# Τοπολογία
## 5η Σειρά Ασκήσεων
## Συμπάγεια και συνεκτικότητα

**36.** Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση για την τοπολογία του. Αποδείξτε ότι: Ο $X$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε κάλυμμα του $X$ από μέλη της βάσης $\mathcal{B}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

*Υπόδειξη*: Έστω $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ μια βάση για την τοπολογία του $X$. Υποθέτουμε ότι κάθε κάλυμμα του $X$ από μέλη της $\mathcal{B}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα και θα δείξουμε ότι ο $X$ είναι συμπαγής. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ένα τυχόν ανοιχτό κάλυμμα του $X$. Για κάθε $i \in I$ υπάρχει ένα σύνολο δεικτών $J_i \subseteq J$ ώστε $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_j$. Τότε η οικογένεια $\{B_j : j \in \bigcup_{i\in I} J_i\}$ είναι ένα κάλυμμα του $X$ από μέλη της βάσης $\mathcal{B}$, άρα υπάρχουν $j_1, \ldots, j_n \in \bigcup_{i\in I} J_i$ με $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k}$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$, επιλέγουμε ένα $i_k \in I$ με $B_{j_k} \subseteq U_{i_k}$. Τότε, η οικογένεια $(U_{i_k})_{k=1}^{n}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα της $(U_i)_{i\in I}$ για τον $X$.
Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι προφανής.

**37.** Έστω $X$ σύνολο και $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ δύο διαφορετικές τοπολογίες στο $X$ με την ιδιότητα καθένας από τους τοπολογικούς χώρους $(X, \mathscr{T})$ και $(X, \mathscr{T}')$ να είναι συμπαγής και Hausdorff. Αποδείξτε ότι οι $\mathscr{T}$ και $\mathscr{T}'$ δεν συγκρίνονται, δηλαδή καμία από τις δύο δεν είναι ισχυρότερη της άλλης.

*Υπόδειξη*: Έστω $\mathscr{T}_1$ και $\mathscr{T}_2$ δύο τοπολογίες πάνω στο σύνολο $X$. Ξέρουμε ότι αν ο $(X, \mathscr{T}_1)$ είναι συμπαγής, ο $(X, \mathscr{T}_2)$ είναι Hausdorff και $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$, τότε $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. (Υπενθυμίζουμε ότι αυτό συμβαίνει γιατί η ταυτοτική απεικόνιση $I_X : (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ είναι $1-1$, επί και συνεχής με πεδίο ορισμού συμπαγή χώρο και πεδίο τιμών χώρο Hausdorff, άρα είναι ομοιομορφισμός).
Έπεται ότι αν μία από τις δύο τοπολογίες $\mathscr{T}$ και $\mathscr{T}'$ ήταν ισχυρότερη της άλλης, τότε αυτές θα ταυτίζονταν. Συμπεραίνουμε ότι οι $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ δεν συγκρίνονται.

**38.** Εξετάστε αν το διάστημα $[0, 1]$ είναι συμπαγές ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με καθεμιά από τις ακόλουθες τοπολογίες:

(α) Τη συναριθμήσιμη τοπολογία

$$\mathscr{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} : \text{ το } \mathbb{R} \setminus U \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο } \} \cup \{\emptyset\}.$$

(β) Την τοπολογία Sorgenfrey $\mathscr{T}_S$.

*Υπόδειξη*: (α) Αποδεικνύουμε ότι το $[0, 1]$ δεν είναι συμπαγές σύνολο στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$: Θέτουμε $K = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Θεωρούμε την ακολουθία $\mathscr{T}$ - ανοιχτών συνόλων $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (\mathbb{R} \setminus K) \cup \{q_1, \ldots, q_n\}$. Η $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του $[0, 1]$ που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (συμπληρώστε την απόδειξη).

