Λύσεις Θεμάτων Στατ. Ι, Ιανουάριος 2018

(με σχολιασμό)

Θέμα 1

① Αν $X \sim G(a,\theta)$, όπου θ παράμ. ρυθμού, τότε νX, $\nu=1,2,\ldots$, ακολουθεί

○ $G(\nu a,\theta)$ ○ $G(a,\nu\theta)$ ⊗ $G(a,\frac{\theta}{\nu})$ ○ $G(\frac{a}{\nu},\theta)$

• Σχ: Γνωστή ιδιότητα της κατανομής Γάμμα

② Αν $X = Z_1^2 + Z_2^2$, όπου $Z_i \sim N(0,1)$, $i=1,2$, ανεξάρτητες, τότε

⊗ $X \sim \mathcal{E}xp(0.5)$ ⊗ $X \sim G(1, 0.5)$ ○ $X \sim G(2, 0.5)$ ⊗ $X \sim \chi^2_2$

• Σχ. Γνωρίζουμε ότι αν $X = Z_1^2 + \ldots + Z_\nu^2$, με $Z_i \sim N(0,1)$, ανεξ. τ.μ, τότε $X \sim \chi^2_\nu \equiv G\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Επιπλέον $\mathcal{E}xp(\theta) \equiv G(1,\theta)$. Το αποτέλεσμα προκύπτει με εφαρμογή για $\nu=2$, και $\theta = 0.5$.

③ Σε τυχαίο δείγμα από $U(0,\theta)$, ποιές από τις παρακάτω σ.σ. είναι επαρκείς ?

○ $\overline{X}$ ⊗ $X_{(\nu)}$ ⊗ $(X_{(1)}, X_{(\nu)})$ ⊗ $(X_1, X_2, \ldots, X_\nu)$

• Σχ. Αρκετές φορές χρησιμοποιήσαμε στο μάθημα ότι η $X_{(\nu)}$ είναι επαρκής σ.σ. για το θ (προκύπτει άμεσα από Π.Κ.Ν)
Όμως $X_{(\nu)} = g_1(X_{(1)}, X_{(\nu)})$ και $X_{(\nu)} = g_2(X_1, \ldots, X_\nu)$, άρα $(X_{(1)}, X_{(\nu)})$ και $(X_1, \ldots, X_\nu)$ είναι επαρκείς (η τελευταία πάντα είναι).
Έχουμε επίσης δείξει ότι ο δ.μ. $\overline{X}$ δεν είναι επαρκής σ.σ.

④ Αν για μία εκτιμήτρια U_ν του θ, ισχύει ότι $MSE(U_\nu) \to 0$, τότε η U_ν είναι:

○ αμερόληπτη ⊗ ασυμπτ. αμερόληπτη ⊗ συνεπής ○ ασυμπτ. κανονική

• Σχ. Από Θεωρία γνωρίζουμε ότι $MSE(U_\nu) \to 0$, είναι κριτήριο συνέπειας, και επιπλέον $MSE(U_\nu) = b^2(U_\nu) + Var(U_\nu)$, από το οποίο έπεται άμεσα και η ασυμπτωτική αμεροληψία. Τα άλλα δύο δεν ισχύουν.

(5) Αν $\hat{\theta}_\nu$ είναι εκτιμήτρια του θ, που είναι συνεπής, τότε:

○ είναι αμερόληπτη ○ είναι ασυμπτ. αμερόληπτη ⊗ $\hat{\theta}_\nu \xrightarrow{d} \theta$ ⊗ $\hat{\theta}_\nu \xrightarrow{P} \theta$

Σχ: Έχουμε δεί ότι συνεπής $\overset{\text{γενικά}}{\not\Rightarrow}$ αμερόληπτη.

Επίσης συνεπής $\not\Rightarrow$ ασυμπτ. αμερόληπτη

π.χ. σε τ.δ. $N(\mu,1)$, έχουμε $\overline{X}_\nu + \frac{C}{\nu} \xrightarrow{P} \mu$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, αν $C \sim Cauchy(0,1)$, όμως δεν ορίζεται η μέση τιμή της.

Εξ' ορισμού συνεπής $\equiv \hat{\theta}_\nu \xrightarrow{P} \theta$, $\forall \theta$, και $\hat{\theta}_\nu \xrightarrow{d} \theta$, $\forall \theta$, έπεται από την ισοδυναμίας της $\xrightarrow{P}$ και $\xrightarrow{d}$ όταν η σύγκλιση συμβαίνει σε σταθερές (εκφυλ. τ.μ.).

