Μάθημα 4º - 13/10/2014

Ασκήσεις Φυλλαδίου

(1) $P_n = P($ ∃ τουλ. 2 άτομα μεταξύ n που έχουν γενέθλια την ίδια μέρα$) \geq 0,5$.

n άτομα $\longrightarrow$ n μέρες γενεθλίων

Υποθέσεις:
- Ημ. Έτους: $\{1,2,\ldots,365\}$
- Ισοπίθανα έχουμε ότι κάθε μέρα από $\{1,2,\ldots,365\}$ θα μπορούσε να είναι μια μέρα γενεθλίων.

$\Omega = \{1,2,\ldots,365\}^n$

$|\Omega| = 365^n$ (διατάξεις με επανάληψη)

- A^c: "τα n άτομα έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες".

στοιχεία $1,2,\ldots,365$

\# στοιχείων $\longrightarrow$ 365 $\xrightarrow{\text{επαναλ.}}$ ΟΧΙ

\# επιλογών $\longrightarrow$ n $\xrightarrow{\text{σειρά}}$ ΝΑΙ

διατάξεις (χωρίς επαναλ.) των 365 ανά n $= (365)_n$

$|A^c| = (365)_n$, $\quad P(A^c) = \dfrac{|A^c|}{|\Omega|} = \dfrac{(365)_n}{365^n}$

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \dfrac{(365)_n}{365^n}$, $\quad n = 1,2,\ldots,365$

ελάχιστο $n = 23$, $\quad P_{23} \cong 0,507$ ■

(8) i) Αν $(A_n)_{n\geq 1}$, $P(A_n)=0$, $\forall n\geq 1 \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=0$

Λύση

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \overset{\sigma\text{-υποπρ.}}{\leq} \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 0$$

ii) Αν $P(A_n)=1$, $\forall n=1,2,\ldots \Longrightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)=1$

Λύση

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) \quad (1)$$

$P(A_n)=1$, $\forall n\geq 1 \Rightarrow P(A_n)^c = 1 - P(A_n) = 0$, $\forall n\geq 1$ $\quad (2)$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right) \overset{(i)}{=} 0 \quad (3)$$

$(1), (2), (3) \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

(3) $\Omega = \{1,2,\ldots,6\}^3$

$|\Omega| = 6^3$

A_1: "άθροισμα ενδείξεων των 3 ζαριών είναι 9"

$\Longrightarrow$

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{l} (1,2,6),\ (1,3,5),\ (1,4,4),\ (1,5,3),\ (1,6,2) \\ (2,1,6),\ (2,2,5),\ (2,3,4),\ (2,4,3),\ (2,5,2),\ (2,6,1) \\ (3,1,5),\ (3,2,4),\ (3,3,3),\ (3,4,2),\ (3,5,1) \\ (4,1,4),\ (4,2,3),\ (4,3,2),\ (4,4,1) \\ (5,1,3),\ (5,2,2),\ (5,3,1) \\ (6,1,2),\ (6,2,1) \end{array} \right\}$$

$|A_1| = 25$

- 1) $[1,2,6]^{6}$, $[1,3,5]^{6}$, $[1,4,4]^{3}$
- 2) $[2,2,5]^{3}$, $[2,3,4]^{6}$
- 3) $[3,3,3]$ — 1

αθροίζοντας 25

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{25}{216}$$

β) A_2 = "άθροισμα ενδείξεων = 10"

1) $[1,3,6]^{6}$, $[1,4,5]^{6}$

2) $[2,2,6]^{3}$, $[2,3,5]^{6}$, $[2,4,4]^{3}$

3) $[3,3,4]$ — 3

αθροίζοντας 27

$|A_2| = 27$, $P(A_2) = \dfrac{|A_2|}{|\Omega|} = \dfrac{27}{216}$

γ) A_3 "άθροισμα 3 ζαριών = 11"

$P(A_2)$, $P(A_3)$

$\downarrow$ αθρ. 10 $\qquad \downarrow$ αθρ. 11

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3)$$

$f: A_2 \longrightarrow A_3$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3)$$

αν $(x_1, x_2, x_3) \in A_2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$\Rightarrow (7-x_1) + (7-x_2) + (7-x_3) = 21 - (x_1 + x_2 + x_3) = 11$

$\Rightarrow (7-x_1, 7-x_2, 7-x_3) \in A_3$ (f καλά ορισμένη)

επιπλέον είναι ("1-1" + "επί") $\Rightarrow |A_2| = |A_3| \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_2) = P(A_3)$

■

6 α) Οφείλει να απαντήσει 8/10 ερωτήσεις

$$\binom{10}{8}$$

επιλέγει 8 από τις 10 χωρίς δυνατότητα επανάληψης και χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά.

