Τοπολογία

3η Σειρά Ασκήσεων

Γινόμενα τοπολογικών χώρων

20. Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, $A_i \subseteq X_i$, για κάθε $i \in I$ και $X = \prod_{i\in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:
(α) Αν, για κάθε $i \in I$, το A_i είναι κλειστό στον X_i, τότε το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι κλειστό στον X.
(β) Γενικά ισχύει

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}.$$

(γ) Το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι πυκνό στον X, αν και μόνο αν, για κάθε $i \in I$, το A_i είναι πυκνό στον X_i.
(δ) Έστω $x^0 = \big(x^0(i)\big)_{i\in I}$ ένα στοιχείο του X. Σταθεροποιούμε το x^0 και θέτουμε

$$D = \big\{x = \big(x(i)\big) \in X : \text{το } x \text{ διαφέρει από το } x^0 \text{ σε ένα το πολύ πεπερασμένο σύνολο δεικτών}\big\}\,.$$

Τότε το D είναι πυκνό στον X.

Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε ότι, για κάθε $i \in I$, το A_i είναι κλειστό στον X_i. Θα αποδείξουμε ότι το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι κλειστό στον χώρο γινόμενο, δείχνοντας ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό. Έστω $x = (x_i) \in X \setminus \prod_{i\in I} A_i$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ με $x_{i_0} \notin A_{i_0}$. Θέτουμε $U = (X \setminus A_{i_0}) \times \prod_{i\neq i_0} X_i$. Τότε το U είναι ανοιχτό στον X και $U \subseteq X \setminus \prod_{i\in I} A_i$. Έπεται ότι το $X \setminus \prod_{i\in I} A_i$ είναι ανοιχτό, άρα το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι κλειστό.
(β) Σύμφωνα με το (α), το $\prod_{i\in I} \overline{A_i}$ είναι κλειστό και περιέχει το $\prod_{i\in I} A_i$, άρα

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i}\ .$$

Έστω τώρα $x = (x_i) \notin \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Τότε υπάρχει βασικό ανοιχτό σύνολο U της μορφής $U = U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{i\notin\{i_1,\dots,i_n\}} X_i$ με $x \in U$ και $U \cap \prod_{i\in I} A_i = \emptyset$. Έπεται ότι υπάρχει i_l με $U_{i_l} \cap A_{i_l} = \emptyset$, δηλαδή $x_{i_l} \notin \overline{A}_{i_l}$, άρα $x \notin \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\prod_{i\in I} A_i}\ ,$$

άρα ισχύει η ισότητα.
(γ) Προκύπτει άμεσα από το (β).
(δ) Έστω $y = (y(i)) \in X$ και $U = U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{i\notin\{i_1,\dots,i_n\}} X_i$ βασική ανοιχτή περιοχή του y. Τότε το $z = (z(i)) \in X$ με $z(i) = y(i)$, αν $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$ και $z(i) = x^0(i)$, αν $i \notin \{i_1, \dots i_n\}$, ισχύει $z \in U \cap D$. Έπεται ότι $y \in \overline{D}$.

21. Έστω I ένα άπειρο σύνολο, $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $X = \prod_{i\in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο. Αν, για κάθε $i \in I$, ο X_i έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, αποδείξτε ότι η τοπολογία του X δεν είναι η διακριτή.

Υπόδειξη: Έστω $x = (x_i) \in X$. Αν το μονοσύνολο $\{x\}$ ήταν ανοιχτό θα έπρεπε να υπάρχει (μη κενό) βασικό ανοιχτό σύνολο της μορφής $U = U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{i\notin\{i_1,\ldots,i_n\}} X_i$ με $U \subseteq \{x\}$. Αφού, για κάθε $i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$, ο παράγοντας αυτού του γινομένου είναι X_i και ο X_i έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, το U δεν μπορεί να είναι μονοσύνολο. Συμπεραίνουμε ότι το $\{x\}$ δεν είναι ανοιχτό, άρα η καρτεσιανή τοπολογία δεν συμπίπτει με την διακριτή.