(6) Αν $\sqrt{\nu}(\hat{\theta}_\nu - \theta) \xrightarrow{d} X$, τότε $\sqrt{\nu}\left((\hat{\theta}_\nu)^3 - \theta^3\right) \xrightarrow{d}$

○ $3\theta X$ ⊗ $3\theta^2 X$ ○ $9\theta^4 X$ ○ δεν συγκλίνει.

Σχ: Από τη μέθοδο Δέλτα, για παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(\theta)$, στο θ, έχουμε $\sqrt{\nu}(\hat{\theta}_\nu - \theta) \xrightarrow{d} X \Rightarrow \sqrt{\nu}\left(g(\hat{\theta}_\nu) - g(\theta)\right) \xrightarrow{d} g'(\theta) \cdot X$.

Εδώ $g(\theta) = \theta^3 \Rightarrow g'(\theta) = 3\theta^2$, και το αποτέλεσμα έπεται.

(7) Όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος, τότε το μήκος ενός $(1-\alpha)$- Δ.Ε.

○ αυξάνεται ⊗ ελαττώνεται ○ παραμένει σταθερό

Σχ.: Στις συνήθεις περιπτώσεις που έχουμε δεί, αύξηση του δείγματος $\Rightarrow$ μεγαλύτερη ακρίβεια στην εκτίμηση, δηλ. μικρότερη αβεβαιότητα. Αυτό αντανακλάται για σταθερό συντελ. εμπιστοσύνης $1-\alpha$, στην ελάττωση του μήκους του Δ.Ε..

(8) Αν $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. $Exp(\theta)$, με ρυθμό $\theta > 0$, και $\widehat{g(\theta)}$ είναι η Ε.Μ.Π. του $g(\theta)$, τότε

○ $\hat{\theta} = \overline{X}$ ⊗ $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$ ⊗ $\widehat{E(X_1)} = \overline{X}$ ○ $\widehat{E(X_1)} = \frac{1}{\overline{X}}$.

Σχ: Το αποτέλεσμα έπεται, διότι το θ είναι παράμετρος ρυθμού και γνωρίζουμε την Ε.Μ.Π. (που συμπίπτει με την εκτιμήτρια ροπών) και το αναλλοίωτο της Ε.Μ.Π.

Θέμα 2 | Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $Geo(p)$, $0<p<1$, με σ.π. $f(x;p) = p(1-p)^{x-1}$, $x=1,2,\ldots$ Υποθέτουμε ότι εκφράζουν το πλήθος των ρίψεων ενός νομίσματος μέχρι να εμφανιστεί Γράμματα για πρώτη φορά (ν - ανεξ. επαναλήψεις).

(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια ροπών $\overline{P}_\nu$ του p. Είναι αμερόληπτη;

(β) Γίνεται γνωστό ότι κυκλοφορούν μόνο δύο τύποι νομισμάτων, αμερόληπτα με $p=\frac{1}{2}$ και κίβδηλα με $p=\frac{1}{4}$. Διατυπώστε έναν κατάλληλο έλεγχο υποθέσεων, για να ελέγξετε αν το νόμισμα είναι αμερόληπτο. Θεωρούμε ότι χωρίς στοιχεία θα δεχόμασταν ότι είναι αμερόληπτο. Καθορίστε μία ελεγχοσυνάρτηση και τη μορφή της κρίσιμης περιοχής.

(γ) Προσδιορίστε την κρίσιμη περιοχή ασυμπτωτικά σε ε.σ.σ. α.

Λύση

(α) Θέτουμε $E(X) = \overline{X}_\nu$, όμως $X \sim Geo(p)$, στο $\{1,2,3,\ldots\}$, άρα $E(X) = \frac{1}{p}$, και έχουμε $\frac{1}{p} = \overline{X}_\nu \Leftrightarrow \boxed{\hat{P}_\nu = \frac{1}{\overline{X}_\nu}}$

(η επέκταση του π.χ. για $p=1$, είναι δυνατή αν $\overline{X}_\nu = 1 \Leftrightarrow X_1 = \ldots = X_\nu = 1$)

Έχουμε $$E\left(\hat{P}_\nu\right) = E\left(\frac{1}{\overline{X}_\nu}\right) = E\left[g(\overline{X}_\nu)\right] \underset{(x>0)}{\overset{*}{\geqslant}} g\left(E(\overline{X}_\nu)\right) = g\left(\underset{\frac{1}{p}}{\underset{\shortparallel}{E(X)}}\right) = p,$$