β) χωρίζω $\underbrace{1-3}_{\downarrow\ 1}$, $\underbrace{4-10}_{\downarrow\ \binom{7}{5}}$

γ) A : "απαντώ τουλάχιστον σε 4 από τις 5"

$A = A_1 \cup A_2$

A_1 : "απαντώ ακριβώς σε 4 από τις 5".

A_2 : "απαντώ και στις 5 από τις 5"

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$

$|A_1| = \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4}$

$|A_2| = \overbrace{\binom{5}{5}}^{=1} \cdot \binom{5}{3}$

9 Έστω $n \geq 1$ σταθερός

Επιλέγω στην τύχη από $\{1, 2, \dots, n\}$ (ισοπίθανα)

Θέτουμε A_ρ: "το ρ διατηρεί τον επιλεγμένο αριθμό", $\forall \rho : 1 \leq \rho \leq n$

$P(A_\rho) = ?$

$\omega \in A_\rho \Leftrightarrow \rho | \omega \Leftrightarrow \omega = \kappa \cdot \rho$, για κάποιο κ, ώστε $1 \leq \kappa\rho \leq n$

άρα $\kappa = 1, 2, \dots \left[\frac{n}{\rho}\right]$ → ακέραιο μέρος.

$$A_\rho = \left\{\rho, 2\rho, \dots, \left[\frac{n}{\rho}\right]\cdot\rho\right\} \overset{\text{άρα}}{=} \left\{\kappa\rho \;,\; 1 \leq \kappa \leq \left[\frac{n}{\rho}\right]\right\}$$

$$P(A_\rho) = \frac{|A_\rho|}{|\Omega|} = \frac{\left[\frac{n}{\rho}\right]}{n} \;,\; 1 \leq \rho \leq n$$

Ιδιαίτερα, όταν $\rho | n \longrightarrow P(A_\rho) = \frac{1}{\rho}$

10

Επιλέγουμε τυχαία 2.
Ποια η πιθανότητα να είναι γειτονικά?

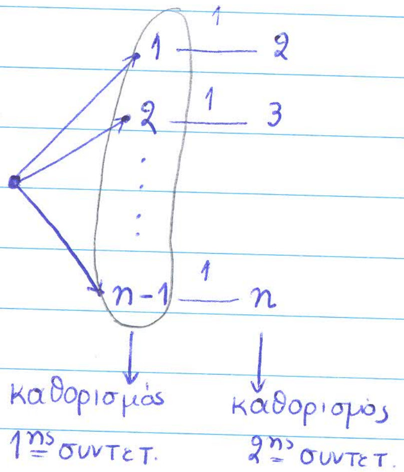
n διακεκριμένα στοιχεία: $1, 2, \dots, n$

$\#$στοιχείων $= n$ $\quad$ $\xrightarrow{\text{επαναλ.}}$ ΟΧΙ

$\#$επιλογών $= 2$ $\quad$ $\xrightarrow{\text{σειρά}}$ ΟΧΙ

$\longrightarrow$ συνδυασμοί $\binom{n}{2}$

$$\Omega = \{ (i,j) \ , \ 1 \le i < j \le n \}$$

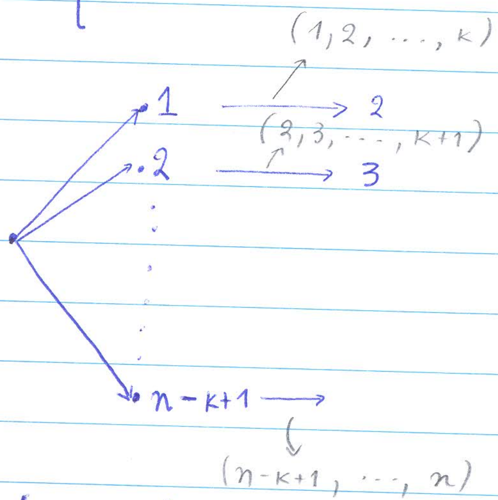


$$|A| = n-1$$

$$P(A) = \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}$$

$$(n-1) \times 1 = n-1$$

$$\Omega = \{ (c_1, c_2, \dots, c_k) : 1 \le c_1 < c_2 < \dots < c_k \le n \}$$



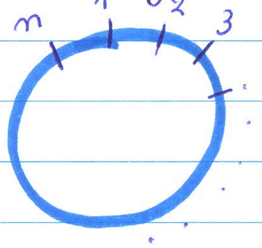
$$\underbrace{(n-k+1)}_{1\text{-όρος}} \times \underbrace{1 \times \dots \times 1}_{k-1 \text{ όροι}}$$

$$P(A) = \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k+1}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} =$$

$$= \frac{(n-k+1)!\, k!}{n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdots k}{n(n-1)\cdots(n-k+2)},$$

$$2 \le k \le n.$$

• Τι θα γινόταν αν τα σημεία είναι τοποθετημένα κυκλικά;



