

Τοπολογία
4η Σειρά Ασκήσεων
Διαχωριστικά Αξιώματα - Λήμμα Urysohn
Θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn

26. Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο X είναι κανονικός (T_3), τότε κάθε δύο διαφορετικά σημεία του έχουν περιοχές των οποίων οι κλειστές θήκες είναι ξένες.

(β) Αν ο X είναι φυσιολογικός (T_4), τότε κάθε δύο ξένα κλειστά υποσύνολά του περιέχονται σε ανοιχτά σύνολα των οποίων οι κλειστές θήκες είναι ξένες.

27. Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \rightarrow Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν ο Y είναι χώρος Hausdorff (T_2), αποδείξτε ότι το σύνολο $K = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.

28. Έστω X 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και S ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολό του. Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων του S που είναι σημεία συσσώρευσης του S είναι υπεραριθμήσιμο. Ειδικότερα, ο X δεν περιέχει κανένα υπεραριθμήσιμο διακριτό υποσύνολο.

29. Αποδείξτε ότι κάθε άπειρος χώρος Hausdorff περιέχει έναν άπειρο υπόχωρο του οποίου η σχετική τοπολογία είναι η διακριτή.

(Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανοιχτών μη κενών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $X \setminus \bigcup_{k=1}^n \bar{U}_k$ να είναι άπειρο και $U_{n+1} \subseteq X \setminus \bigcup_{k=1}^n \bar{U}_k$.)

30. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός T_4 χώρου είναι T_4 .

(β) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι T_4 , ο Y είναι T_1 και υπάρχει απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ συνεχής, κλειστή και επί του Y , τότε ο Y είναι T_4 .

31. Όπως ξέρουμε, ένας υπόχωρος ενός T_4 χώρου μπορεί να μην είναι T_4 και το καρτεσιανό γινόμενο T_4 χώρων μπορεί να μην είναι T_4 . Από την άλλη μεριά, αποδείξτε ότι ισχύει το εξής: Αν ο χώρος γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ είναι T_4 , τότε και κάθε X_i είναι T_4 .

32. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $(U_r)_{r \in D}$ που ορίσαμε στην απόδειξη του Λήμματος του Urysohn και την αντίστοιχη συνάρτηση f . Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, 1)$, ισχύει:

$$f^{-1}(\{x\}) = \bigcap_{r \in D, r > x} U_r \setminus \bigcup_{s \in D, s < x} U_s.$$

33. Δώστε μια άμεση απόδειξη του Λήμματος του Urysohn για μετρικούς χώρους (X, d) , θεωρώντας τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

όπου $d(x, C) = \inf\{d(x, c) : c \in C\}$, για κάθε $x \in X$ και $C \subseteq X$, $C \neq \emptyset$.

34. Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται σύνολο G_δ αν ισούται με την τομή μιας ακολουθίας ανοιχτών συνόλων, δηλαδή $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, όπου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $G_n \subseteq X$ είναι ανοιχτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν ο X είναι 1ος αριθμήσιμος και T_1 τοπολογικός χώρος, τότε τα μονοσύνολα του X είναι G_δ σύνολα.

(β) Έστω X T_4 χώρος και A υποσύνολο του X . Το A είναι κλειστό και G_δ αν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, 1]$ τέτοια ώστε $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

35. Δώστε παράδειγμα ενός 2ου αριθμήσιμου χώρου Hausdorff που δεν είναι μετριοποιήσιμος.