$\forall p \in (0,1)$, με $g(x) = \frac{1}{x}$, όπου η ανισότητα έπεται, από την ισχύ της ανισότητας Jensen για κυρτές συναρτήσεις, εδώ η $g(x) = \frac{1}{x}$. Μάλιστα η ανισότητα είναι γνήσια, αφού η g είναι γνήσια κυρτή και ο δ.μ. $\overline{X}_\nu$ είναι μη εκφυλισμένη τμ. Τελικά $E(\hat{P}_\nu) > p$, $\forall p \in (0,1)$, που δείχνει ότι η ε.ρ. $\hat{P}_\nu$ έχει θετική μεροληψία, και άρα $\boxed{\text{δεν είναι α.ε}}$

(β) Είναι προφανές ότι οδηγούμαστε στον έλεγχο υποθέσεων

$$\boxed{H_0 : p = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1 : p = \frac{1}{4}}$$

Εφαρμόζουμε Neyman-Pearson.

$$\frac{L(p_0)}{L(p_1)} = \frac{L(\frac{1}{2})}{L(\frac{1}{4})} \leq K \quad . \quad \text{Όμως } L(p) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i ; p) = p^{\nu}(1-p)^{\sum_i x_i - \nu}$$

Άρα
$$\frac{L(\frac{1}{2})}{L(\frac{1}{4})} \leq K \iff \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_i x_i - \nu}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu}\left(\frac{3}{4}\right)^{\sum_i x_i - \nu}} \leq K \iff \left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_i x_i} \leq K'$$

$$\iff \left(\sum_i x_i\right) \underbrace{\log\frac{2}{3}}_{<0} \leq K' \iff \boxed{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \geq c}$$

Άρα ως ελεγχοσυνάρτηση μπορούμε να πάρουμε $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$

και μορφή κρίσιμης περιοχής $C = \left\{ x \in (\mathbb{N}^*)^{\nu} : \sum_{i=1}^{\nu} x_i \geq c \right\}$

Άλλες επιλογές είναι δυνατές π.χ. $T' = \bar{X}$ ή $T'' = \frac{1}{\bar{X}}$ κ.τ.λ. ...

αντιστοιχίζοντας βέβαια κατάλληλες κρίσιμες περιοχές.

(γ) Αναζητούμε $\tilde{C}_a : P_{H_0}(X \in \tilde{C}_a) = P_{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{\nu} X_i \geq c_a}_{\text{περιοχή απορρίψης της } H_0}\Big) \cong a$

Από το κ.ο.θ. για την ακολουθία α.ι.τ.μ. $X_i \sim Geo(p)$ (ισχύουν οι προϋποθέσεις), έχουμε ότι.

$$\frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i - \nu \cdot E(X)}{\sqrt{\nu \cdot Var(X)}} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i - \nu \cdot \frac{1}{p}}{\sqrt{\nu \cdot \frac{1-p}{p^2}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \ ; \forall p \in (0,1)$$

άρα και για $p = \frac{1}{2}$, έχουμε ότι η $Z_{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i - 2\nu}{\sqrt{2\nu}} \approx N(0,1)$ για μεγάλο ν.

Τελικά

$$P_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\nu} X_i \geq c_a\right) = a \iff P\left(Z_{\nu} \geq \frac{c_a - 2\nu}{\sqrt{2\nu}}\right) = a \iff$$

$$\frac{c_a - 2\nu}{\sqrt{2\nu}} = z_a \iff \boxed{c_a = 2\nu + \sqrt{2\nu} \cdot z_a}$$

Διαφορετικά
- $\{\bar{X}_{\nu} \geq c'\}$
- $c'_a = 2 + \sqrt{\frac{2}{\nu}}\, z_a$

Θέμα 3ο. Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ με σ.π. $f(x;\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Έστω $M_\nu = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\nu}$ και $T_\nu = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \bar{X})^2}{\nu - 1}$ δύο εκτιμήτριες του σ^2. Θεωρείται γνωστό ότι $\dfrac{(\nu-1)T_\nu}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$,

(α) Εξετάστε αν οι M_ν και T_ν είναι α.ε. του σ^2.

(β) Να βρεθεί αποτελεσματική εκτιμήτρια του σ^2.

(γ) Υπολογίστε τα ΜΤΣ (MSE) των M_ν και T_ν. Ποιά είναι η καλύτερη από τις δύο με βάση αυτό το κριτήριο.

