602. Συναρτησιακή Ανάλυση

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Χώροι με νόρμα

1. *Αν Y και Z είναι υπόχωροι του X, αποδείξτε ότι ο $Y \cap Z$ είναι υπόχωρος του X, ενώ ο $Y \cup Z$ είναι υπόχωρος του X αν και μόνο αν είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.*

Υπόδειξη. (α) Για την τομή: υποθέτουμε ότι $x, y \in Y \cap Z$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Αφού $x, y \in Y$ και ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, παίρνουμε $\lambda x + \mu y \in Y$. Ομοίως, $\lambda x + \mu y \in Z$. Δηλαδή, $\lambda x + \mu y \in Y \cap Z$.

(β) Για την ένωση: αν $Y \subseteq Z$ τότε $Y \cup Z = Z$, ενώ αν $Z \subseteq Y$ τότε $Y \cup Z = Y$. Σε κάθε περίπτωση, ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο $Y \cup Z$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X. Με την υπόθεση ότι υπάρχουν $y \in Y \setminus Z$ και $z \in Z \setminus Y$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αφού $y, z \in Y \cup Z$, έχουμε $y + z \in Y \cup Z$.

Αν $y + z \in Y$ τότε $(y + z) - y \in Y$ γιατί ο Y είναι υπόχωρος, δηλαδή $z \in Y$ το οποίο είναι άτοπο.

Αν $y + z \in Z$ τότε $(y + z) - z \in Z$ γιατί ο Z είναι υπόχωρος, δηλαδή $y \in Z$ το οποίο είναι πάλι άτοπο.

Αφού δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι $Y \setminus Z \neq \emptyset$ και $Z \setminus Y \neq \emptyset$, έχουμε είτε $Y \subseteq Z$ είτε $Z \subseteq Y$.

2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ ενός γραμμικού υποχώρου Y του X είναι γραμμικός υπόχωρος του X.*

Υπόδειξη. Έστω $z, w \in \overline{Y}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Υπάρχουν $z_n, w_n \in Y$ με $z_n \to z$ και $w_n \to w$. Αφού ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda z_n + \mu w_n \in Y$.

Όμως οι πράξεις του X είναι συνεχείς ως προς τη νόρμα, άρα

$$\lambda z_n + \mu w_n \to \lambda z + \mu w.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda z + \mu w \in \overline{Y}$.

3. Αποδείξτε ότι σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, για κάθε $x \in X$ και $r > 0$ ισχύουν

$$\widehat{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}, \quad \mathrm{int}\left(\widehat{B}(x,r)\right) = B(x,r) \quad \text{και} \quad \partial\widehat{B}(x,r) = \partial B(x,r) = S(x,r).$$

Υπόδειξη. Η $\widehat{B}(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο και $B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Άρα,

$$\overline{B(x,r)} \subseteq \widehat{B}(x,r).$$

Αντίστροφα, έστω $y \in \widehat{B}(x,r)$, $y \neq x$. Ορίζουμε $y_n = x + \lambda_n(y-x)$, όπου (λ_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με όριο το 1. Τότε $y_n \to x + (y-x) = y$ και

$$\|x - y_n\| = \|\lambda_n(y-x)\| = \lambda_n\|y-x\| < \|y-x\| \leqslant r,$$

δηλαδή $y_n \in B(x,r)$ και $y_n \to y$. Έπεται ότι $y \in \overline{B(x,r)}$, και αφού το $y \in \widehat{B}(x,r)$, $y \neq x$ ήταν τυχόν, $\widehat{B}(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$.

Η $B(x,r)$ είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στην $\widehat{B}(x,r)$. Άρα, $B(x,r) \subseteq \mathrm{int}(\widehat{B}(x,r))$. Αντίστροφα, έστω y εσωτερικό σημείο της $\widehat{B}(x,r)$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $B(y,\delta) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Τότε, αν $\|z\| < \delta$, έχουμε $\|y+z-x\| \leqslant r$. Επιλέγουμε $z = t(y-x)$ για $t > 0$ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε $\|z\| < \delta$. Τότε,

$$\|y+z-x\| = \|(1+t)(y-x)\| = (1+t)\|y-x\| \leqslant r,$$

δηλαδή $\|y-x\| \leqslant \frac{r}{1+t} < r$, άρα $y \in B(x,r)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\partial\widehat{B}(x,r) = \widehat{B}(x,r) \setminus \mathrm{int}(\widehat{B}(x,r)) = \widehat{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r)$$

και

$$\partial B(x,r) = \overline{B(x,r)} \setminus B(x,r) = \widehat{B}(x,r) \setminus B(x,r) = S(x,r).$$

4. *Έστω X γραμμικός χώρος, και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον X. Αποδείξτε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$, αν και μόνο αν $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.*

Υπόδειξη. Έστω ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|')}$, τότε $\|x\|' \leqslant 1$. Άρα, $\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant 1$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$. Δηλαδή, $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)}$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X \setminus \{0\}$. Τότε,

$$\left\|\frac{x}{\|x\|'}\right\|' = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|'} \in B_{(X,\|\cdot\|')} \subseteq B_{(X,\|\cdot\|)},$$

δηλαδή

$$\left\|\frac{x}{\|x\|'}\right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant 1.$$

Η $\|0\| \leqslant \|0\|'$ ισχύει σαν ισότητα, οπότε δείξαμε ότι $\|x\| \leqslant \|x\|'$ για κάθε $x \in X$.

