Τοπολογία

1η Σειρά Ασκήσεων

Βασικές έννοιες της Τοπολογίας

1. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathscr{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία στο X. Αποδείξτε ότι:
(α) Αν d τυχούσα μετρική στο X, τότε $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_d$.
(β) Αν X πεπερασμένο, τότε $\mathscr{T} = \mathcal{P}(X) =$ η διακριτή τοπολογία.
(γ) Αν X άπειρο, τότε ο $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

2. Αποδείξτε ότι καθένα από τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι μια τοπολογία στο $\mathbb{N}$.
Το $\mathscr{T}_1$ αποτελείται από τα $\emptyset, \mathbb{N}$ και κάθε αρχικό διάστημα $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 1$ (τοπολογία αρχικών διαστημάτων).
(β) Το $\mathscr{T}_2$ αποτελείται από τα $\emptyset, \mathbb{N}$ και κάθε τελικό διάστημα $J_n = \{n, n+1, \ldots\}$, $n \geq 1$ (τοπολογία τελικών διαστημάτων).

3. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathscr{T}$ μια τοπολογία στο X ώστε το μόνο άπειρο ανοιχτό υποσύνολο του X είναι ο ίδιος ο X. Είναι τότε η $\mathscr{T}$ η τετριμμένη τοπολογία στο X;

4. Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathscr{T}$ τοπολογία στο X ώστε κάθε άπειρο υποσύνολο του X είναι μέλος της $\mathscr{T}$. Αποδείξτε ότι η $\mathscr{T}$ είναι η διακριτή τοπολογία στο X.

5. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα , $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι:
(α) $\overline{B(x,\varepsilon)} = \widehat{B}(x,\varepsilon)$.
(β) $\mathrm{int}\left(\widehat{B}(x,\varepsilon)\right) = B(x,\varepsilon)$.
(γ) $\mathrm{bd}\,(B(x,\varepsilon)) = S(x,\varepsilon)$.

6. Αποδείξτε με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι τα συμπεράσματα της προηγούμενης άσκησης δεν ισχύουν κατ' ανάγκη σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο X.

7. Αποδείξτε ότι, αν ένας τοπολογικός χώρος είναι μετρικοποιήσιμος, τότε υπάρχουν άπειρες διαφορετικές μετρικές που ορίζουν την τοπολογία του.

8. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T})$ λέγεται χώρος T_1 αν, για κάθε $x \neq y \in X$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_x του x με $y \notin U_x$ και υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_y του y με $x \notin U_y$.
(α) Αποδείξτε ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι T_1 αν και μόνο αν τα πεπερασμένα υποσύνολα του X είναι κλειστά.
(β) Έστω $(X, \mathscr{T})$ χώρος T_1, $A \subseteq X$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι κάθε ανοιχτή περιοχή U του x_0 περιέχει άπειρα σημεία του A. Ειδικότερα, σε κάθε T_1 χώρο, τα πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.
(γ) Έστω $(X, \mathscr{T})$ χώρος T_1 και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης του A είναι κλειστό.

(δ) Θεωρούμε το σύνολο $X = [-1,1]$ με την τοπολογία $\mathscr{T}$, όπου

$$\mathscr{T} = \Big\{\emptyset, [-1,1]\Big\} \cup \Big\{[-1,b) \;\Big|\; 0 < b \leq 1\Big\} \cup \Big\{(a,1] \;\Big|\; -1 \leq a < 0\Big\} \cup \Big\{(a,b) \;\Big|\; -1 \leq a < 0 < b \leq 1\Big\},$$

η οποία ονομάζεται τοπολογία των επικαλυπτόμενων διαστημάτων στο $[-1,1]$.

(i) Αποδείξτε ότι η κλάση $\mathscr{T}$ είναι πράγματι τοπολογία και ότι ο χώρος $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι T_1 χώρος.

(ii) Αν $A = \{0\}$, βρείτε το A' και δείξτε ότι δεν είναι κλειστό.

9. Έστω X ένας 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια άλλη βάση για την τοπολογία του X. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε ανοιχτό σύνολο G του X υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο M_G του I, ώστε $G = \bigcup_{i\in M_G} U_i$.

(β) Υπάρχει μια αριθμήσιμη υποοικογένεια $(U_i)_{i\in M}$ της $(U_i)_{i\in I}$ που είναι βάση για την τοπολογία του X.