Λύση

(α) • $E(M_\nu) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2}{\nu}\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i^2)}{\nu} = E(X^2) = \underbrace{Var(X)}_{\sigma^2} + \underbrace{E^2(X)}_{0} = \sigma^2$, $\forall \sigma^2 > 0$. Άρα η M_ν είναι α.ε. του σ^2.

• $E(T_\nu) = E\left(\dfrac{\sigma^2}{\nu-1} \cdot \dfrac{(\nu-1)}{\sigma^2} T_\nu\right) = \dfrac{\sigma^2}{\nu-1} \cdot \underbrace{E(\chi^2_{\nu-1})}_{\nu-1} = \sigma^2$, $\forall \sigma^2 > 0$.

Τελικά και η T_ν είναι α.ε. του σ^2.

(β) Υπολογίζουμε το $S(x;\sigma^2) = \dfrac{d}{d\sigma^2} \log f(x_1, \ldots, x_\nu; \sigma^2)$.

$f(x_1, \ldots, x_\nu; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}$

$\Rightarrow \log f(x;\sigma^2) = -\dfrac{\nu}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \xRightarrow{\frac{d}{d\sigma^2}}$

$S(x;\sigma^2) = -\dfrac{\nu}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$. Παρατηρούμε ότι

$S(x;\sigma^2) = \dfrac{\nu}{2(\sigma^2)^2}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \sigma^2\right) = K(\nu, \sigma^2)\left(\underbrace{M_\nu}_{\delta(X)} - \sigma^2\right)$

Από γνωστή Πρόταση συμπεραίνουμε ότι η M_ν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια του σ^2.

(γ) $$\text{ΜΤΣ}(M_\nu) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{b^2(M_\nu)} + Var(M_\nu) = Var(M_\nu) =$$

$$Var\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}X_i^2\right) \overset{\text{ανεξ}}{=} \frac{1}{\nu^2}\sum_{i=1}^{\nu}Var(X_i^2) \overset{\text{ισον.}}{=} \frac{Var(X_1^2)}{\nu} \quad \Rightarrow$$

Όμως $\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 \sim N^2(0,1) \equiv \chi_1^2$

$$\text{ΜΤΣ}(M_\nu) = \frac{Var\left(\sigma^2 \frac{X_1^2}{\sigma^2}\right)}{\nu} = \frac{\sigma^4 Var(\chi_1^2)}{\nu} = \boxed{\frac{2\sigma^4}{\nu}}$$

Τώρα $\text{ΜΤΣ}(T_\nu) = Var(T_\nu)$, ως α.ε. του σ^2.

$$Var(T_\nu) = Var\left(\frac{\sigma^2}{\nu-1}\cdot\frac{\nu-1}{\sigma^2}T_\nu\right) = \frac{\sigma^4}{(\nu-1)^2}Var\left(\frac{(\nu-1)T_\nu}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^4}{(\nu-1)^2}Var(\chi_{\nu-1}^2) = \frac{2(\nu-1)\sigma^4}{(\nu-1)^2} = \boxed{\frac{2\sigma^4}{\nu-1}} \quad (\nu \geq 2).$$

Άρα

$$\text{ΜΤΣ}(M_\nu) = Var(M_\nu) = \frac{2\sigma^4}{\nu} < \frac{2\sigma^4}{\nu-1} = Var(T_\nu) = \text{ΜΤΣ}(T_\nu),$$

και άρα συμπεραίνουμε ότι η M_ν είναι καλύτερη εκτιμήτρια από την T_ν ως προς αυτό το κριτήριο.

<u>Εναλλακτικά</u>: Αν κάποιος χρησιμοποιούσε το αποτέλεσμα του (β) για τη M_ν, επειδή είναι αποτελεσματική, πετυχαίνει το κ.φ. – C.R. Από το (β),

$$S(X_1;\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}X_1^2.$$

Άρα $$\frac{d}{d\sigma^2}S(X_1;\sigma^2) = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} + \frac{1}{2}\cdot(-2)\frac{1}{(\sigma^2)^3}X_1^2 = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} - \frac{X_1^2}{(\sigma^2)^3}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{μη. 1 παρατήρησης}}}{I_1(\sigma^2)} = -E\left[\frac{d}{\sigma^2}S(X_1;\sigma^2)\right] = \frac{E(X_1^2)^{=\sigma^2}}{(\sigma^2)^3} - \frac{1}{2(\sigma^2)^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2} = \frac{1}{2\sigma^4}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$Var(T_\nu) = \frac{1}{I_\nu(\sigma^2)} = \frac{1}{\nu I_1(\sigma^2)} = \boxed{\frac{2\sigma^4}{\nu}}$$