5. *Έστω* X *χώρος με νόρμα, και* Y *ένας γραμμικός υπόχωρος του* X. *Αποδείξτε ότι αν* $Y^\circ \neq \emptyset$, *τότε* $Y = X$.

Υπόδειξη. Αφού $Y^\circ \neq \emptyset$, υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $B(y, r) \subseteq Y$. Ειδικότερα, $y \in Y$.

Έστω $x \in X$, $x \neq y$. Τότε, $y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in B(y, r)$ (γιατί;), άρα

$$y + \frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y.$$

Όμως ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, οπότε χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $y \in Y$ παίρνουμε

$$\frac{r}{2}\frac{x-y}{\|x-y\|} \in Y \Longrightarrow x - y \in Y \Longrightarrow x \in Y.$$

Το x ήταν τυχόν, άρα $Y = X$.

6. *Έστω* X *χώρος Banach και* (Y_n) *ακολουθία γραμμικών υποχώρων του* X *με* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε ο* Y_n *να είναι πυκνός στον* X.

Υπόδειξη. Αφού $Y_n \subseteq \overline{Y_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n} \subseteq X,$$

δηλαδή

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}.$$

Από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος Baire, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(\overline{Y_{n_0}}) \neq \emptyset$. Όμως, από την Άσκηση 2 ο $\overline{Y_{n_0}}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X, και αφού έχει μη κενό εσωτερικό από την Άσκηση 5 συμπεραίνουμε ότι $\overline{Y_{n_0}} = X$. Άρα, ο $\overline{Y_{n_0}}$ είναι πυκνός στον X.

7. *Έστω* X *χώρος με νόρμα και* $x, y \in X$ *τέτοια ώστε* $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. *Αποδείξτε ότι: για κάθε* $a, b \geqslant 0$ *ισχύει* $\|ax + by\| = a\|x\| + b\|y\|$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \geqslant b$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|ax + by\| &= \|a(x + y) - (a - b)y\| \geqslant \|a(x + y)\| - \|(a - b)y\| = a\|x + y\| - (a - b)\|y\| \\ &= a(\|x\| + \|y\|) - (a - b)\|y\| = a\|x\| + b\|y\|.\end{aligned}$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει άμεσα από την τριγωνική ανισότητα:

$$\|ax + by\| \leqslant \|ax\| + \|by\| = a\|x\| + b\|y\|.$$

8. *Έστω* $x_1, \ldots, x_n$ *μοναδιαία διανύσματα σε έναν χώρο με νόρμα. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο* $0 < \varepsilon < 1$ *ισχύει*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| \leqslant (1 + \varepsilon) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|,$$

για κάθε $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. *Αποδείξτε ότι*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big\| \geqslant (1-\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|,$$

για κάθε $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$.

Υπόδειξη. Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $j \leqslant n$ τέτοιο ώστε

$$|\lambda_j| = \max_{i\leqslant n}|\lambda_i|.$$

Ορίζουμε $\mu_i \in \mathbb{K}$ θέτοντας $\mu_j = \lambda_j$ και $\mu_i = -\lambda_i$ αν $i \neq j$. Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} 2|\lambda_j| &= \|2\lambda_j x_j\| = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n \mu_i x_i\Big\| \\ &\leqslant \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\Big\| \\ &\leqslant \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big\| + (1+\varepsilon)\max_{i\leqslant n}|\mu_i| \\ &= \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big\| + (1+\varepsilon)|\lambda_j|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big\| \geqslant 2|\lambda_j| - (1+\varepsilon)|\lambda_j| = (1-\varepsilon)\max_{i\leqslant n}|\lambda_i|.$$

9. *Έστω* $\widehat{B}(x_n,r_n)$ *μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες σε έναν χώρο Banach* X. *Αποδείξτε ότι* $\bigcap_{n=1}^\infty \widehat{B}(x_n,r_n) \neq \emptyset$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant r_n - r_{n+1} \tag{1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_{n+1} = x_n$ αυτό είναι απλό (γιατί;) ενώ αν $x_{n+1} \neq x_n$ παρατηρούμε ότι

$$y = x_{n+1} + \frac{x_{n+1}-x_n}{\|x_{n+1}-x_n\|}r_{n+1} \in \widehat{B}(x_{n+1},r_{n+1}) \subseteq \widehat{B}(x_n,r_n),$$

οπότε

$$\|y-x_n\| \leqslant r_n \Longrightarrow \|x_{n+1}-x_n\| + r_{n+1} \leqslant r_n.$$

Από την (1) βλέπουμε ότι η (r_n) είναι φθίνουσα, άρα συγκλίνει. Ειδικότερα, είναι βασική ακολουθία. Πάλι από την (1) βλέπουμε ότι, αν $n < m$ τότε

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1}-x_n\| \leqslant (r_{m-1}-r_m) + \cdots + (r_n - r_{n+1}) = r_n - r_m,$$

οπότε η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x$. Αποδείξτε τώρα ότι $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{B}(x_n, r_n)$.