(β) Αποδεικνύουμε ότι το $[0, 1]$ δεν είναι συμπαγές σύνολο στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_S)$ με δύο τρόπους:
*1ος τρόπος*: Έστω $\mathscr{T}^{[0,1]}$ ο περιορισμός της συνήθους τοπολογίας του $\mathbb{R}$ στο $[0, 1]$ και $\mathscr{T}_S^{[0,1]}$ ο περιορισμός της $\mathscr{T}_S$ στο $[0, 1]$. Ξέρουμε ότι ισχύει $\mathscr{T}^{[0,1]} \subseteq \mathscr{T}_S^{[0,1]}$. Αν ο χώρος $\left([0, 1], \mathscr{T}_S^{[0,1]}\right)$

ήταν συμπαγής, τότε θα έπρεπε να ισχύει $\mathscr{T}^{[0,1]} = \mathscr{T}_S^{[0,1]}$, πράγμα άτοπο (δείτε και την απόδειξη της Άσκησης 37). Συμπεραίνουμε ότι ο $\left([0,1], \mathscr{T}_S^{[0,1]}\right)$ δεν είναι συμπαγής.

*2ος τρόπος*: Άμεσα ελέγχουμε ότι η οικογένεια

$$\left\{[0, 1-\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right\} \cup \left\{[1,2)\right\}$$

είναι ένα $\mathscr{T}_S$ - ανοιχτό κάλυμμα του $[0,1]$ που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

**39.** (α) Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $(x_n)$ ακολουθία στον $X$ η οποία συγκλίνει σε ένα $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ είναι συμπαγές.

(β) Εξετάστε αν ισχύει συμπέρασμα ανάλογο του (α), αν στη θέση της ακολουθίας έχουμε ένα συγκλίνον δίκτυο.

*Υπόδειξη*: (α) Σημειώσεις Μερκουράκη, Παράδειγμα 3.3(3).

(β) Δεν ισχύει το ανάλογο για δίκτυα. Παράδειγμα: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη τοπολογία θεωρούμε το δίκτυο $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ με κατευθυνόμενο σύνολο το $(\mathbb{Z}, <)$ που ορίζεται ως εξής: $x_k = k$, αν $k \leq 0$ και $x_k = \frac{1}{k}$, αν $k > 0$. Τότε $x_k \to 0$, αλλά το σύνολο $\{x_k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ δεν είναι συμπαγές, αφού δεν είναι φραγμένο.

**40.** Έστω $X, Y$ χώροι Hausdorff, $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και $F_n,\ n \in \mathbb{N}$, φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του $X$. Αποδείξτε ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f\left(F_n\right)$.

*Υπόδειξη*: Εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει πάντα $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f\left(F_n\right)$.
Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in F_n$ με $f(x_n) = y$. Για κάθε $n$, θέτουμε $K_n = f^{-1}(\{y\}) \cap F_n$, οπότε η ακολουθία $(K_n)$ είναι μια ακολουθία κλειστών μη κενών συνόλων που περιέχονται στο συμπαγές σύνολο $F_1$ (εδώ χρησιμοποιούμε ότι ο $Y$ είναι χώρος Hausdorff, οπότε το μονοσύνολο $\{y\}$ είναι κλειστό και ότι ο $X$ είναι Hausdorff, οπότε τα συμπαγή $F_n$ είναι κλειστά). Έπεται ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Τότε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ και $f(x) = y$, άρα $y \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)$.

**41.** Έστω $X, Y$ τοπολογικοί χώροι με τον $Y$ συμπαγή και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι αν το $V$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X \times Y$ με $\{x_0\} \times Y \subseteq V$, τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή $W$ του $x_0$ στον $X$ τέτοια ώστε $W \times Y \subseteq V$.