22. Έστω $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία τοπολογικών χώρων και $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ο χώρος γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο X_n είναι 1ος αριθμήσιμος, τότε ο X είναι 1ος αριθμήσιμος.

(β) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο X_n είναι 2ος αριθμήσιμος, τότε ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.

(γ) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο X_n είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι κάθε X_n είναι 1ος αριθμήσιμος και έστω $x = (x_n) \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $\mathcal{U}_n = \{U_n^k : k = 1, 2, \ldots\}$ μια αριθμήσιμη βάση ανοιχτών περιοχών του x_n στον χώρο X_n. Στον X θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{U} = \left\{ U_1^{k_1} \times U_2^{k_2} \times \cdots \times U_n^{k_n} \times \prod_{m>n} X_m \;:\; n \in \mathbb{N},\, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{U}$ αποτελεί μια βάση περιοχών του x στον χώρο X. Επιπλέον, η $\mathcal{U}$ είναι ισοπληθική με το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$, δηλαδή αριθμήσιμη.

(β) Ανάλογα με το (α), με τη διαφορά ότι εδώ, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, στη θέση της $\mathcal{U}_n$ θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X_n.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω D_n ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του χώρου X_n. Σταθεροποιούμε ένα $x^0 = (x_n^0) \in X$ και θέτουμε

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left((D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n) \times \prod_{m>n} \{x_m^0\} \right).$$

Αν $U = U_1 \times \cdots \times U_n \times \prod_{m>n} X_m$ είναι ένα βασικό ανοιχτό σύνολο στον X - δηλαδή για κάθε $k = 1, \ldots, n$ το U_k είναι ένα ανοιχτό μη κενό υποσύνολο του X_k, άμεσα ελέγχουμε ότι $U \cap D \neq \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι το D είναι πυκνό στον X. Επιπλέον, το D είναι αριθμήσιμο, ως ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων. Άρα ο X είναι διαχωρίσιμος.

23. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των πραγματικών ακολουθιών ως τοπολογικό χώρο με την τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$, δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n : U_n \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό για κάθε } \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{box}})$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος, άρα ούτε μετρικοποιήσιμος.

(β) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{box}})$ με $f(t) = (t, t, \ldots, t, \ldots)$, $t \in \mathbb{R}$, δεν είναι συνεχής.

Υπόδειξη: (α) Θα δείξουμε ότι για το $0 = (0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ δεν υπάρχει αριθμήσιμη βάση περιοχών στην τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$. Εφαρμόζουμε μια μέθοδο ανάλογη με το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor: Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ του 0 και, περνώντας σε υποσύνολα αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε U_n είναι της μορφής

$$U_n = (-\varepsilon_1^n \,, \, \varepsilon_1^n) \times (-\varepsilon_2^n \,, \, \varepsilon_2^n) \times \cdots \,,$$

όπου $\varepsilon_k^n > 0$, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$.
Θεωρούμε την $\mathscr{T}_{\text{box}}$ - ανοιχτή περιοχή του 0

$$W = \left(-\frac{\varepsilon_1^1}{2} \,, \, \frac{\varepsilon_1^1}{2}\right) \times \left(-\frac{\varepsilon_2^2}{2} \,, \, \frac{\varepsilon_2^2}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{\varepsilon_k^k}{2} \,, \, \frac{\varepsilon_k^k}{2}\right) \times \cdots \,.$$

Άμεσα ελέγχουμε ότι δεν υπάρχει n με $U_n \subseteq W$. Άτοπο, αφού είχαμε υποθέσει ότι η $\mathcal{U}$ είναι βάση περιοχών του 0. Συμπεραίνουμε ότι ο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{box}})$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος.

(β) Θεωρούμε την $\mathscr{T}_{\text{box}}$ - ανοιχτή περιοχή του 0

$$W = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2} \,, \, \frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{n} \,, \, \frac{1}{n}\right) \times \cdots \,.$$

Έχουμε:

$$t \in f^{-1}(W) \iff t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \iff t = 0 \,,$$

δηλαδή $f^{-1}(W) = \{0\}$, όχι ανοιχτό, άρα η f δεν είναι συνεχής.