10. (α) *Αποδείξτε ότι, αν $1 \leqslant p < r \leqslant \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\|x\|_r \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Βρείτε διανύσματα x για τα οποία ισχύει ισότητα στις παραπάνω ανισότητες.

(β) *Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: αν $N < p < +\infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε την εξής ανισότητα: αν $r \geqslant 1$ και $a, b \geqslant 0$, τότε $(a+b)^r \geqslant a^r + b^r$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $r \geqslant 1$ και $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_n)^r \geqslant a_1^r + \cdots + a_n^r.$$

Έστω $p < r$. Αν $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\|x\|_p^r = (|\xi_1|^p + \cdots + |\xi_n|^p)^{r/p} \geqslant (|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p} = |\xi_1|^r + \cdots + |\xi_n|^r = \|x\|_r^r,$$

οπότε $\|x\|_r \leqslant \|x\|_p$ (χρησιμοποιήσαμε την προηγούμενη ανισότητα για τα $r/p > 1$ και $a_k = |\xi_k|^p$).

Για την άλλη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder:

$$\begin{aligned}\|x\|_p^p &= |\xi_1|^p \cdot 1 + \cdots + |\xi_n|^p \cdot 1 \\ &\leqslant \left((|\xi_1|^p)^{r/p} + \cdots + (|\xi_n|^p)^{r/p}\right)^{\frac{p}{r}} (1 + \cdots + 1)^{1-\frac{p}{r}} \\ &= \|x\|_r^p n^{1-\frac{p}{r}},\end{aligned}$$

άρα $\|x\|_p \leqslant \|x\|_r n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$. Η περίπτωση $r = \infty$ είναι απλή.

Από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty$ για κάθε $p \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $n^{1/p} \to 1$ όταν $p \to \infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n^{1/p} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $p > N$. Τότε, για κάθε $p > N$ ισχύει η

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

11. *Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞. Έστω $y_n = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \ldots\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_n \|y_n\|$ συγκλίνει, αλλά η $\sum_n y_n$ δεν συγκλίνει στον Y. Τι συμπεραίνετε;*

Υπόδειξη. Έχουμε $\sum_{n=1}^\infty \|y_n\| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$. Τα μερικά αθροίσματα της $\sum_n y_n$ είναι

$$s_k = y_1 + \cdots + y_k = \left(1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{k^2}, 0, \ldots\right) \to x = (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

στον ℓ_∞. Αν υπήρχε $y \in c_{00}$ για το οποίο $s_k \to y$, από μοναδικότητα του ορίου (στον ℓ_∞) θα είχαμε $y = x \notin c_{00}$, άτοπο. Βρήκαμε σειρά στον c_{00} η οποία συγκλίνει απολύτως αλλά δεν συγκλίνει. Άρα, ο $(c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

12. *Ο c_{00} περιέχεται σε κάθε ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Αποδείξτε ότι είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$, όχι όμως στον ℓ_∞.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\sum_{k=N+1}^\infty |\xi_k|^p < \varepsilon^p$.

Ορίζουμε $w = (\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, \ldots) \in c_{00}$. Τότε,

$$\|x - w\| = \left(\sum_{k=N+1}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon,$$

δηλαδή $B(x,\varepsilon) \cap c_{00} \neq \emptyset$. Αφού το $\varepsilon > 0$ και το $x \in \ell_p$ ήταν τυχόντα, συμπεραίνουμε ότι ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ_p, $1 \leqslant p < +\infty$.

(β) Θεωρούμε το $x = (1, \ldots, 1, \ldots) \in \ell_\infty$. Αν $w \in c_{00}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $w_k = 0$ για κάθε $k \geqslant N$. Άρα,

$$\|x - w\| = \sup\{|1 - w_k| : k \in \mathbb{N}\} \geqslant |1 - w_N| = 1.$$

Δηλαδή $d(x, c_{00}) \geqslant 1$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x,1) \cap c_{00} = \emptyset$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι πυκνός στον ℓ_∞.

13. *Θεωρούμε το $S = \{x \in \ell_\infty : \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \leqslant 1\}$. Αποδείξτε ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_1 (και στον ℓ_∞) ως προς την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ και έχει κενό εσωτερικό.*

Αποδείξτε ότι ο ℓ_1 με νόρμα την $\|x\| = \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι χώρος Banach.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x_n = (\xi_{nk}) \in S$, δηλαδή $\sum_k |\xi_{nk}| \leqslant 1$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x = (\xi_k) \in \ell_\infty$. Τότε,

$$\sup\{|\xi_{nk} - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\xi_{nk} \to \xi_k$ καθώς $n \to \infty$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^N |\xi_{nk}| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |\xi_{nk}| \leqslant 1,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^N |\xi_{nk}| \leqslant 1.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε N, έπεται ότι $\sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in S$. Αυτό αποδεικνύει ότι το S είναι κλειστό στον ℓ_∞.