Επιλέγω 2 από αυτά.
Επιλέγω το $1^{\text{ο}}$ τυχαία.
Όποιο και να 'ναι, έχει 2 γείτονες.
Επιλέγω το $2^{\text{ο}}$. (κάθε φορά 2 γείτονες).

$$P(A) = \frac{\#\text{γειτόνων}}{\#\text{επιλογών}} = \frac{2}{n-1} \quad \blacksquare$$

"Ανισότητα Bonferonni"

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{n} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1)$$

Λύση

(Επαγωγικά)

Για $n=2$, $P(E_1 E_2) \overset{\text{πρέπει}}{\geq} P(E_1) + P(E_2) - 1$.

Πράγματι,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)$$

$$\Longrightarrow P(E_1 E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $1, 2, \dots, n-1$

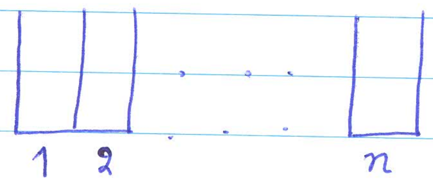
$$P(\underbrace{E_1 E_2 \dots E_{n-1}}_{1^{\text{ο}}} \underbrace{E_n}_{2^{\text{ο}}}) \geq P(E_1 E_2 \dots E_{n-1}) + P(E_n) - 1 \overset{n=2}{\geq}$$

$$\overset{\text{ισχύει για } n-1}{\geq} \sum_{i=1}^{n-1} P(E_i) - (n-2) + P(E_n) - 1 = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - (n-1) \quad \blacksquare$$

4 Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά

α)

i) χωρητικότητα κελιού = ∞



κ διακεκριμένα σφαιρίδια σε n κελιά

τοποθέτηση σφαιριδίων σε κελιά $\{1, \ldots, n\}$

$$\begin{pmatrix} \swarrow & \swarrow & \ldots & \swarrow \\ 1 & 2 & \ldots & \kappa \end{pmatrix}$$

διακεκριμένα σφαιρίδια

$\Downarrow$

μας ενδιαφέρει η σειρά

άπειρη χωρητικότητα

$\Downarrow$

έχουμε δυνατότητα επανάληψης.

στοιχεία κελιά $1, 2, \ldots, n$

\# επιλογών $= \kappa$ $\Big\} \longrightarrow n^{\kappa}$

ii) χωρητικότητα κελιού = 1 $\longrightarrow$ ΟΧΙ επανάληψη

διατάξεις (χωρίς επαναλ.) , $(n)_{\kappa}$

β) i) όμοια σφαιρίδια $\longrightarrow$ ΟΧΙ σειρά

χωρητ. = ∞ , επαναλ. συνδ. $\left[\begin{matrix} n \\ \kappa \end{matrix}\right]$

ii) χωρητ. = 1 συνδυασμ. $\binom{n}{\kappa}$

$i=1$

(ΟΧΙ επαναλ.)

Μάθημα 5ο - 15/10/2014

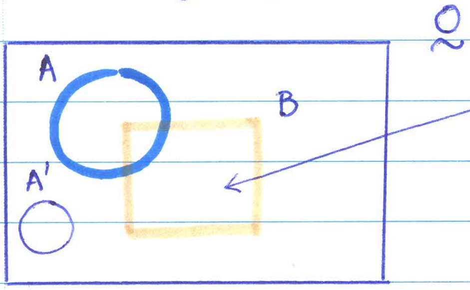
Δεσμευμένη Πιθανότητα

① Κίνητρο και Διαισθητικές ερμηνείες

Ας υποθέσουμε ότι:

i) έχουμε μοντελοποιήσει ένα π.τ. με ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. που εκφράζει την προσπάθεια μας να αποδώσουμε βαθμούς βεβαιότητας για ενδεχόμενα.

ii) μια πληροφορία καταφθάνει, η οποία εκφράζεται μέσα από την πραγματοποίηση κάποιου ενδεχομένου B. (το B έγινε γνωστό)



Ξέρω ότι B πραγματοποιήθηκε (το αποτέλεσμα του π.τ. βρίσκεται στο B).
άρα, το ενδιαφέρον μας πρέπει να περιορίζεται στο B.

Τότε, η πιθανότητα πραγματοποίησης κάποιου ενδεχομένου πρέπει να μεταβληθεί από $P(A)$ σε $P(A \setminus B)$ (δεσμευμένη πιθανότητα του A, δοθέντος του B).

Διαισθητικά: $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)=1} \longrightarrow P(A|B) = \dfrac{m(AB)}{m(B)}$

Παρατήρηση: Είτε η πραγματοποίηση του B, εκφράζει κάποιο πραγματικό γεγονος, είτε εκφράζει μια σκέψη (δυνητική πραγματοποίηση) η οποία θα με βοηθήσει να πάρω κάποια απόφαση.