Θέμα 4

Έστω $Y \sim G(3,\theta)$ και $Z \sim G(2,2\theta)$ δύο ανεξ. τ.μ. που ακολουθούν κατ. Γάμμα με τις αντίστοιχες παραμέτρους, και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Δίνεται η σ.π.π. της $X \sim G(k,\theta)$, $k=1,2,\ldots$

$$f(x;\theta) = \frac{1}{(k-1)!}\theta^{k} x^{k-1} e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

(a) Ν.δ.ο το ζεύγος $X = (Y, Z)$ ανήκει σε Ε.Ο.Κ. και να τεθεί σε κανονική μορφή.

(β) Να κατασκευαστεί ένα ακριβές $(1-\alpha)$-Δ.Ε. $I_{1-\alpha}(X)$ για το θ.

(γ) Πώς θα μπορούσαμε να πραγματοποιήσουμε έναν έλεγχο υποθέσεων $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ σε ε.σ.σ. α με τη βοήθεια του παραπάνω $(1-\alpha)$-Δ.Ε.;

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι (i) $S_X = S_{(Y,Z)} = (0,+\infty)^2$ είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου θ, και

(ii) $$f(y,z;\theta) \overset{\text{ανεξ.}}{=} f(y;\theta) f(z;\theta) = \frac{1}{2!}\theta^3 y^2 e^{-\theta y} \frac{1}{1!}(2\theta)^2 z e^{-2\theta z}$$

$$= 2\theta^5 y^2 z e^{-\theta(y+2z)} = b(\theta) h(x) e^{\eta(\theta) T(x)}$$

όπου $b(\theta) = 2\theta^5$, $h(x) = h(y,z) = y^2 z$, $\eta(\theta) = -\theta$, $T(x) = T(y,z) = y + 2z$.

Άρα το ζεύγος $X = (Y, Z)$ ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

Η κανονική μορφή αντιστοιχεί σε

$$f(x;\eta) = f(y,z;\eta) = h(x) e^{\eta T(x) - A(\eta)}$$

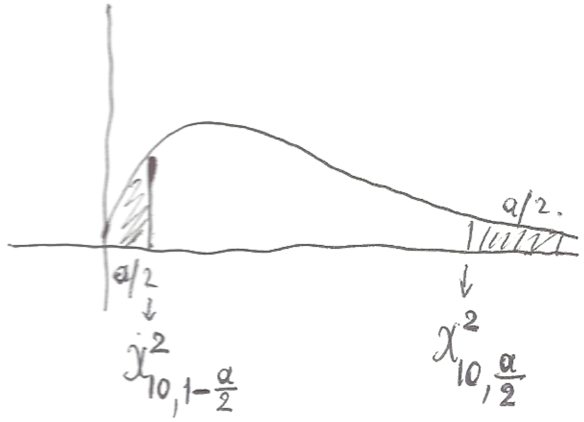
όπου $\eta = -\theta$ $(\eta < 0)$, και $A(\eta) = -\log b(\theta(\eta))$

$$= -\log(-2\eta^5)$$

(β) Έχουμε $Y \sim G(3,\theta)$ και $Z \sim G(2,2\theta)$, ανεξ. τ.μ. $\Rightarrow$

$$T = Y + 2Z \sim G(3,\theta) + G(2,\theta) \overset{+\text{ ανεξ.}}{=} G(5,\theta).$$

Άρα $\quad 2\theta T \sim G\left(5, \frac{\theta}{2\theta}\right) = G\left(5, \frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{10}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{10}.$



Έχουμε κατά τα γνωστά,

$$P\Big(\underbrace{\chi^2_{10,1-\frac{\alpha}{2}}}_{= c_1} < 2\theta T < \underbrace{\chi^2_{10,\frac{\alpha}{2}}}_{= c_2}\Big) = 1-\alpha$$

Όμως $c_1 < 2\theta T < c_2 \iff \frac{c_1}{2T} < \theta < \frac{c_2}{2T}$. Άρα

ένα $I_{1-\alpha}(X) = \left(\frac{\chi^2_{10,1-\frac{\alpha}{2}}}{2T}, \frac{\chi^2_{10,\frac{\alpha}{2}}}{2T} \right)$, είναι ακριβές $(1-\alpha)$-Δ.Ε. για το θ.