24. Έστω Γ ένα μη κενό σύνολο. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{\Gamma}$ των συναρτήσεων από το Γ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης $\mathscr{T}_u$, δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση $\mathcal{B}_u$ των συνόλων της μορφής

$$V_{f,\varepsilon} = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\Gamma} : \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma) - g(\gamma)| < \varepsilon \right\} , \text{ όπου } f \in \mathbb{R}^{\Gamma}, \ \varepsilon > 0.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Η κλάση $\mathcal{B}_u$ είναι πράγματι βάση για κάποια τοπολογία.

(β) Ο χώρος $(\mathbb{R}^{\Gamma}, \mathscr{T}_u)$ είναι μετρικοποιήσιμος και μια μετρική η οποία επάγει την $\mathscr{T}_u$ είναι η d με $d(f, g) = \sup \Big\{ \min\{1, |f(\gamma) - g(\gamma)|\} : \gamma \in \Gamma \Big\}$, για κάθε $f, g \in \mathbb{R}^{\Gamma}$.

(γ) Μια ακολουθία (f_n) στον $\mathbb{R}^{\Gamma}$ συγκλίνει σε μια $f \in \mathbb{R}^{\Gamma}$ ως προς την $\mathscr{T}_u$ αν και μόνο αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο Γ.

(δ) Η τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$ στον $\mathbb{R}^\Gamma$ είναι ασθενέστερη της $\mathscr{T}_u$ (δηλαδή $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_u$) και, αν το Γ είναι άπειρο σύνολο, τότε $\mathscr{T} \subsetneqq \mathscr{T}_u$.

Υπόδειξη: (α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δύο τέτοιες περιοχές V_{f_1,ε_1} και V_{f_2,ε_2} και κάθε $g \in V_{f_1,\varepsilon_1} \cap V_{f_1,\varepsilon_1}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $V_{g,\varepsilon} \subseteq V_{f_1,\varepsilon_1} \cap V_{f_2,\varepsilon_2}$. Πράγματι, για δεδομένες V_{f_1,ε_1} και V_{f_2,ε_2} και $g \in V_{f_1,\varepsilon_1} \cap V_{f_2,\varepsilon_2}$, έστω $\delta_1 = \sup_\gamma |f_1(\gamma) - g(\gamma)| < \varepsilon_1$ και $\delta_2 = \sup_\gamma |f_2(\gamma) - g(\gamma)| < \varepsilon_2$ και θέτουμε $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_2 - \delta_2\}$. Άμεσα ελέγχουμε ότι $V_{g,\varepsilon_0} \subseteq V_{f_1,\varepsilon_1} \cap V_{f_2,\varepsilon_2}$.

(β) Άμεσα ελέγχουμε ότι η d είναι μετρική και ότι, για κάθε $f \in \mathbb{R}^\Gamma$ και κάθε ε με $0 < \varepsilon < 1$, ισχύει $B_d(f,\varepsilon) = V_{f,\varepsilon}$. Αυτό αποδεικνύει ότι η τοπολογία $\mathscr{T}_d$ συμπίπτει με την $\mathscr{T}_u$.

(γ) Για οποιαδήποτε ακολουθία (f_n) στον $\mathbb{R}^\Gamma$ ισχύει: $f_n \to f$ ομοιόμορφα, αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\sup_\gamma |f_n(\gamma) - f(\gamma)| < \varepsilon$, αν και μόνο αν, για κάθε $n \geq n_0$ $f_n \in V_{f,\varepsilon}$. Αυτό αποδεικνύει τη ζητούμενη ισοδυναμία.