Παραδείγματα:

i) P("ντόρτια" | "άθροισμα των 2 ενδείξεων είναι 8")

ii) P("μια μηχανή να λειτουργήσει >10 χρόνια" | "λειτούργησε ήδη 5 χρόνια")

iii) P("έγκυος" | "1º τεστ εγκυμοσύνης είναι θετικό")

iv) P("να περάσω Πιθ. I" | "παρακολουθώ (ΚΑΙ ΔΙΑΒΑΖΩ!) συστηματικά")

v) P("ο κλέφτης να βρεθεί στο A" | "βρίσκεται στο B")

2 Ορισμός και Σχόλια

Ορισμός: Έστω B ενδεχόμενο, με $P(B)>0$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Παρατηρήσεις:

1) Πρέπει $P(B)>0$

2) $(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{B:\, P(B)>0} (\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$ Είναι ένας καινούριος χώρος πιθανότητας.

Ικανοποιεί τα 3 αξιώματα μιας συν. πιθανότητας:

Αξ. 1) $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$

Αξ. 2) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(B\Omega)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Αξ. 3) (σ-προσθετικότητα)

Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ασυμβ. ενδεχομένων, τότε:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \,\Big|\, B\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B).$$

Πράγματι,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \,\Big|\, B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n B\right)}{P(B)} \quad \underline{A_n B \subset A_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B)$$

3) Όλες οι ιδιότητες της πιθανότητας ισχύουν και στις δεσμευμένες πιθανότητες.

4) $P(A|B) \overset{\text{γενικά}}{\neq} P(B|A) \quad \mapsto \quad \dfrac{P(A|B)}{P(B|A)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

(δεν έχουν συμμετρικό ρόλο τα A και B στη δεσμ. πιθανότητα).

3 Παραδείγματα

i) $P($"ντόρτια" $|$ "άθροισμα 2 ενδεχ. $=8$"$)$

"ντόρτια" $= A$, "άθροισμα 2 ενδεχ. $=8$" $= B$

$A=\{(4,4)\}$

$\Omega=\{(i,j):1\leq i,j\leq 6\} \rightarrow$ ισοπίθανα δ.σ.

$\Downarrow$

κλασική πιθανότητα.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{|AB|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}}=\frac{|AB|}{|B|}=\frac{1}{5}$$

$A=\{(4,4)\}$, $B=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

(ζάρι 1, ζάρι 2)

↓	↓
4	4
(2	6)
(6	2)

$$P(B|A)=\frac{|AB|}{|A|}=1$$

$$P(A|B)=\frac{|AB|}{|B|}$$

ii) Στρίβουμε ένα νόμισμα 2 φορές.
Αν υποθέσουμε ότι και τα 4 δ.σ. του π.τ. είναι ισοπίθανα, ποια η πιθανότητα να φέρουμε κορώνα και στις 2 ρίψεις με δεδομένο ότι: α) στο 1º στρίψιμο έχουμε κορώνα.
β) τουλάχιστον ένα στρίψιμο ήταν κορώνα.

$\Omega = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma;\Gamma)\} \rightarrow$ ισοπίθανα.

$A = \{(K,K)\}$

α) $B = \{(K,K),(K,\Gamma)\}$, $AB = \{(K,K)\}$

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{2}$$

β) $B = \{(K,K),(K,\Gamma),(\Gamma,K), \quad \}$, $AB = \{(K,K)\}$

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

4 Υπολογιστικές Τεχνικές με δεσμευμένη πιθανότητα

Πολλαπλασιαστικός νόμος των Πιθανοτήτων

Αν $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, τότε

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

$(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} \subseteq A_1 , A_1 A_2 , \ldots , A_1 A_2 \cdots A_{n-2}$

$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0 \Rightarrow P(A_1), P(A_1 A_2) \cdots P(A_1 \cdots A_{n-2}) > 0$

$$P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdots P A_n (A_1 \ldots A_{n-1}) =$$

$$= \cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 A_2 A_3)}}{\cancel{P(A_1 A_2)}} \cdots \frac{\boxed{P(A_1 A_2 \cdots A_n)}}{\cancel{P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})}}$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π)

- Αν $\{B_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια ενδεχομένων, τότε λέγεται αριθμήσιμη διαμέριση του Ω, όταν είναι διαμέριση,

$$\Big(\underbrace{\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega}_{\text{Κάλυψη του } \Omega} , \quad \underbrace{B_i B_j = \emptyset}_{\text{ασυμβ. ενδεχ.}} , \; i \neq j \Big)$$

και I είναι αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή αριθμησίμως άπειρο)

Έστω $(B_i)_{i \in I}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση του Ω με $P(B_i) > 0$, $\forall i \in I$.