(β) Θα δείξουμε ότι το S έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ - άρα και στον ℓ_∞. Έστω ότι υπάρχουν $x \in S$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$\{z \in \ell_1 : \|z - x\|_{\ell_\infty} < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \ldots < k_N < \ldots$ για τους οποίους $\xi_{k_j} \geqslant 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τα αρνητικά ξ_k). Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε $N\varepsilon/2 > 1$ και ορίζουμε $\xi'_{k_1} = \xi_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \xi'_{k_N} = \xi_{k_N} + \frac{\varepsilon}{2}$, και $\xi'_k = \xi_k$ για όλους τους άλλους k. Τότε το $x' = (\xi'_k) \in \ell_1$, $\|x - x'\|_{\ell_\infty} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, και

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi'_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{N\varepsilon}{2} > 1,$$

δηλαδή $x' \notin S$. Άτοπο, γιατί είχαμε υποθέσει ότι $\ell_1 \cap B(x, \varepsilon) \subseteq S$.

(γ) Έστω ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ είναι χώρος Banach. Τότε, ο ℓ_1 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$ (γιατί;). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$F_n = nS = \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_1 ως προς την $\|\cdot\|_{\ell_\infty}$, και έχει κενό εσωτερικό στον $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$: αν το nS περιείχε μπάλα ακτίνας $r > 0$, τότε το S θα περιείχε μπάλα ακτίνας r/n, άτοπο από το (β).

Τα F_n είναι κλειστά υποσύνολα του ℓ_1 με κενό εσωτερικό και $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα του Baire. Άρα, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ δεν είναι χώρος Banach.

14. *Στον ℓ_1 ορίζουμε*

$$\|x\|' = 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k|.$$

Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα. Είναι ισοδύναμη με την $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$; Είναι ο $(\ell_1, \|\cdot\|')$ χώρος Banach;

Υπόδειξη. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά, γιατί αν $x \in \ell_1$ έχουμε

$$2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| < +\infty.$$

Η μόνη ιδιότητα της νόρμας που χρειάζεται προσοχή, είναι η $\|x\|' = 0 \Longrightarrow x = 0$. Έχουμε

$$\|x\|' = 0 \Longrightarrow 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\xi_k| = 0,$$

απ' όπου παίρνουμε $\xi_k = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0$. Αυτά τα δύο μάς δίνουν και την $\xi_1 = 0$, άρα $x = 0$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|'$ και η συνήθης νόρμα $\|\cdot\|$ στον ℓ_1 είναι ισοδύναμες. Αφού ο $(\ell_1, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, αυτό δείχνει αμέσως ότι ο ℓ_1 είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;). Έχουμε:

$$\|x\|' \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| + \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = \frac{7}{2}\|x\|,$$

και

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k| = |\xi_1| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k - \sum_{k=2}^{\infty}\xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + |\sum_{k=2}^{\infty}\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + 2\sum_{k=2}^{\infty}|\xi_k| \\
&\leqslant 2\left(2\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\Big| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|\xi_k|\right) \\
&= 2\|x\|'.
\end{aligned}$$

Είδαμε ότι $\frac{1}{2}\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \frac{7}{2}\|x\|$ για κάθε $x \in \ell_1$, άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

15. *Στον c_0 θεωρούμε την $\|x\|' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|}{2^k}$. Αποδείξτε ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ είναι χώρος με νόρμα, αλλά δεν είναι χώρος Banach.*

Υπόδειξη. Η $\|\cdot\|'$ ορίζεται καλά: αν $x = (\xi_k) \in c_0$, τότε $|\xi_k| \to 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|\xi_k| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\xi_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{2^k} = M < +\infty.$$

Τα αξιώματα της νόρμας ελέγχονται εύκολα.

Θα ορίσουμε βασική ακολουθία στον $(c_0, \|\cdot\|')$, η οποία δεν συγκλίνει. Αυτό θα δείξει ότι ο $(c_0, \|\cdot\|')$ δεν είναι χώρος Banach.

Ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_0$ (n μονάδες). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Αν $n > m \geqslant n_0$, τότε

$$\|x_n - x_m\| = \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

δηλαδή η (x_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|'$. Έστω ότι υπάρχει $x = (\xi_k) \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x_n - x\|' \to 0$. Αφού $\xi_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|\xi_{k_0}| < 1/2$. Αν $n \geqslant k_0$, τότε

$$\|x_n - x\|' = \sum_{k=1}^{n}\frac{|1-\xi_k|}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\xi_k|}{2^k} \geqslant \frac{|1-\xi_{k_0}|}{2^{k_0}} \geqslant \frac{1}{2^{k_0+1}}.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\|x_n - x\|' \to 0$.