*Υπόδειξη*: Έστω ότι ο $Y$ είναι συμπαγής, το $V$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X \times Y$ και $\{x_0\} \times Y \subseteq V$. Τότε, για κάθε $y \in Y$, υπάρχει ένα βασικό ανοιχτό σύνολο της τοπολογίας γινόμενο, δηλαδή ένα σύνολο της μορφής $U_y^{x_0} \times V_y$, όπου τα $U_y^{x_0}$ και $V_y$ είναι ανοιχτές περιοχές των $x_0$ (στον $X$) και $y$ (στον $Y$) αντίστοιχα, με $U_y^{x_0} \times V_y \subseteq V$. Η οικογένεια $\{V_y : y \in Y\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του $Y$ και, αφού ο $Y$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ με $Y = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$. Θέτουμε $W = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}^{x_0}$. Τότε το $W$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του $x_0$ και $W \times Y \subseteq V$.

**42.** Θεωρούμε την ευθεία του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$. Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}_S$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

*Υπόδειξη:* Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο
*Λήμμα:* Κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία.
*Απόδειξη του Λήμματος:* Η επαγωγική κατασκευή της γνησίως αύξουσας ακολουθίας μέσα στο $A$ βαίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό.
*Ισχυρισμός:* Για κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο $B$ του $\mathbb{R}$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε το σύνολο $(b, +\infty) \cap B$ να είναι υπεραριθμήσιμο.

*Απόδειξη του Ισχυρισμού:* Κατ' αρχάς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $B$ είναι κάτω φραγμένο: Πράγματι, γράφοντας $B = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [(k, +\infty) \cap B]$, βλέπουμε ότι υπάρχει ένα $k_0 \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $B_0 = (k_0, +\infty) \cap B$ να είναι υπεραριθμήσιμο (διαφορετικά το $B$ θα ήταν αριθμήσιμο ως ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων). Αντικαθιστώντας το $B$ με το $B_0$ υποθέτουμε λοιπόν ότι το $B$ είναι κάτω φραγμένο.
Έστω $t = \inf B$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:
*1η Περίπτωση:* $t \in B$. Τότε, θέτοντας $b = t$, έχουμε το ζητούμενο.
*2η Περίπτωση:* $t \notin B$. Τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $(b_n)$ στο $B$ με $b_n \to t$. Γράφοντας $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [(b_n, +\infty) \cap B]$, βλέπουμε όπως προηγουμένως ότι υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $(b_{n_0}, +\infty) \cap B$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Θέτουμε τότε $b = b_{n_0}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Ισχυρισμού.

Περνάμε τώρα στην επαγωγική κατασκευή της γνησίως αύξουσας ακολουθίας $(x_n)$ στο σύνολο $A$:
Για $n = 1$, με βάση τον ισχυρισμό, υπάρχει $x_1 \in A$ με το σύνολο $(x_1, +\infty) \cap A$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τα $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ έχουν επιλεγεί μέσα από το $A$ έτσι ώστε το σύνολο $A_n = (x_n, +\infty) \cap A$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για το σύνολο $A_n$, βρίσκουμε $x_{n+1} \in A$ με $x_{n+1} > x_n$ τέτοιο ώστε το σύνολο $A_{n+1} = (x_{n+1}, +\infty) \cap A$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα της κατασκευής και την απόδειξη του Λήμματος.

Με τη βοήθεια του Λήμματος, μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο της ευθείας του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S = (\mathbb{R}, \mathscr{T}_S)$ είναι το πολύ αριθμήσιμο: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_S$ - συμπαγές. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, αφού η τοπολογία $\mathscr{T}_S$ είναι ισχυρότερη από τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$, το $A$ είναι συμπαγές και με τη συνήθη τοπολογία, ειδικότερα είναι φραγμένο. Υποθέτουμε τώρα ότι το $A$ είναι υπεραριθμήσιμο. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(x_n)$ μέσα στο $A$. Θέτουμε $a = \inf A$ και $b = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{U} = \big\{[a, x_n) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[b, +\infty)\big\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η οικογένεα $\mathcal{U}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του $A$ που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, πράγμα άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $A$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

**43.** Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $(x_n)$ ακολουθία στον $X$. Ένα $x_0 \in X$ λέγεται *οριακό σημείο* της ακολουθίας $(x_n)$, αν, για κάθε περιοχή $U$ του $x_0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $m \geq n$ με $x_m \in U$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν ο $X$ είναι 1ος αριθμήσιμος και το $x_0 \in X$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας $(x_n)$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ που συγκλίνει στο $x_0$.

