ διάστημα εμπιστοσύνης για το λόγο διασπορών $\lambda = \sigma_x^2/\sigma_y^2$.

Θέμα 2: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$, ν ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές, όπου $X_i \sim Exp(i\theta),\ 1 \le i \le \nu$, με $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρο.

α): Με βάση το παραπάνω δείγμα αναζητείστε ΕΜΠ $\widehat{\theta}$ του θ.

β): Αν $T \sim Gamma(\alpha, \theta),\ \alpha, \theta > 0$, τότε δείξτε ότι για k ακέραιο

$$E(T^k) = \theta^{-k}\,\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad k > -\alpha,$$

όπου $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t},\ \alpha > 0$. Δίνεται η σ.π.π. της T

$$f(t;\alpha,\theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}e^{-\theta t}, \quad t > 0.$$

γ): Εξετάστε την αμεροληψία και τη συνέπεια της ΕΜΠ. Δίνεται ότι $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!,\ \nu \ge 1$.

Θέμα 3: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή

$$f(x;\lambda) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \qquad \lambda > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

α): Πραγματοποιείστε τον έλεγχο $H_0 : \lambda = \lambda_0$ έναντι $H_1 : \lambda = \lambda_1$ $(\lambda_1 < \lambda_0)$ σε επίπεδο σημαντικότητας a. Είναι ο έλεγχος αυτός ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για την $H_0 : \lambda = \lambda_0$ έναντι $H_1 : \lambda < \lambda_0$;

β): Εάν $\nu = 10$, $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, ποιές είναι οι τιμές της ελεγχοσυνάρτησης για τις οποίες η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε ε.σ.σ. 0.05, αλλά όχι σε ε.σ.σ. 0.025.

γ): Να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο λ.
<u>Δίνονται:</u> $\chi^2_{0,025}(10) = 20,483$, $\chi^2_{0,05}(10) = 18,307$, $\chi^2_{0,025}(20) = 34,170$, $\chi^2_{0,05}(20) = 31,410$, $\chi^2_{0,975}(10) = 3,247$, $\chi^2_{0,95}(10) = 3,940$, $\chi^2_{0,975}(20) = 9,951$, $\chi^2_{0,95}(20) = 10,851$.

Θέμα 4: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από κατανομές

$$f_{X_i}(x;\theta) = k_i\theta^{k_i}x^{-k_i-1}, \qquad x \ge \theta > 0,$$

όπου $k_i,\ i = 1, 2, ..., \nu$, γνωστές θετικές σταθερές.

α): Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για τη παράμετρο θ.

β): Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας του θ.

γ): Να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς για το θ^r (για τις επιτρεπτές τιμές του r).

<u>**Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.**</u>

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