16. *Έστω* X *n-διάστατος πραγματικός γραμμικός χώρος, και* $x_1, \dots, x_m$ *διανύσματα που παράγουν τον* X. *Τότε, για κάθε* $x \in X$ *υπάρχουν* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *(όχι αναγκαστικά μοναδικά), τέτοια ώστε* $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. *Ορίζουμε*

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : \lambda_i \in \mathbb{R}, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}.$$

Αποδείξτε ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ *είναι χώρος με νόρμα.*

Υπόδειξη. Τα x_i παράγουν τον X, επομένως κάθε $x \in X$ γράφεται με τουλάχιστον έναν τρόπο στη μορφή $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$. Άρα, το

$$\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}$$

είναι μη κενό και κάτω φραγμένο από το 0, οπότε η

$$\|x\| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda_i| : x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\}$$

ορίζεται καλά. Προφανώς, $\|x\| \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$.

Για την (N2): Έστω ότι $\|x\| = 0$. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\lambda_i^{(k)}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^m |\lambda_i^{(k)}| < \frac{1}{k}$ και $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i$. Αφού $|\lambda_i^{(k)}| < 1/k$, έχουμε $\lambda_i^{(k)} \to 0$ για κάθε $i \leqslant m$. Θεωρούμε τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X. Τότε, $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i \to \sum_{k=1}^m 0 \cdot x_i = \vec{0}$ ως προς την $\|\cdot\|'$, άρα $x = \vec{0}$.

Για την (N3): Έστω $x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ και $\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon$. Τότε, $ax = \sum_{i=1}^m (a\lambda_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |a\lambda_i| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon \Longrightarrow \|ax\| < |a| \cdot \|x\| + |a|\varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, $\|ax\| \leqslant |a| \cdot \|x\|$. Τελείως ανάλογα δείχνουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για την (N4): Έστω $x, y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i| < \|x\| + \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|y\| + \varepsilon.$$

Τότε, $x + y = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) x_i$ και

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i| + \sum_{i=1}^m |\mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Άρα,

$$\|x + y\| \leqslant \sum_{i=1}^m |\lambda_i + \mu_i| < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon,$$

και αφού το ε ήταν τυχόν, παίρνουμε την $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

17. *Έστω X χώρος με νόρμα, με διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του 2. Αν (x_n) είναι ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων στον X, αποδείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός κλειστός υπόχωρος του X ο οποίος δεν περιέχει κανένα x_n.*

Υπόδειξη. Θέτουμε $F = \mathrm{span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(α) Αν $\dim(F) = 1$, τότε υπάρχει $x_0 \in X \setminus F$ και αν θέσουμε $F_0 = \mathrm{span}(\{x_0\})$ έχουμε $F_0 \cap F = \{0\}$ (οι ευθείες F_0 και F δεν ταυτίζονται, άρα το μόνο κοινό σημείο τους είναι το 0). Αφού $x_n \neq 0$, έχουμε $x_n \notin F_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε λοιπόν τον F_0, ο οποίος ειναι κλειστός υπόχωρος του X (διότι έχει πεπερασμένη διάσταση) και δεν περιέχει κανένα x_n.

(β) Έστω ότι $\dim(F) \geqslant 2$. Θεωρούμε $s \neq k$ ώστε τα x_s, x_k να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και τον υπόχωρο $Y = \mathrm{span}(\{x_s, x_k\})$. Επίσης θεωρούμε το $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Y\}$. Για κάθε $n \in M$ θεωρούμε τον υπόχωρο $F_n = \mathrm{span}(\{x_n\})$ που παράγεται από το x_n. Παρατηρήστε ότι κάθε F_n, $n \in M$, είναι γνήσιος υπόχωρος του Y διότι $\dim(F_n) = 1 < 2 = \dim(Y)$, άρα $\mathrm{int}_Y(F_n) = \emptyset$, όπου $\mathrm{int}_Y(A)$ είναι το εσωτερικό του A στον $(Y, \|\cdot\|)$. Επίσης, κάθε F_n, $n \in M$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Ο Y είναι πλήρης, διότι έχει πεπερασμένη διάσταση, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Baire βρίσκουμε $x_0 \in Y \setminus \bigcup_{n \in M} F_n$. Όπως και στην πρώτη περίπτωση βλέπουμε ότι αν ορίσουμε $F_0 = \mathrm{span}(\{x_0\})$ τότε έχουμε $x_n \notin F_0$ για κάθε $n \in M$. Επίσης, αν $n \notin M$ έχουμε $x_n \notin Y$, άρα και $x_n \notin F_0$.

Δηλαδή, ο $F_0 = \mathrm{span}(\{x_0\})$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και δεν περιέχει κανένα x_n.