Τότε αν A ενδεχόμενο : $\boxed{P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) \cdot P(A | B_i)}$

• Συνήθως $I=\{1,2,\dots,n\}$

και $\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)}$

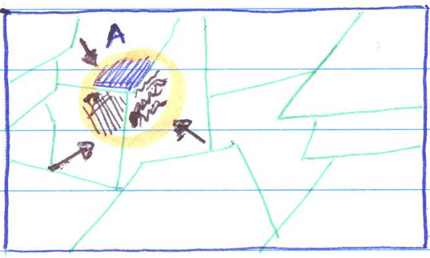
ή $I=\mathbb{N}^*$

$$\boxed{P(A)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)}$$

Θεώρημα Bayes

Αν A, B ενδεχόμενα με $P(A), P(B)>0$, τότε

$$\boxed{P(A\mid B)=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}}$$



Απόδ. (Θ.Ο.Π.)

$P(A)=P(A\Omega)=P(A(\bigcup_{i\in I} B_i))=$

$=P(\bigcup_{i\in I} AB_i)$

(B_i) ξένα ανά δύο

$\Downarrow$

(AB_i) ξένα ανά δύο.

$$=\underbrace{\sum_{i\in I} P(AB_i)=\sum_{i\in I} P(B_i)P(A\mid B_i)}_{\text{Πολ/κος Νόμος}}$$

Αποδειξη (Bayes)

- $P(A|B) \overset{\text{ορισμός}}{=} \dfrac{P(AB)}{P(B)} \overset{\text{πολ/κός Νόμος}}{=} \dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$

Παράδειγμα - Εφαρμογή

Μια ασφ. εταιρεία μελετά ενδεχ. αλλαγή στα ασφάλιστρα: Αποτιμά τον κίνδυνο ατυχημάτων ως συνάρτηση της παλαιότητας του διπλώματος οδήγησης.

- 20% των ασφαλισμένων έχουν το δίπλωμα λιγότερο από 5 χρόνια (≤ 5 χρόνια) ("νέος", "παλιός")
- Η μελέτη έδειξε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος ατύχημα σε 1 χρόνο όταν είναι "νέος" είναι 0,4 και όταν είναι "παλιός" 0,125.

Ζητάμε: i) P("σε 1 χρόνο να συμβεί κάποιο ατύχημα σε έναν ασφαλισμένο, ~~πού~~ και να είναι νέος")

ii) P("ατυχήματος σε κάποιον ασφαλισμένο σε 1 χρόνο")

iii) P("εφόσον συνέβη ατύχημα να είναι νέος")

Δεδομένα.

P("νέος") = 0,2

P("παλιός") = 1 − P("νέος") = 0,8

P("ατύχημα" | "νέος") = 0,4

P("ατύχημα" | "παλιός") = 0,125

"νέος": A → "παλιός": A^c

"ατύχημα": B → "όχι ατυχ.": B^c

i) $P(\text{"νέος"}, \text{"ατύχημα"}) = P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$

ii) $P(\text{"ατύχημα"}) \to P(B) \overset{\text{θολ}}{=} P(A)\cdot P(B|A) + P(A^c)\cdot P(B|A^c)$

$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}125 = 0{,}18$

iii) $P(A|B) = \dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}4}{0{,}18} = \dfrac{0{,}08}{0{,}18} = \dfrac{4}{9}$

Άσκηση 5 Φυλ. ⟶ Άσκ. 9 (Χελιώτης).

1000 σφαιρίδια
25 μαύρα
30 άσπρα
945 κόκκινα

Επιλέγουμε τυχαία 15 από την κάλπη

α) Ποια η πιθ. να έχουμε ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια.

$|\Omega| = ?$

στοιχεία $\underbrace{1, 2, \ldots, 945}_{\text{κόκκινα}}, \underbrace{946, \ldots, 970}_{\text{25 μαύρα}}, \underbrace{971, \ldots, 1000}_{\text{30 άσπρα}}$

# στοιχείων = 1000	$n = 1000$	επαναλ. → ΟΧΙ	συνδυασμοί $\binom{1000}{15}$
# επιλογών = 15	$k = 15$	σειρά → ΟΧΙ (όχι κατ' ανάγκη)	

A: "ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια"
"3 κόκκινα σφαιρίδια και 12 όχι κόκκινα"

$|A|$ πολ/κή αρχή

χωρίζω 2 διαδοχικές ~~διακριτές~~ φάσεις.

