ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015 - ΟΜΑΔΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Α

Θέμα 1: (3 βαθμοί) Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι για πρώτη φορά να εμφανιστεί η ένδειξη «5», και έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι να συμβεί αυτό. Να βρείτε:
(α) Τον αναμενόμενο αριθμό δοκιμών, τη συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X και τη διασπορά της.
(β) Την πιθανότητα να μην εμφανιστεί η ένδειξη «3», αν είναι γνωστό ότι το «5» εμφανίστηκε (για πρώτη φορά) στην κ δοκιμή (για $\kappa = 1, 2, \ldots$).
(γ) Την πιθανότητα να εμφανιστεί το «3» (τουλάχιστον μία φορά).
(δ) Την πιθανότητα να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις «3» και «6» από τουλάχιστον μία φορά η καθεμιά (πριν έρθει το «5»).

Θέμα 2: (2.5 βαθμοί) Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = 2cx^{-3}e^{1/x^2} I\left(\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1\right),$$

όπου $I(a < x < b)$ η δείκτρια τ.μ. του διαστήματος (a, b). Να βρεθούν: **(α)** η σταθερά c, **(β)** η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = 1/X^2$, **(γ)** η μέση τιμή και η διασπορά της Y.

Θέμα 3: (3.5 βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινή κατανομή την τυπική (ή τυποποιημένη) κανονική με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια της τυπικής κανονικής είναι $M_X(t) = \exp\{\frac{1}{2}t^2\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρεθούν οι ροπές $E(X^i)$ για $i = 1, 2, 3, 4$.

(γ) Αν $S_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 1}$ με $Y_n = (2n)^{-1/2}(S_n - n)$, συγκλίνει κατα κατανομή στην τυπική κανονική.

(δ) Δείξτε ότι η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 1}$ δεν μπορεί να συγκλίνει στοχαστικά (ή κατα πιθανότητα) σε κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Θέμα 4: (3 βαθμοί) Έστω (U, V) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{U,V}(x, y)$, και περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_U(x)$ και $f_V(x)$.

(α) Να βρεθεί σταθερά c τέτοια ώστε η συνάρτηση $f(x, y) = c\,(f_{U,V}(x, y) + f_{U,V}(y, x))$, να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάποιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής.

(β) Αν (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y) = f(x, y)$ (όπως στο ερώτημα (α)), τότε να δειχθεί ότι $f_X(x) = f_Y(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τί συμπεραίνετε για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y ?

(γ) Δείξτε ότι οι διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές (X, Y) και (Y, X) είναι ισόνομες. (Υπόδειξη: δείξτε ότι $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y,X}(x, y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$)

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < Y)$.

Μπορείτε να απαντήσετε σε όλα τα θέματα. Το άθροισμα των βαθμών όλων των θεμάτων είναι 12. Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες. Καλή επιτυχία.