18. (α) *Έστω X χώρος με νόρμα και D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D' = \left\{\frac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0\right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο της S_X.*

(β) *Έστω X χώρος με νόρμα και D' πυκνό υποσύνολο της S_X. Αποδείξτε ότι το σύνολο $D = \{qx : x \in D', q \in \mathbb{Q}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

(γ) *Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν η μοναδιαία σφαίρα S_X του X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in S_X$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) από το D τέτοια ώστε $y_n \to x$. Ειδικότερα, $\|y_n\| \to \|x\| = 1$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $y_n \neq 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, $n \geqslant n_0$. Έχουμε $x_n \in D'$ και

$$x_n = \frac{1}{\|y_n\|} \cdot y_n \to 1 \cdot x$$

από τη συνέχεια της $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$. Έπεται ότι το D' είναι πυκνό υποσύνολο της S_X.

(β) Έστω $x \in X$. Αν $x = 0$ τότε $x \in D$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$. Θεωρούμε το $y = \frac{x}{\|x\|} \in S_X$ και βρίσκουμε ακολουθία (y_n) στο D' ώστε $y_n \to y$. Επίσης, βρίσκουμε ακολουθία (q_n) ρητών με $q_n \to \|x\|$. Τότε, $q_n y_n \in D$ και

$$q_n y_n \to \|x\| \cdot y = x.$$

Έπεται ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(γ) Υποθέτουμε αρχικά ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και το σύνολο D' του ερωτήματος (α). Η απεικόνιση $\phi : D \setminus \{0\} \to D'$ με $\phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$ είναι επί και το σύνολο $D \setminus \{0\}$ είναι αριθμησιμο, άρα το D' είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι η S_X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D' της S_X. Θεωρούμε το σύνολο D του ερωτήματος (β). Η απεικόνιση $\psi : \mathbb{Q} \times D' \to D$ είναι επί και τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και D' είναι αριθμήσιμα, άρα το $\mathbb{Q} \times D'$ είναι επίσης αριθμήσιμο. Άρα το D είναι αριθμήσιμο, και έπεται ότι ο X ίναι διαχωρίσιμος.

19. (α) *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και έστω $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι αν $y_n \in X$ και $\|y_n\| < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο $D' = \left\{x_n + \frac{1}{n}y_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

(β) *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $y_n \in X$ με $\|y_n\| < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $D' = \left\{x_n + \frac{1}{n}y_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(γ) *Αποδείξτε ότι κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα έχει πυκνό υποσύνολο το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $B(x,\varepsilon) \cap D$ είναι άπειρο: αν πάρουμε οποιοδήποτε $y \neq x$ στον X και για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ θεωρήσουμε τις μπάλες $B_i := B\left(u_i, \frac{\varepsilon}{2n}\right)$ όπου $u_i = x + \frac{k\varepsilon}{n}\frac{y-x}{\|y-x\|}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, τότε οι B_i είναι ξένες, περιέχονται στην $B(x,\varepsilon)$ και καθεμία τους περιέχει σημείο του D διότι το D είναι πυκνό. Άρα, η $B(x,\varepsilon)$ περιέχει τουλάχιστον n σημεία του D.

Έστω τώρα $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ και χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ισχυρισμό βρίσκουμε $n > n_0$ ώστε $\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\left\|x - \left(x_n + \frac{1}{n}y_n\right)\right\| \leqslant \|x - x_n\| + \frac{1}{n}\|y_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $B(x,\varepsilon) \cap D' \neq \emptyset$.

(β) Ορίζουμε τα y_n επαγωγικά. Στο πρώτο βήμα θεωρούμε $y_1 \notin \mathrm{span}\{x_1\}$ με $0 < \|y_1\| < 1$. Τότε, $x_1 + y_1 \neq 0$, άρα το $\{x_1 + y_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $y_1, \dots, y_n$ έτσι ώστε $\|y_i\| < 1$ και το σύνολο $A_n = \left\{x_1 + y_1, x_2 + \frac{1}{2}y_2, \dots, x_n + \frac{1}{n}y_n\right\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$X_n = \mathrm{span}(A_n \cup \{x_{n+1}\})$$

και βρίσκουμε $y_{n+1} \in X \setminus X_n$ με $0 < \|y_{n+1}\| < 1$ (αυτό γίνεται, γιατί ο X είναι απειροδιάστατος, άρα περιέχει γνήσια τον X_n). Θα δείξουμε ότι το σύνολο $A_{n+1} = \left\{x_1 + y_1, \dots, x_{n+1} + \frac{1}{n+1}y_{n+1}\right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, αν

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \cdots + \lambda_n\left(x_n + \frac{1}{n}y_n\right) + \lambda_{n+1}\left(x_{n+1} + \frac{1}{n+1}y_{n+1}\right) = 0,$$

τότε δεν μπορούμε να έχουμε $\lambda_{n+1} \neq 0$ γιατί θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\frac{1}{n+1} y_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}(x_1 + y_1) - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\left(x_n + \frac{1}{n} y_n\right) - x_{n+1},$$

δηλαδή θα είχαμε $y_{n+1} \in X_n$. Άρα, $\lambda_{n+1} = 0$ και τότε

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \cdots + \lambda_n\left(x_n + \frac{1}{n} y_n\right) = 0,$$

το οποίο δίνει $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ από τη γραμμική ανεξαρτησία του A_n.