(β) Αν ο $X$ είναι συμπαγής, τότε κάθε ακολουθία στον $X$ έχει ένα τουλάχιστον οριακό σημείο.

(γ) Ένας τοπολογικός χώρος $X$ λέγεται *ακολουθιακά συμπαγής* αν κάθε ακολουθία στον $X$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του $X$. Έπεται από τα (α) και (β) ότι αν ένας 1ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι συμπαγής, τότε είναι και ακολουθιακά συμπαγής.

(δ) Το αντίστροφο του (γ) δεν ισχύει. Ισχύει όμως το εξής: Αν ένας τοπολογικός χώρος $X$ είναι ακολουθιακά συμπαγής, τότε είναι *αριθμήσιμα συμπαγής*, δηλαδή κάθε *αριθμήσιμο* ανοιχτό κάλυμμα του $X$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(ε) Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι ένας *μετρικός χώρος* είναι συμπαγής αν και μόνο αν είναι ακολουθιακά συμπαγής.

*Υπόδειξη*: (α) Υποθέτουμε ότι ο τοπολογικός χώρος $X$ είναι 1ος αριθμήσιμος και έστω $(x_n)$ μια ακολουθία στον $X$ και $x_0$ ένα οριακό σημείο της. Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση περιοχών $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $x_0$. Περνάμε σε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι επίσης βάση περιοχών του $x_0$ θέτοντας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια υπακολουθία $(x_{k_n})$ της $(x_n)$ ως εξής:
Για $n = 1$ υπάρχει $k_1 \geq 1$ με $x_{k_1} \in V_1$.
Υποθέτουμε ότι τα $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $x_{k_i} \in V_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Υπάρχει τότε $k_{n+1} \geq k_n + 1$ με $x_{k_{n+1}} \in V_{n+1}$.
Προκύπτει άμεσα τώρα ότι $x_{k_n} \to x_0$. Πράγματι, αν δοθεί περιοχή $U$ του $x_0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $V_m \subseteq U$ και, αφού η ακολουθία $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, έχουμε $x_{k_n} \in V_m$ για κάθε $n \geq m$.

(β) Έστω $X$ συμπαγής τοπολογικός χώρος και $(x_n)$ ακολουθία στον $X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = \{x_m : m \geq n\}$. Τότε η ακολουθία $(\overline{F}_n)$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών συνόλων σε συμπαγή χώρο, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n \neq \emptyset$. Έστω $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$. Τότε το $x_0$ είναι οριακό σημείο της $(x_n)$. Πράγματι: Έστω $U$ περιοχή του $x_0$ και $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει $x_0 \in \overline{F}_n$, άρα $U \cap F_n \neq \emptyset$, επομένως υπάρχει $m \geq n$ με $x_m \in U$.

(γ) Προκύπτει άμεσα από τα (α) και (β).

(δ) Υποθέτουμε ότι ο τοπολογικός χώρος $X$ είναι ακολουθιακά συμπαγής και έστω $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα αριθμήσιμο ανοιχτό κάλυμμά του. Υποθέτουμε, με σκοπό να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι δεν υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα της $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γιά τον $X$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in X$ με $x_n \notin U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$. Έπεται ότι η ακολουθία $(x_n)$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Πράγματι, αν $y \in X$, θα δείξουμε ότι το $y$ δεν είναι όριο υπακολουθίας της $(x_n)$: Αφού $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, υπάρχει $n_0$ με $y \in U_{n_0}$. Όμως, για κάθε $n \geq n_0$, $x_n \notin U_{n_0}$, επομένως δεν υπάρχει υπακολουθία της $(x_n)$ που συγκλίνει στο $y$. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο $X$ είναι ακολουθιακά συμπαγής. Συμπεραίνουμε ότι το αριθμήσιμο ανοιχτό κάλυμμα $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(ε) Θεωρείται γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση.