(γ) Έχουμε $\quad \theta \in \left(\frac{c_1}{2T}, \frac{c_2}{2T}\right) \iff T \in \left(\frac{c_1}{2\theta}, \frac{c_2}{2\theta}\right)$

Για $\theta = \theta_0$ (που καθορίζει την H_0), έχουμε

$$P_{\theta_0}\left(\theta_0 \in \left(\frac{c_1}{2T}, \frac{c_2}{2T}\right)\right) = P_{\theta_0}\left(T \in \left(\frac{c_1}{2\theta_0}, \frac{c_2}{2\theta_0}\right)\right) = 1-\alpha.$$

Άρα με ελεγχοσυνάρτηση την T, έχουμε

$$P_{\theta_0}\left(\left\{T \le \frac{c_1}{2\theta_0}\right\} \cup \left\{T \ge \frac{c_2}{2\theta_0}\right\}\right) = 1 - P_{\theta_0}\left(T \in \left(\frac{c_1}{2\theta_0}, \frac{c_2}{2\theta_0}\right)\right) = \alpha$$

από όπου καθορίζεται η κρίσιμη περιοχή $C_\alpha = \left\{ x \in (\mathbb{R}_+)^\nu : T(x) \le \frac{c_1}{2\theta_0} \text{ ή } T(x) \ge \frac{c_2}{2\theta_0} \right\}$

Συμπεραίνουμε ότι η $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \ne \theta_0$, απορρίπτεται σε ε.σ.σ. $\alpha \iff \theta_0 \notin I_{1-\alpha}(X)$

Θέμα 5 Έστω $X_1, \ldots, X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{U}[-\theta, \theta^2]$, $\theta > 0$

με σ.π.π. $f(x;\theta) = (\theta^2+\theta)^{-1} \mathbb{1}_{[-\theta, \theta^2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Βρείτε την ε.μ.π. $\hat{\theta}$ του θ.

(β) Προτείνεται μία συνεπή εκτιμήτρια του θ.

Λύση

(α) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας που αντιστοιχεί σε δείγμα $x_1, \ldots, x_\nu$

γράφεται $L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\theta^2+\theta} \mathbb{1}_{[-\theta, \theta^2]}(x_i)$

$$= \frac{1}{(\theta^2+\theta)^\nu} \prod_{i=1}^{\nu} \mathbb{1}_{[-\theta, \theta^2]}(x_i).$$

Όμως $\prod_{i=1}^{\nu} \mathbb{1}_{[-\theta,\theta^2]}(x_i) = 1 \iff \begin{array}{l} -\theta \le x_i, \ \forall i \\ x_i \le \theta^2, \ \forall i \end{array} \iff \begin{array}{l} -\theta \le x_{(1)} \\ x_{(\nu)} \le \theta^2 \end{array} \iff$

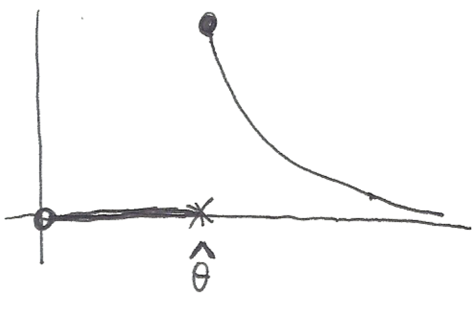
$$\iff \begin{array}{l} -x_{(1)} \le \theta \\ x_{(\nu)} \le \theta^2 \end{array} \iff \theta \geq \max\left\{-x_{(1)}, \sqrt{x_{(\nu)}^{+}}\right\}$$

όπου $x_{(\nu)}^{+} = \max\{0, x_{(\nu)}\}$. (στην πράξη αν $x_{(\nu)} < 0$, τότε $\sqrt{x_{(\nu)}}$ δεν ορίζεται, αλλά τότε $-x_{(1)} > 0$)

Έκφραση της μορφής $\max\left\{-x_{(1)}, \sqrt{x_{(\nu)}}\right\}$ θα θεωρηθεί επίσης σωστή, όπως βέβαια και άλλες ισοδύναμες μορφές.