Ορίζεται έτσι ακολουθία (y_n) τέτοια ώστε κάθε A_n να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Είναι τώρα εύκολο να δείξουμε ότι το σύνολο $D' = \left\{x_n + \frac{1}{n} y_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(γ) Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του X, και χρησιμοποιώντας το (β) βρίσκουμε $y_n \in X$ με $\|y_n\| < 1$ ώστε το σύνολο $D' = \left\{x_n + \frac{1}{n} y_n : n \in \mathbb{N}\right\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από το (α) το D' είναι επίσης πυκνό στον X, άρα έχουμε το ζητούμενο.

20. *Έστω X χώρος με νόρμα και $0 < \theta < 1$. Ένα $A \subseteq B_X$ λέγεται θ-δίκτυο για την B_X αν για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \theta$. Αν το A είναι θ-δίκτυο για την B_X, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχουν $a_n \in A$, $n \geqslant 0$, ώστε*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n.$$

Υπόδειξη. Έστω $x \in B_X$. Υπάρχει $a_0 \in A$ ώστε $\|x - a_0\| < \theta$, δηλαδή $\frac{x-a_0}{\theta} \in B_X$. Τότε, υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $\|\frac{x-a_0}{\theta} - a_1\| < \theta$, δηλαδή $\frac{x}{\theta^2} - \frac{a_0}{\theta^2} - \frac{a_1}{\theta} \in B_X$. Επαγωγικά, επιλέγουμε $a_0, a_1, a_2, \ldots \in A$ με την ιδιότητα

$$\frac{x}{\theta^{n+1}} - \frac{a_0}{\theta^{n+1}} - \cdots - \frac{a_n}{\theta} \in B_X \Longrightarrow \|x - (a_0 + \theta a_1 + \cdots + \theta^n a_n)\| < \theta^{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\theta^{n+1} \to 0$, αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n a_n$ συγκλίνει στο x.

21. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$, υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του D τέτοια ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και $\|x_n\| \leqslant \frac{3\|x\|}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $x_1 \in D$ ώστε $\|x - x_1\| < \frac{\|x\|}{2}$. Τότεμ

$$\|x_1\| \leqslant \|x_1 - x\| + \|x\| < \frac{\|x\|}{2} + \|x\| = \frac{3\|x\|}{2}.$$

Επαγωγικά, αν $N \geqslant 2$ και έχουμε ορίσει τα $x_1, \ldots, x_{N-1} \in D$, αφού το D είναι πυκνό μπορούμε να επιλέξουμε $x_N \in D$ ώστε

$$\left\|\left(x - \sum_{n=1}^{N-1} x_n\right) - x_N\right\| < \frac{\|x\|}{2^N}.$$

Αν $s_N = x_1 + \cdots + x_N$, από την κατασκευή έχουμε $\|x - s_N\| < \frac{\|x\|}{2^N} \to 0$, άρα $s_N \to x$. Συνεπώς,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|s_n - s_{n-1}\| = \|(s_n - x) - (s_{n-1} - x)\| \leqslant \|s_n - x\| + \|s_{n-1} - x\| \\ &< \frac{\|x\|}{2^n} + \frac{\|x\|}{2^{n-1}} = \frac{3\|x\|}{2^n}.\end{aligned}$$

22. *Έστω X χώρος Banach και Y υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι: αν ο Y είναι G_δ υποσύνολο του X τότε ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Υπόδειξη. Έχουμε $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ όπου κάθε A_n είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αν θέσουμε $B_n = A_n \cap \overline{Y}$ τότε $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ και κάθε B_n είναι ανοικτό στον $\overline{Y}$, άρα ο Y είναι G_δ υποσύνολο του $\overline{Y}$. Αφού $B_n \supseteq Y$, κάθε B_n είναι πυκνό στον $\overline{Y}$, άρα το $A = \overline{Y} \setminus Y = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\overline{Y} \setminus B_n)$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\overline{Y}$. Υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in A$ και ορίζουμε $B = x_0 + Y$. Παρατηρούμε ότι $B \subseteq \overline{Y}$ και $B \cap Y = \emptyset$ (αν υπήρχε $x \in (x_0 + Y) \cap Y$ τότε θα είχαμε και $x_0 \in Y$). Άρα, $B \subseteq A$. Τότε, το B είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\overline{Y}$, άρα και το $Y = B - x_0$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον $\overline{Y}$. Όμως, $\overline{Y} = Y \cup A$ και οδηγούμαστε σε άτοπο από το θεώρημα του Baire.