(δ) Αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $f \in \mathbb{R}^\Gamma$, κάθε $\mathscr{T}$ - βασική ανοιχτή περιοχή της f περιέχει μια $\mathscr{T}_u$ - ανοιχτή περιοχή της f. Έστω λοιπόν

$$W = \big(f(\gamma_1) - \varepsilon_1, f(\gamma_1) + \varepsilon_1\big) \times \cdots \times \big(f(\gamma_n) - \varepsilon_n, f(\gamma_n) + \varepsilon_n\big) \times \mathbb{R}^{\Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}}$$

μια $\mathscr{T}$ - βασική ανοιχτή περιοχή της f. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Άμεσα ελέγχουμε ότι $V_{f,\varepsilon} \subseteq W$.

Αν τώρα το Γ είναι άπειρο, επιλέγοντας $\varepsilon = 1$, είναι φανερό ότι, για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιαδήποτε ανοιχτά διατήματα $I_1, \ldots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχουν το 0, ισχύει

$$I_1 \times \cdots \times I_n \times \mathbb{R}^{\Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}} \not\subseteq V_{0,1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mathscr{T} \neq \mathscr{T}_u$.

25. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ των πραγματικών ακολουθιών, θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$, την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης $\mathscr{T}_u$ και την box τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$.

(α) Να συγκρίνετε μεταξύ τους αυτές τις τοπολογίες.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ με

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots), \quad g(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \ldots), \ t \in \mathbb{R}.$$

Σε ποιες από τις παραπάνω τοπολογίες είναι καθεμιά από τις συναρτήσεις f, g συνεχής;

(α) Στην Άσκηση 25 είδαμε ότι $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_u$.
Αποδεικνύουμε τώρα ότι ισχύει $\mathscr{T}_u \subseteq \mathscr{T}_{\text{box}}$:
Έστω $x = \big(x(n)\big) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ και $V_{x,\varepsilon}$ μια $\mathscr{T}_u$ - βασική περιοχή του. Τότε η

$$W = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Big(x(n) - \frac{\varepsilon}{2}, x(n) + \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

είναι μια $\mathscr{T}_{\text{box}}$ - ανοιχτή περιοχή του x με $W \subseteq V_{x,\varepsilon}$.
Συμπεραίνουμε ότι $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_u \subseteq \mathscr{T}_{\text{box}}$.

(β) Καθεμιά από τις f και g είναι συνεχής ως προς την τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$, αφού, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι $\pi_n \circ f$ και $\pi_n \circ g$ είναι συνεχείς.

Η f δεν είναι συνεχής ως προς την τοπολογία $\mathscr{T}_u$, αφού για την $\mathscr{T}_u$ - ανοιχτή περιοχή $V_{0,1}$ του $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ισχύει

$$f(t) \in V_{0,1} \Longleftrightarrow \sup\{|nt| : n \in \mathbb{N}\} < 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \ |nt| < 1 \Longrightarrow t = 0\,,$$

δηλαδή $f^{-1}(V_{0,1}) = \{0\}$, που δεν είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής ως προς την τοπολογία $\mathscr{T}_u$: Πράγματι, έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Είναι $f(t_0) = (t_0, \frac{1}{2}t_0, \frac{1}{3}t_0, \ldots)$, οπότε για την περιοχή $V_{f(t_0),\varepsilon}$ έχουμε:
αν $|t - t_0| < \varepsilon$, τότε $\sup\{|f(t)_n - f(t_0)_n| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\frac{1}{n}|t - t_0| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$, δηλαδή $f(t) \in V_{f(t_0),\varepsilon}$.

Η f δεν είναι συνεχής ως προς την τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$, αφού δεν είναι συνεχής ως προς την ασθενέστερη τοπολογία $\mathscr{T}_u$.

Η g δεν είναι συνεχής ως προς την τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$. Πράγματι: Για την $\mathscr{T}_{\text{box}}$ - ανοιχτή περιοχή του 0 $W = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right)$, ισχύει

$$g(t) \in W \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \ \left|\frac{1}{n}t\right| < \frac{1}{n^2} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \ |t| < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow t = 0$$

δηλαδή $g^{-1}(W) = \{0\}$, που δεν είναι ανοιχτό.