Τοπολογία

3η Σειρά Ασκήσεων

Γινόμενα τοπολογικών χώρων

20. Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, $A_i \subseteq X_i$, για κάθε $i \in I$ και $X = \prod_{i\in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν, για κάθε $i \in I$, το A_i είναι κλειστό στον X_i, τότε το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι κλειστό στον X.

(β) Γενικά ισχύει

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i\in I} A_i}.$$

(γ) Το $\prod_{i\in I} A_i$ είναι πυκνό στον X, αν και μόνο αν, για κάθε $i \in I$, το A_i είναι πυκνό στον X_i.

(δ) Έστω $x^0 = \big(x^0(i)\big)_{i\in I}$ ένα στοιχείο του X. Σταθεροποιούμε το x^0 και θέτουμε

$$D = \left\{x = \big(x(i)\big) \in X : \text{το } x \text{ διαφέρει από το } x^0 \text{ σε ένα το πολύ πεπερασμένο σύνολο δεικτών}\right\}.$$

Τότε το D είναι πυκνό στον X.

21. Έστω I ένα άπειρο σύνολο, $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, και $X = \prod_{i\in I} X_i$ ο χώρος γινόμενο. Αν, για κάθε $i \in I$, ο X_i έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, αποδείξτε ότι η τοπολογία του X δεν είναι η διακριτή.

22. Έστω $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία τοπολογικών χώρων και $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ο χώρος γινόμενο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο X_n είναι 1ος αριθμήσιμος, τότε ο X είναι 1ος αριθμήσιμος.

(β) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο X_n είναι 2ος αριθμήσιμος, τότε ο X είναι 2ος αριθμήσιμος.

(γ) Αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο X_n είναι διαχωρίσιμος, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.

23. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των πραγματικών ακολουθιών ως τοπολογικό χώρο με την τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$, δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n : U_n \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό για κάθε } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{box}})$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος, άρα ούτε μετρικοποιήσιμος.

(β) Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{\text{box}})$ με $f(t) = (t, t, \ldots, t, \ldots)$, $t \in \mathbb{R}$, δεν είναι συνεχής.

24. Έστω Γ ένα μη κενό σύνολο. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\Gamma$ των συναρτήσεων από το Γ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης $\mathscr{T}_u$, δηλαδή την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση $\mathcal{B}_u$ των συνόλων της μορφής

$$V_{f,\varepsilon} = \left\{ g \in \mathbb{R}^\Gamma : \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma) - g(\gamma)| < \varepsilon \right\}, \text{ όπου } f \in \mathbb{R}^\Gamma,\ \varepsilon > 0.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Η κλάση $\mathcal{B}_u$ είναι πράγματι βάση για κάποια τοπολογία.

(β) Ο χώρος $(\mathbb{R}^\Gamma, \mathscr{T}_u)$ είναι μετρικοποιήσιμος και μια μετρική η οποία επάγει την $\mathscr{T}_u$ είναι η d με $d(f,g) = \sup\Big\{ \min\{1, |f(\gamma) - g(\gamma)|\} : \gamma \in \Gamma \Big\}$, για κάθε $f, g \in \mathbb{R}^\Gamma$.

(γ) Μια ακολουθία (f_n) στον $\mathbb{R}^\Gamma$ συγκλίνει σε μια $f \in \mathbb{R}^\Gamma$ ως προς την $\mathscr{T}_u$ αν και μόνο αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο Γ.

(δ) Η τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$ στον $\mathbb{R}^\Gamma$ είναι ασθενέστερη της $\mathscr{T}_u$ (δηλαδή $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_u$) και, αν το Γ είναι άπειρο σύνολο, τότε $\mathscr{T} \subsetneqq \mathscr{T}_u$.

25. Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ των πραγματικών ακολουθιών, θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$, την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης $\mathscr{T}_u$ και την box τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$.

(α) Να συγκρίνετε μεταξύ τους αυτές τις τοπολογίες.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{N}$ με

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots), \quad g(t) = (t, \frac{1}{2}t, \frac{1}{3}t, \ldots),\ t \in \mathbb{R}.$$

Σε ποιες από τις παραπάνω τοπολογίες είναι καθεμιά από τις συναρτήσεις f, g συνεχής;