$\omega = (\alpha_1 \,,\, \alpha_2)$

3-άδες κόκκινων. $\{k_1, k_2, k_3\}$

12-άδες όχι κόκκινων. $\{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_{12}\}$

$$|A| = \binom{945}{3}\binom{55}{12} \Rightarrow$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}} .$$

Μάθημα 6ο - 17/10/2014

Άσκηση 5, φυλλάδιο

1, 2, ... 945, 946 ... 970, 971 ... 1000

β) "ακριβώς 2 μαύρα και 3 άσπρα" = B

$|\Omega| = \binom{1000}{15}$

B: "2 μαύρα 3 άσπρα 10 κόκκινα"

"2 μαύρα από 25, 3 άσπρα από 30, 10 κόκκινα από 945"

πολ/κή αρχή: χωρίζουμε την απαρίθμηση του B σε 3 διαδοχικές φάσεις.

$\omega = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$\{\mu_1 \mu_2\}$ $\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\}$ $\{k_1, \ldots, k_{10}\}$

$|B| = \binom{25}{2}\binom{30}{3}\binom{945}{10}$

"άρνηση το πολύ ένα"

γ) Γ: "ακριβώς 4 κόκκινα και τουλ. 2 μαύρα"

$\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \ldots \cup \Gamma_{11}$

Γ_i: "ακριβώς 4 κόκκινα και i-μαύρα"

ένας τρόπος, αλλά πιο επίπονος. Διαφορετικά,

$\Gamma = \Delta E^c$

Δ = "ακριβώς 4 κόκκινα"

E = "το πολύ 1 μαύρο" $\Longrightarrow$ E^c = "τουλ. 2 μαύρα"

$P(\Gamma) = P(\Delta E^c) = P(\Delta \setminus E) = P(\Delta) - P(\Delta E)$ (*)

ΔE : "ακριβώς 4 κοκκινα κ' το πολύ 1 μαύρο"

Ορίζουμε,

E_i : "ακριβώς i-μαύρα" $(i = 0, 1 \ldots)$

Τότε $\Delta E = \Delta(E_0 \cup E_1) = \Delta E_0 \cup \Delta E_1$

$P(\Gamma) = P(\Delta) - P(\Delta E)$ απο (*).

ξένα

Άρα $P(\Gamma) = P(\Delta) - P(\Delta E) = P(\Delta) - P(\Delta E_0 \cup \Delta E_1) =$

$= P(\Delta) - P(\Delta E_0) - P(\Delta E_1)$ (1)

$P(\Delta) = P($"4 κόκκινα κ' 11 όχι κόκκινα"$)$

$$P(\Delta) = \frac{\binom{945}{4}\binom{55}{11}}{|\Omega|} \quad (2)$$

$P(\Delta E_0) = P($"4 κόκκινα (και 0-μαύρα) και 11 άσπρα"$)$

$$P(\Delta E_0) = \frac{\binom{945}{4}\binom{30}{11}}{|\Omega|} \quad (3)$$

$P(\Delta E_1) = P($"4 κόκκινα και 1-μαύρο και 10 άσπρα"$)$

(Συνέχεια πίσω)

$$P(\Delta E_1) = P(\text{"4 κόκκινα κ' 1 μαύρο κ' 10 άσπρα"})$$

$$= \frac{\binom{945}{4}\binom{25}{1}\binom{30}{10}}{|\Omega|} \qquad (4)$$

Από (1) - (4),

$$P(\Gamma) = \frac{\binom{945}{4}\left[\binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}\right]}{\binom{1000}{15}}$$

(*) (Επιπλέον ερώτημα)

δ) "$\underbrace{\text{μόνο κόκκινα}}_{A}$ αν ξέρουμε ότι $\underbrace{\text{δεν επιλέχθηκαν μαύρα}}_{B}$".

$P(A|B)$

A: "μόνο κόκκινα" = "15 κόκκινα από 945"

B: "0-μαύρα" = "15 κόκκινα ή άσπρα"

AB: "μόνο κόκκινα κ' 0-μαύρα" = "μόνο κόκκινα" = A

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \overset{\text{κλασσική πιθαν.}}{=} \frac{|A|}{|B|} = \frac{\binom{945}{15}}{\binom{975}{15}}$$

■

α*) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια
Ας υποθέσουμε ότι τα επιλέγω ένα-ένα, άρα εδώ έχει σημασία η σειρά που τα διαλέγω.

$$P(\text{"3 κόκκινα και 12 όχι κόκκινα"})$$

$$= \sum_{\substack{\{L_1, L_2, L_3\} \\ \subset \{1, 2, \ldots, 15\}}} P\left(\begin{array}{l}\text{"3 κόκκινα στις } L_1, L_2, L_3 \text{ επιλογές} \\ \text{και 12 όχι κόκκινα στις υπόλοιπες"}\end{array}\right)$$

(παράδειγμα με 4 επιλογές σφαιριδίων που τα 3 είναι κόκκινα ανάμεσα σε 10 κόκκινα και 10 όχι κόκκινα)

