Συναρτησιακή Ανάλυση (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 17 Απριλίου 2021)

1. Θεωρούμε τον $C[0,1]$ με τη νόρμα $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Αποδείξτε ότι η $G : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$G(f) = \int_0^1 t f(t)\, dt$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και ότι $\|G\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Έστω Y χώρος Banach και (z_n) ακολουθία στον Y με $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$. Ορίζουμε $T : \ell_2 \to Y$ ως εξής: για κάθε $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots) \in \ell_2$ θέτουμε

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z_n.$$

Αποδείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος και φραγμένος γραμμικός τελεστής, και ότι

$$\|T\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2\right)^{1/2}.$$

3. Έστω $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$. Θεωρούμε τον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ και ορίζουμε $T : C[0,1] \to c_0$ με $T(f) = \left(f(x_1), \frac{f(x_2)}{2}, \ldots, \frac{f(x_k)}{k}, \ldots\right)$.

(α) Αποδείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής.

(β) Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος και υπολογίστε την $\|T\|$.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C[0,1]$ ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και $\|T(f)\|_{c_0} < \varepsilon$.

4. (α) Έστω $x \in [0,1]$ και $T_x : C[0,1] \to \mathbb{R}$ το συναρτησοειδές που ορίζεται από την $T_x(f) = f(x)$. Αποδείξτε ότι το $T_x : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές ενώ το $T_x : (C[0,1], \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο.
(β) Έστω $X = (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ και $\psi : X \to \mathbb{R}$ το γραμμικό συναρτησοειδές που ορίζεται από την

$$\psi(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Αποδείξτε ότι $\psi \in X^*$ αλλά δεν υπάρχει $f \in B_X$ τέτοια ώστε $|\psi(f)| = \|\psi\|$.

5. Έστω X χώρος Banach. Συμβολίζουμε με $B(X) := B(X,X)$ τον χώρο των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to X$. Λέμε ότι ο $T \in B(X)$ είναι αντιστρέψιμος αν είναι 1-1, επί και ο T^{-1} είναι επίσης φραγμένος. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $T \in B(X)$ και $\|I - T\| < 1$, όπου $I : X \to X$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τη σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} (I-T)^k$ στον $B(X)$.]

(β) Το σύνολο A των αντιστρέψιμων τελεστών $T : X \to X$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $B(X)$.

6. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ που εξαρτάται μόνο από το n ώστε: για κάθε πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ n ισχύει $\|p'\|_\infty \leqslant C_n \|p\|_\infty$.

7. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι

(α) Υπάρχει μη φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ ο οποίος είναι 1-1 και επί.

(β) Υπάρχει πλήρης νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X η οποία δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

8. Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με την ακόλουθη ιδιότητα: υπάρχουν $M > 0$ και $0 < \alpha < 1$ ώστε, για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq M\|y\|$ και $\|T(x) - y\| \leq \alpha\|y\|$.

Δείξτε ότι: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $\|x\| \leq \frac{M}{1-\alpha}\|y\|$ και $T(x) = y$.

9. (α) Έστω X, Y χώροι Banach. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T \in B(X,Y)$ λέγεται συμπαγής αν το σύνολο $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Αποδείξτε ότι το σύνολο $B_0(X,Y)$ των συμπαγών τελεστών $T : X \to Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $B(X,Y)$.

(β) Έστω X, Y χώροι Banach, με τον X απειροδιάστατο, και $T : X \to Y$ συμπαγής τελεστής. Αποδείξτε ότι $0 \in \overline{T(S_X)}$, όπου $T(S_X) = \{T(x) : \|x\| = 1\}$.

10. Σε αυτή την άσκηση $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \in Y \text{ ισομορφισμός}\}$ είναι η απόσταση Banach-Mazur δύο n-διάστατων χώρων με νόρμα.

(α) Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες $\|x\|_q \leqslant \|x\|_2 \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|x\|_q$ και συμπεράνατε ότι $d_{\mathrm{BM}}(\ell_2^n, \ell_q^n) \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$.

(β) Έστω $y_1, \ldots, y_k \in \ell_2^n$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^k \epsilon_i y_i \right\|^2 = 2^k \sum_{i=1}^k \|y_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) \in \{-1, 1\}^k$.

(γ) Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$ και έστω $T : \ell_q^n \to \ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T : \ell_q^n \to \ell_2^n\| = 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2 \leqslant n^{2/q},$$

άρα $\|Te_j\|_2 \leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$ για κάποιον $j \leqslant n$, και συμπεράνατε ότι

$$\|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_q^n\| \geqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

(δ) Έστω $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Δείξτε ότι

$$d_{\mathrm{BM}}(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$