**44.** Δίνουμε ένα παράδειγμα ενός τοπολογικού χώρου που είναι ακολουθιακά συμπαγής, αλλά όχι συμπαγής:
Έστω $\Gamma$ ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Θεωρούμε τον υπόχωρο $S$ του $[0,1]^{\Gamma}$ που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : \Gamma \to [0,1]$ που έχουν αριθμήσιμο φορέα (δηλαδή το σύνολο $\mathrm{supp}(f) = \{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο). Αποδείξτε ότι το $S$ είναι ακολουθιακά

συμπαγές. Επιπλέον, αποδείξτε ότι το $S$ είναι πυκνό στον $[0,1]^\Gamma$, επομένως δεν είναι κλειστό, άρα ούτε και συμπαγές υποσύνολο του $[0,1]^\Gamma$.

*Υπόδειξη*: Αποδεικνύουμε πρώτα ότι ο $S$ είναι ακολουθιακά συμπαγής: Έστω $(f_n)$ ακολουθία στο $S$. Θέτουμε $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{supp}(f_n)$. Αφού, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $\mathrm{supp}(f_n)$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, το $\Delta$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\Gamma$.
Έστω $g_0 \in [0,1]^\Gamma$ η μηδενική συνάρτηση, δηλαδή $g_0(\gamma) = 0$, για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Τότε το σύνολο $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ περιέχεται στον υπόχωρο

$$Y = [0,1]^\Delta \times \prod_{\gamma\in\Gamma\setminus\Delta} \{g_0(\gamma)\}$$

του $S$. Όμως ο $Y$ είναι ομοιομορφικός με τον $[0,1]^\Delta$, ο οποίος είναι μετρικοποιήσιμος ως γινόμενο αριθμήσιμου πλήθους μετρικών χώρων και συμπαγής, ως γινόμενο συμπαγών χώρων σύμφωνα με το θεώρημα του Tychonoff. Έπεται ότι ο $Y$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος, άρα είναι ακολουθιακά συμπαγής (Άσκηση 43ε). Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $(f_n)$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του $Y \subseteq S$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι ο $S$ δεν είναι συμπαγής. Αφού ο $[0,1]^\Gamma$ είναι χώρος Hausdorff, αρκεί να δείξουμε ότι το $S$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^\Gamma$. Ειδικότερα, το $S$ είναι πυκνό στον $[0,1]^\Gamma$. Πράγματι, αν $g \in [0,1]^\Gamma$ και $W$ είναι μια ανοιχτή περιοχή της $g$, τότε υπάρχει μια βασική ανοιχτή περιοχή $U$ της $g$ της μορφής

$$U = \prod_{i=1}^{n} (g(\gamma_i) - \varepsilon, g(\gamma_i) + \varepsilon) \times [0,1]^{\Gamma\setminus\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}}$$

με $U \subseteq W$. Θεωρούμε την $f \in [0,1]^\Gamma$ με $f(\gamma_i) = g(\gamma_i)$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$ και $f(\gamma) = 0$, αν $\gamma \notin \{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$. Τότε $f \in S \cap U$. Έπεται ότι $g \in \overline{S}$.

**45.** (α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι 2ος αριθμήσιμος.

(β) Δώστε παράδειγμα ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου που δεν είναι 2ος αριθμήσιμος.