Τελικά $L(\theta) = \frac{1}{(\theta^2+\theta)^\nu} \mathbb{1}_{\left[\max\left\{-x_{(1)}, \sqrt{x_{(\nu)}^{+}}\right\}, +\infty\right)}(\theta)$, $\theta > 0$

(η περίπτωση $x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0$, είναι μηδενικής πιθανότητας και την αγνοούμε)



Η $\frac{1}{(\theta^2+\theta)^\nu}$ είναι $\searrow$ στο $(0, +\infty)$ $\Longrightarrow$

$$\hat{\theta} = \max\left\{-X_{(1)}, \sqrt{X_{(\nu)}^{+}}\right\}$$

(β) Οποιαδήποτε από τις $L_\nu = -X_{(1)}$ και $R_\nu = \sqrt{X_{(\nu)}^+}$ είναι συνεπείς εκτιμήτριες του θ, όπως επίσης και η ε.μ.π.

Υπάρχουν επίσης πολλοί τρόποι να δειχθεί η συνέπεια αυτών, άμεσα ή έμμεσα. Δίνεται ένα παράδειγμα.

Αν δειχθεί ότι $X_{(\nu)} \xrightarrow{P} \theta^2, \ \forall \theta > 0$, τότε

η $R_\nu = \sqrt{X_{(\nu)}^+} = g(X_{(\nu)}) \xrightarrow{P} g(\theta^2) = \theta, \ \forall \theta > 0$ (δηλ. συνεπής)

για $g(x) = \sqrt{\max(0, x)}$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

απο το Θεώρημα της Συνεχούς Απεικόνισης.

Θα δειχθεί ότι $X_{(\nu)} \xrightarrow{P} \theta^2, \ \forall \theta > 0$, απο τον ορισμό.

Έστω $\varepsilon > 0$, πρέπει ν.δ.ο. $P\left[\left|X_{(\nu)} - \theta^2\right| > \varepsilon\right] \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$

ή $P\left[\left|X_{(\nu)} - \theta^2\right| \le \varepsilon\right] \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 1$.

Όμως $P\left[\left|X_{(\nu)} - \theta^2\right| \le \varepsilon\right] = P\left[\theta^2 - \varepsilon \le X_{(\nu)} \le \theta^2 + \varepsilon\right]$

$$\overset{X_{(\nu)} \text{ συνεχής τ.μ.}}{=} F_{X_{(\nu)}}(\theta^2 + \varepsilon) - F_{X_{(\nu)}}(\theta^2 - \varepsilon) . \quad (1)$$

Έχουμε $F_{X_{(\nu)}}(x) = P\left(X_{(\nu)} \le x\right) = P\left(X_1 \le x, \dots, X_\nu \le x\right) \overset{\text{ανεξ+ισον.}}{=} F_u^\nu(x)$ (2),

όπου
$$F_u(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < -\theta \\ \dfrac{x + \theta}{\theta^2 + \theta} & , \ -\theta \le x < \theta^2 \\ 1 & \ \theta^2 \le x \end{cases}, \ \text{η σ.κ. της } \mathcal{U}_{[-\theta, \theta^2]}.$$

Έχουμε όμως $F_{X_{(\nu)}}(\theta^2 + \varepsilon) = 1$, αφού $\theta^2 + \varepsilon > \theta^2$ (μπορούμε και εξ' αρχής $X_1 \le \theta^2, \dots, X_\nu \le \theta^2 \Rightarrow X_{(\nu)} \le \theta^2 < \theta^2 + \varepsilon$)

Άρα, λόγω (1) και (2) $P\left(\left|X_{(\nu)} - \theta^2\right| \le \varepsilon\right) = 1 - \left(\dfrac{\theta^2 + \theta - \varepsilon}{\theta^2 + \theta}\right)^\nu$ (για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό $\varepsilon < \theta^2 + \theta$)

$$= 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta^2 + \theta}\right)^\nu = 1 - \lambda^\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 1,$$

όπου $0 < \lambda < 1$. Έτσι συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

Θέμα 6

Έστω X_i, $1 \le i \le \nu$ τ.μ. που εκφράζουν το προσημασμένο κέρδος μιας εταιρείας σε ν διαδ. μέρες λειτουργίας της. Υποθέτουμε ότι είναι ανεξ + ισον. τ.μ. με $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\sigma^2 > 0$, γνωστό. Έστω $p = P(X_i > 0)$, δηλ. η πιθ. η εταιρεία να κλείσει με κέρδος την i-μέρα και Φ η σ.κ. της τυπικής κανονικής.

(α) Βρείτε την ε.μ.π. $\hat{p}_\nu$ του p. Δεχόμαστε ότι $\hat{\mu}_\nu = \overline{X}_\nu$.

(β) Να κατασκευαστεί ένα ακριβές $(1-a)$-Δ.Ε $I_{1-a}(X)$ για το p.