1η	2η	3η	4η
K	K	K	$\bar{K}$
K	K	$\bar{K}$	K
K	$\bar{K}$	K	K
$\bar{K}$	K	K	K

$$P(\text{"}KKK\bar{K}\text{"}) = P(\text{"}K\text{"})\, P(\text{"}K\text{"}|\text{"}K\text{"})\, P(\text{"}K\text{"}|\text{"}KK\text{"})\, P(\text{"}\bar{K}\text{"}|\text{"}KKK\text{"})$$

$$= \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17}.$$

$$P(\text{"}K\bar{K}KK\text{"}) = P(\text{"}K\text{"})\cdot P(\text{"}\bar{K}\text{"}|\text{"}K\text{"})\cdot P(\text{"}K\text{"}|\text{"}K\bar{K}\text{"})\cdot P(\text{"}K\text{"}|K\bar{K}K)$$

$$= \frac{10}{20}\times\frac{10}{19}\times\frac{9}{18}\times\frac{8}{17} = P(\text{"}KKK\bar{K}\text{"})$$

Παρατηρούμε ότι :

P("3 κόκκινα στις L_1, L_2, L_3 επιλογές και 12 όχι κόκκινα στις υπόλοιπες") =

= P("3 κόκκινα στις πρώτες 3 θέσεις και 12 όχι κόκκινα στις υπόλοιπες"). =

$$= \binom{15}{3}\cdot P(\text{"}\underbrace{KKK}_{3\ \text{πρώτες}}\underbrace{\bar{K}\bar{K}\cdots\bar{K}}_{12\ \text{τελευταίες}}\text{"})$$

$$= \binom{15}{3}\cdot P(\text{"}K\text{"})\cdot P(\text{"}K\text{"}|\text{"}K\text{"})\cdot P(\text{"}K\text{"}|\text{"}KK\text{"})\cdot$$

$$\cdot P(\text{"}\bar{K}\text{"}|\text{"}KKK\text{"})\cdots P(\text{"}\bar{K}\text{"}|\text{"}\underbrace{KKK\bar{K}\cdots\bar{K}}_{14}\text{"})$$

$$= \binom{15}{3}\cdot\frac{945}{1000}\cdot\frac{944}{999}\cdot\frac{943}{998}\times\frac{55}{997}\times\frac{54}{996}\times\cdots\times\frac{44}{986}$$

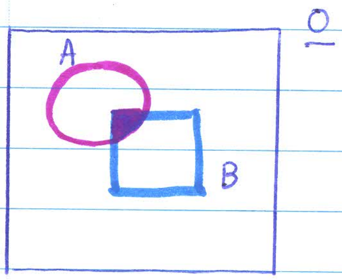
=

$$= \binom{15}{3} \frac{(945)_3 \cdot (55)_{12}}{(1000)_{15}} = \frac{15!}{3!\,12!} \frac{(945)_3 \cdot (55)_{12}}{(1000)_{15}} =$$

$$= \frac{\frac{(945)_3}{3!} \cdot \frac{(55)_{12}}{12!}}{\frac{(1000)_{15}}{15!}} = \frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}} \blacksquare$$

Στοχαστική Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

$$\underset{\text{αρχικός χώρος πιθανότητας}}{\underset{|||}{(\Omega, \mathcal{A}, P)}} \xrightarrow[B:\, P(B)>0]{\text{πληροφορία } B} \underset{\text{καινούριος χώρος πιθανότητας}}{\underset{||}{(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot \mid B))}}$$



$$A \longmapsto P(A \mid B)$$

$$\binom{945}{4} \qquad \binom{25}{2}\binom{53}{7}$$

Παρατηρήσεις

1) Συνολικά, οποιαδήποτε ύπαρξη πληροφορίας είναι σημαντική, διότι περιορίζει το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων (ψάχνουμε σε μικρότερη περιοχή).

2) Σε κάθε ένα από τα ενδεχόμενα A, μία πληροφορία B, επιδρά διαφορετικά στην πιθανότητα πραγματοποίησης (του A).

(ενδεχόμενο , πληροφορία) $\Delta P = P(A|B) - P(A)$

(A , B) → 0 (Το B έχει μηδενική επίδραση στο A

(A , B) → $\neq 0$ → + (θετική) επίδραση

(A , B) → $\neq 0$ → − (αρνητική επίδραση)

Λέμε, λοιπόν, ότι: το A δεν εξαρτάται από το B, όταν $\Delta P = 0$.

3) <u>Ειδική περίπτωση που $\Delta P = 0$.</u>

Τότε $P(A|B) = P(A) \Longleftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$

αν $P(A)>0$ $\Longleftrightarrow \dfrac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Longleftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

Δηλ. το B δεν εξαρτάται από το A.