*Υπόδειξη*: (α) Έστω $(X,d)$ συμπαγής μετρικός χώρος. Σταθεροποιώντας $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το ανοιχτό κάλυμμα $\{B(x,\frac{1}{n}) : x \in X\}$ του $X$. Αφού ο $X$ είναι συμπαγής, υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $F_n$ του $X$ τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{z\in F_n} B(z,\frac{1}{n})$. Θέτουμε τώρα

$$\mathcal{B} = \left\{ B(z,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, z \in F_n \right\}.$$

Η οικογένεια ανοιχτών μπαλών $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη και θα δείξουμε ότι είναι βάση για την τοπολογία του $X$. Πράγματι: έστω $W$ ανοιχτό υποσύνολο του $X$ και $x \in W$. Υπάρχει τότε $n \in \mathbb{N}$ με $B(x,\frac{2}{n}) \subseteq W$. Αφού $X = \bigcup_{z\in F_n} B(z,\frac{1}{n})$, υπάρχει $z \in F_n$ με $x \in B(z,\frac{1}{n})$. Τότε $B(z,\frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$ και $x \in B(z,\frac{1}{n}) \subseteq B(x,\frac{2}{n}) \subseteq W$. Συμπεραίνουμε ότι η αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία του $X$, άρα ο $X$ είναι 2ος αριθμήσιμος.

(β) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία $\mathscr{T}_{cf}$. Έχουμε δει (Άσκηση 10, 2η Σειρά) ότι ο χώρος $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cf})$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος άρα ούτε 2ος αριθμήσιμος.

Όμως ο χώρος αυτός είναι συμπαγής. Πράγματι: Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμμά του. Επιλέχοντας οποιοδήποτε $i_0 \in I$ με $U_{i_0} \neq \emptyset$, έχουμε ότι το $\mathbb{R} \setminus U_{i_0}$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή $\mathbb{R} \setminus U_{i_0} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ για κάποια $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας $i_1, \ldots, i_n \in I$ με $x_k \in U_{i_k}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, έχουμε $\mathbb{R} = \bigcup_{k=0}^{n} U_{i_k}$. Συμπεραίνουμε ότι ο $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf})$ είναι συμπαγής.

**46.** Αποδείξτε ότι ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός χώρου Hausdorff με τουλάχιστον δύο σημεία δεν είναι συνεκτικό.

*Υπόδειξη*: Έστω $X$ χώρος Hausdorff και $Y$ πεπερασμένο υποσύνολο του $X$. Τότε ο $Y$ ως υπόχωρος του $X$ έχει τη διακριτή τοπολογία. Πράγματι, αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $X$ είναι κλειστό, αν $x \in Y$, τότε το $Y \setminus \{x\}$ είναι κλειστό στον $X$, άρα και στον $Y$, οπότε το $\{x\}$ είναι ανοιχτό στον $Y$. Συμπεραίνουμε ότι ο $Y$ έχει τη διακριτή τοπολογία. Αν επιπλέον $|Y| \geq 2$, τότε $Y = \{x\} \cup (Y \setminus \{x\})$, όπου τα $\{x\}$ και $Y \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτά μη κενά, άρα ο $Y$ δεν είναι συνεκτικός.

**47.** Αποδείξτε ότι ο κύκλος $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ δεν είναι ομοιομορφικός με κανένα από τα διαστήματα $[0, 1]$, $(0, 1)$ ή $[0, 1)$.

*Υπόδειξη*: Με απαγωγή σε άτοπο: Υποθέτουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : [0, 1] \to S^1$ (η απόδειξη είναι όμοια και για τις άλλες περιπτώσεις). Θεωρούμε τους υποχώρους $Y = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\} = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ του $[0, 1]$ και $Z = S^1 \setminus \{f\left(\frac{1}{2}\right)\}$ του $S^1$. Τότε ο περιορισμός της $f$ στον $Y$ θα είναι ομοιομορφισμός μεταξύ του $Y$ και του $Z$, πράγμα άτοπο, αφού ο $Y$ δεν είναι συνεκτικός, ενώ ο $Z$ είναι συνεκτικός, ως ομοιομορφικός με ανοιχτό διάστημα.