(γ) Προτείνετε ένα ασυμπτωτικό $(1-a)$-Δ.Ε $\tilde{I}_{1-a}(X)$ για το p.

Λύση

(α) $$p = P(X_i > 0) = P\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} > -\frac{\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{\mu}{\sigma}\right) \overset{Z \sim N(0,1)}{=}$$

$$1 - P\left(Z \le -\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \overset{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}{=} \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = g(\mu),$$

όπου Φ η σ.κ. της τυπικής κανονικής (σ - γνωστό).

Από την ιδιότητα αναλλοίωτου της ε.μ.π. έχουμε

$$\hat{p}_\nu = \widehat{g(\mu)} = g(\hat{\mu}) = \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_\nu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\sigma}\right).$$

(β) Με σ^2 γνωστό γνωρίζουμε ότι $I^{\mu}_{1-a}(X) = \left(\overline{X}_\nu - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}, \overline{X}_\nu + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right)$

είναι ένα ακριβές $(1-a)$-Δ.Ε. για το μ. Δηλ.

$$P_\mu\left(\overline{X}_\nu - z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} < \mu < \overline{X}_\nu + z_{a/2}\frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\right) = 1 - a, \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \iff$$

$$P_\mu\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\sigma} - \frac{z_{a/2}}{\sqrt{\nu}} < \frac{\mu}{\sigma} < \frac{\overline{X}_\nu}{\sigma} + \frac{z_{a/2}}{\sqrt{\nu}}\right) = 1 - a, \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \overset{\Phi \nearrow}{\iff}$$

$$P_\mu\left(\Phi\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\sigma} - \frac{z_{a/2}}{\sqrt{\nu}}\right) < \underbrace{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}_{p} < \Phi\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\sigma} + \frac{z_{a/2}}{\sqrt{\nu}}\right)\right) = 1 - a, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ένα ακριβές $(1-a)$-Δ.Ε. για το p είναι

$$I^{p}_{1-a}(X) = \left(\Phi\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\sigma} - \frac{z_{a/2}}{\sqrt{\nu}}\right), \Phi\left(\frac{\overline{X}_\nu}{\sigma} + \frac{z_{a/2}}{\sqrt{\nu}}\right)\right)$$

(γ) $\hat{p}_\nu = \Phi\left(\frac{\hat{\mu}_\nu}{\sigma}\right) = g(\hat{\mu}_\nu)$, όπου

$g(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$g'(x) = \Phi'\left(\frac{x}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$$

ή $g'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$, $\forall \mu\in\mathbb{R}$.

Ισχύει ότι $\sqrt{\nu}\,\frac{\hat{\mu}_\nu - \mu}{\sigma} \xrightarrow[\nu\to\infty]{d} N(0,1)$ (μάλιστα εδώ $\sim N(0,1)$)

Απο τη μέθοδο Δέλτα

$$\sqrt{\nu}\,\frac{g(\hat{\mu}_\nu) - g(\mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} g'(\mu)\cdot N(0,1) \quad \text{ή} \quad (g'(\mu)\neq 0)$$

$$\sqrt{\nu}\,\frac{\hat{p}_\nu - p}{\sigma g'(\mu)} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad , \text{δηλ.}$$

$$\sqrt{\nu}\,\frac{\hat{p}_\nu - p}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Τελικά (Slutsky)

$$Z_\nu = \sqrt{\nu}\,\frac{\hat{p}_\nu - p}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\bar{X}_\nu)^2}{2\sigma^2}}} = \underbrace{\sqrt{\nu}\,\frac{\hat{p}_\nu - p}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}}_{\xrightarrow{d} N(0,1)} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(\bar{X}_\nu)^2}{2\sigma^2}}}}_{\xrightarrow{P} 1 \ (\text{Θ.Σ.Α} + \text{Slutsky})} \xrightarrow[\nu\to\infty]{d} N(0,1)$$

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ασυμπτωτικά ως οδηγός.

Συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\tilde{I}^{p}_{1-\alpha}(X) = \hat{p}_\nu \pm z_{\alpha/2}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\bar{X}_\nu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\nu}}}$$

είναι ένα $(1-\alpha)$- ασυμπτωτικό Δ.Ε. για το p.

Σημ: Μπορεί κάποιος να χτίσει και άλλο ασυμπτ. Δ.Ε. με εκτιμήτρια την $\tilde{p}_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} 1\{X_i > 0\} / \nu$.