Τοπολογία

2η Σειρά Ασκήσεων

Βασικές έννοιες, ακολουθίες και δίκτυα, συνεχείς συναρτήσεις

10. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathscr{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο χώρος $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, κατά συνέπεια ούτε δεύτερος αριθμήσιμος.

(β) Κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι $\mathscr{T}$-πυκνό στον X, κατά συνέπεια ο $(X, \mathscr{T})$ είναι διαχωρίσιμος.

11. (α) Αποδείξτε ότι γενικά σε έναν τοπολογικό χώρο, μια ακολουθία (ή ένα δίκτυο) μπορεί να συγκλίνει σε πολλά διαφορετικά όρια. Μπορείτε να βρείτε ένα παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας στον χώρο $\mathbb{N}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία;

(β) Αποδείξτε ότι ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T})$ είναι T_2, τότε κάθε συγκλίνον δίκτυο στον X έχει μοναδικό όριο.

12. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την κλάση $\mathcal{C}$ των κλειστών διαστημάτων

$$\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

Εξετάστε αν η κλάση $\mathcal{C}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Θεωρώντας την $\mathcal{C}$ ως υποβάση, ποια είναι η τοπολογία που παράγει;

13. Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}_S$ την ευθεία Sorgenfrey, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία που έχει ως βάση την κλάση των ημιανοιχτών διαστημάτων της μορφής $[a, b), a < b$.

(α) Αποδείξτε ότι στον $\mathbb{R}_S$ κάθε φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν η ακολουθία $x_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στον $\mathbb{R}_S$.

(γ) Στον χώρο γινόμενο $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. Αποδείξτε ότι $A' = \emptyset$, δηλαδή το A είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι μεμονωμένο σημείο.

14. (α) Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_S$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής ως συνάρτηση από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (δηλαδή: για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $a \leq x < a + \delta$, τότε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$).

(β) Αποδείξτε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ στον $\mathbb{R}_S$ είναι οι σταθερές.

(γ) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x) = -x$ είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_S$ στον $\mathbb{R}_S$.

15. Έστω $\mathscr{T}_{cf}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο $\mathbb{R}$. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις από τον $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cf})$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

16. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to S^1$ με $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Αποδείξτε ότι η f είναι $1-1$, επί του S^1 και συνεχής, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

17. Έστω $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ η επεκτατεμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία $\mathscr{T}_e$ που έχει ως υποβάση την κλάση όλων των συνόλων της μορφής $[-\infty, b) = \{-\infty\} \cup (-\infty, b)$ ή $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, αν $x \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ και $f(-\infty) = -1$, είναι ομοιομορφισμός.

(β) Αποδείξτε ότι ο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρικοποιήσιμος και βρείτε μία μετρική που επάγει την τοπολογία του.

18. Έστω $(X_1, \rho_1), \dots, (X_n, \rho_n)$ μετρικοί χώροι. Αποδείξτε (με βάση τον ορισμό της τοπολογίας γινόμενο) ότι η τοπολογία γινόμενο του $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ συμπίπτει με την τοπολογία που επάγεται στο X από τη μετρική d_∞ με $d_\infty\Big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\Big) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \dots, \rho_n(x_n, y_n)\}$.

19. (α) Έστω Y ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathscr{T} = \{U \subseteq Y : Y \setminus U \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}$ η συναριθμήσιμη τοπολογία στο Y. Έστω $x \in Y$. Αποδείξτε ότι $x \in \overline{Y \setminus \{x\}}$, αλλά δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in N}$ στο $Y \setminus \{x\}$ με $x_n \to x$.

(β) Έστω X ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος (δηλαδή κάθε σημείο του X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών). Αποδείξτε ότι, για κάθε $A \subseteq X$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x \in \overline{A} \iff \text{υπάρχει ακολουθία } (x_n) \text{ στο } A \text{ με } x_n \to x.$$

Έπεται ότι αν ο X είναι πρώτος αριθμήσιμος, τότε η τοπολογία του προσδιορίζεται από τις συγκλίνουσες ακολουθίες.