**48.** Έστω $f : S^1 \to \mathbb{R}$ συνεχής απεικόνιση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in S^1$ με $f(x) = f(-x)$.

*Υπόδειξη*: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : S^1 \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - f(-x)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in S^1$ ισχύει $g(-x) = -g(x)$. Επομένως, είτε η $g$ είναι σταθερά ίση με 0, οπότε το ζητούμενο έπεται άμεσα, είτε η $g$ αλλάζει πρόσημο. Στη δεύτερη περίπτωση, αφού ο $S^1$ είναι συνεκτικός χώρος και η $g$ είναι συνεχής, το $g(S^1)$ είναι διάστημα που αναγκαστικά περιέχει το 0, οπότε πάλι έπεται το ζητούμενο. (Παρατηρήστε ότι αυτό που στην ουσία χρησιμοποιούμε είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού συνεκτικό χώρο ικανοποιεί το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.)

**49.** Ένας τοπολογικός χώρος $X$ λέγεται *κατά τόξα συνεκτικός* αν, για κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in X$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0, 1] \to X$ με $f(0) = x$ και $f(1) = y$ (δηλαδή υπάρχει συνεχής διαδρομή από το $x$ στο $y$).

(α) Αποδείξτε ότι αν ένας τοπολογικός χώρος $X$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε είναι και συνεκτικός.

(β) Αποδείξτε ότι ένας χώρος μπορεί να είναι συνεκτικός χωρίς να είναι κατά τόξα συνεκτικός, θεωρώντας το παράδειγμα του υποχώρου $Y$ του $\mathbb{R}^2$ με

$$Y = \Big\{\big(x, \sin\big(\frac{1}{x}\big)\big) :\ 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\Big\} \cup \Big\{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\Big\}.$$

*Υπόδειξη*: (α) Σημειώσεις Μερκουράκη, σελίδα 148.

(β) Έχουμε δει ότι ο $Y$ είναι συνεκτικός: Είναι η κλειστή θήκη του υποχώρου $Z = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : \ 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\right\}$, ο οποίος είναι συνεκτικός ως εικόνα του διαστήματος $(0, \frac{1}{\pi}]$ μέσω της συνεχούς συνάρτησης $\phi$ με $\phi(x) = \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι ο $Y$ δεν είναι κατά τόξα συνεκτικός, ειδικότερα δεν υπάρχει συνεχής $f : [0,1] \to Y$ με $f(0) = (0,0)$ και $f(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια $f$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $f(t) = (x(t), y(t))$. Είναι $x(0) = 0$ και $x(1) = \frac{1}{\pi}$. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(t_n)$ στο $[0,1]$ με $x(t_n) = \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}$, οπότε και $y(t_n) = \sin\left(\frac{1}{x(t_n)}\right) = (-1)^n$. Η ακολουθία $(t_n)$ ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλινει σε ένα $t \geq 0$, όμως η

$$f(t_n) = \left(\frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}}\, , \, (-1)^n\right)$$

αποκλίνει, άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι στον $Y$ δεν υπάρχει συνεχής διαδρομή από το $(0,0)$ στο $(\frac{1}{\pi}, 0)$ και άρα ο $Y$ δεν είναι κατά τόξα συνεκτικός.

**50.** (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ο χώρος $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός.

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geq 2$, ο $\mathbb{R}^n$ δεν είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}$.

*Υπόδειξη*: (α) Σημειώσεις Μερκουράκη, Παράδειγμα 6.19(3).

(β) Είναι ανάλογη με την Άσκηση 47: Υποθέτουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Τότε ο περιορισμός της $f$ στον υπόχωρο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ θα ήταν ομοιομορφισμός μεταξύ αυτού και του $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$. Όμως ο πρώτος χώρος είναι συνεκτικός, αφού είναι κατά τόξα συνεκτικός, ενώ ο δεύτερος δεν είναι συνεκτικός, αφού δεν είναι διάστημα.