<u>Άρα</u> μπορούμε να λέμε ότι αν $P(A|B) = P(A)$ ή

$P(B|A) = P(B)$,

Τότε τα A και B είναι ανεξάρτητα.

Όμως εκεί όπου οι πιθανότητες είναι μηδενικές, δεν μπορούμε να ορίσουμε προς το παρόν την ανεξαρτησία.

4) Με έμπνευση από τις δεσμευμένες πιθανότητες, θέλουμε να ορίσουμε την ανεξαρτησία παντού.

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

(Στοχαστική) Ανεξαρτησία 2 ενδεχομένων

Ορισμός: Δύο ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα αν $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.

Παράδειγμα:

i) τυχαία ρίψη 2 νομισμάτων (δίκαια νομίσματα)

$$\Omega = \{(K,K), (K,\Gamma), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma)\} \rightarrow \text{ισοπίθανα δ.σ.}$$

A: "1η ρίψη είναι K" $= \{(K,K), (K,\Gamma)\}$

B: "2η ρίψη είναι K" $= \{(\Gamma,K), (K,K)\}$

Γ: "και οι 2 ρίψεις είναι K" $= \{(K,K)\}$

A και B είναι ανεξάρτητα!

$AB = \{(K,K)\}$, $P(AB) = (\{K,K\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A)\cdot P(B)$

$A\Gamma = \{(K,K)\}$, $P(A\Gamma) = \frac{1}{4} \neq P(A)\cdot P(\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Άρα A και Γ ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα. ■

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις – Ιδιότητες}}$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ : $\left(A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{συμβ.}}{=} A \text{ και } B \text{ ανεξάρτητα}\right)$

1. $A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

$P(AB) = P(A)\cdot P(B) \overset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(A|B) = P(A)$

$P(AB) = P(A)\cdot P(B) \overset{P(A)>0}{\Longleftrightarrow} P(B|A) = P(B)$

$P(A|B) = P(A) \overset{P(A),\,P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(B|A) = P(B)$

2. $A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c \Leftrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

$\boxed{A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B^c}$. Πράγματι,

- $P(AB^c) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) =$

$$= P(A)\cdot\big(1 - P(B)\big) = P(A)\cdot P(B^c).$$

- $A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{ιδιοτ.}}{\Longrightarrow} A \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{συμμετρία}}{\Longrightarrow} B^c \perp\!\!\!\perp A \overset{\text{ιδιοτ.}}{\Longrightarrow} B^c \perp\!\!\!\perp A^c \overset{\text{συμ.}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B^c \overset{\text{ιδ.}}{\Longrightarrow} A^c \perp\!\!\!\perp B \overset{\text{συμ.}}{\Longrightarrow} B \perp\!\!\!\perp A^c \overset{\text{ιδ.}}{\Longrightarrow} B \perp\!\!\!\perp A$

3. Αν $P(A)$ ή $P(B) \in \{0, 1\} \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

Αν $P(A) = 0$, τότε

$$AB \subset A \Rightarrow 0 \leq P(AB) \leq P(A) = P(A)\cdot P(B) = 0$$

Αν $P(A)=1 \Rightarrow P(A^c)=0 \Rightarrow A^c \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$

4. Αν $P(A), P(B) \notin \{0,1\}$

$AB=\emptyset \Rightarrow \cancel{A \perp\!\!\!\perp B}$

Προσοχή!
Γίνεται συχνά το λάθος!
Συγχέουμε "ανεξάρτητα" και "ασυμβίβαστα".

• Αν $A: P(A)=0$, τότε $A \perp\!\!\!\perp A^c$ (A κ' A^c: ανεξάρτητα)

όμως $AA^c=\emptyset$ [Βρήκαμε ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα ενδεχόμενα]

Απόδειξη

• $AB=\emptyset \Rightarrow P(AB)=0 \neq P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$ A και B δεν είναι ανεξάρτητα ενδεχ. ($\cancel{A \perp\!\!\!\perp B}$)

$\left(\underbrace{P(A)\cdot P(B) \notin \{0,1\}}_{\text{υπόθεση}} \Rightarrow 0<P(A)P(B)<1\right)$

5. Αν $P(A), P(B) \notin \{0,1\}$ $\left(p \Rightarrow q \overset{(\Leftrightarrow)}{/} \bar{q} \Rightarrow \bar{p}\right)$

$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow AB \neq \emptyset$

6. $A \perp\!\!\!\perp A$? Μόνο αν $P(A)\in\{0,1\}$. Αντίθετα, αν $P(A)\notin\{0,1\}$ $\cancel{A \perp\!\!\!\perp A}$

Απόδειξη:

$P(AA)=P(A) \overset{\text{πρέπει}}{=} P(A)P(A) \Leftrightarrow P(A)(1-P(A))=0$

$\Leftrightarrow P(A)\in\{0,1\}$