23. *Να συγκρίνετε τις ακόλουθες νόρμες στον $\mathcal{C}^1[0,1]$:*

(α) $\|f\| = \|\,|f| + |f'|\,\|_\infty$ *και* $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(β) $\|f\|_\infty$ *και* $\|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

(γ) $\|f\|_\infty$ *και* $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$|f(x)| + |f'(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_1,$$

και παίρνοντας supremum ως προς x παίρνουμε

$$\|f\| = \|\,|f| + |f'|\,\|_\infty \leqslant \|f\|_1.$$

Αντίστροφα παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $\|f\|_\infty \leqslant |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Έπεται ότι $\|f\|_1 \leqslant |f(0)| + 2\|f'\|_\infty$. Παρατηρώντας ότι

$$|f(0)| \leqslant |f(0)| + |f'(0)| \leqslant \|f\| \quad \text{και} \quad \|f'\|_\infty \leqslant \|f\|$$

(εξηγήστε γιατί) συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_1 \leqslant 3\|f\|$. Δηλαδή, οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \|f\|_\infty + \int_0^1 \|f\|_\infty dt = 2\|f\|_\infty.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, αλλά αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ τότε $\|f_n\|_\infty = 1$ ενώ $\|f_n\|_\infty + \|f'_n\|_\infty = 1 + n$. Άρα,

$$\sup\left\{\frac{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty}{\|f\|_\infty} : f \in \mathcal{C}^1[0,1], f \neq 0\right\} = +\infty.$$

24. *Έστω* $\mathcal{C}^k[0,1]$ *ο χώρος όλων των* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *που έχουν* k *συνεχείς παραγώγους, με νόρμα την*

$$\|f\| = \max_{0\leqslant s\leqslant k}\left(\max\{|f^{(s)}(t)| : t \in [0,1]\}\right).$$

Αποδείξτε ότι ο $\mathcal{C}^k[0,1]$ *είναι χώρος Banach.*

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\mathcal{C}^k[0,1]$. Ας υποθέσουμε ότι (f_n) είναι μια βασική ακολουθία στον $\mathcal{C}^k[0,1]$. Γράφουμε $g^{(s)}$ για την s-οστή παράγωγο της g. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n, m \geqslant n_0$, τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|f_n^{(s)} - f_m^{(s)}\|_\infty < \varepsilon$ για κάθε $s = 0, 1, \ldots, k$, όπου $\|\cdot\|_\infty$ η συνήθης νόρμα στον $\mathcal{C}[0,1]$. Ο $\mathcal{C}[0,1]$ είναι πλήρης, άρα υπάρχουν συνεχείς $f = f^{(0)}, f_s : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n^{(s)} \to f_s$ ομοιόμορφα. Από γνωστό θεώρημα (της Πραγματικής Ανάλυσης), η f_s είναι παραγωγίσιμη για κάθε $s = 0, 1, \ldots, k-1$ και $(f_s)' = f_{s+1}$. Δηλαδή, $f_s = f^{(s)}$ για κάθε $s = 0, 1, \ldots, k$. Αφού η $f^{(k)} = f_k$ είναι συνεχής, έχουμε $f \in \mathcal{C}^k[0,1]$. Τέλος,

$$\|f_n - f\| = \max\{\|f_n^{(s)} - f^{(s)}\|_\infty : s = 0, 1, \ldots k\} \to 0.$$

Δηλαδή, $f_n \to f$ στον $\mathcal{C}^k[0,1]$.

25. *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. *Η κύμανση της* f *ορίζεται από την*

$$V(f) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\right\}.$$

Αν $V(f) < +\infty$, *τότε λέμε ότι η* f *έχει φραγμένη κύμανση. Θεωρούμε τον χώρο* $BV[0,1]$ *όλων των συναρτήσεων* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *που έχουν φραγμένη κύμανση, είναι συνεχείς από δεξιά και ικανοποιούν την* $f(0) = 0$. *Αποδείξτε ότι η* $\|f\| = V(f)$ *είναι νόρμα στον* $BV[0,1]$ *και ότι ο* $(BV[0,1], \|\cdot\|)$ *είναι χώρος Banach.*

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι ο $BV[0,1]$ είναι γραμμικός χώρος. Οι ιδιότητες της νόρμας έπονται άμεσα από τον ορισμό. Η υπόθεση ότι $f(0) = 0$ εξασφαλίζει την $V(f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$: από την $V(f) = 0$ συμπεραίνουμε αρχικά ότι η f είναι σταθερή, και αφού $f(0) = 0$ έχουμε ότι η f μηδενίζεται παντού στο $[0,1]$.

Έστω (f_m) βασική ακολουθία στον $BV[0,1]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $s, m \geqslant m_0$ τότε

$$V(f_s - f_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|f_s - f_m\|_\infty \leqslant V(f_s - f_m). \tag{2}$$

Πράγματι, αν $g \in BV[0,1]$ και αν $t \in (0,1]$, θεωρώντας τη διαμέριση $\{0 < t \leqslant 1\}$ βλέπουμε ότι $|g(t)| = |g(t) - g(0)| + |g(1) - g(t)| \leqslant V(g)$, άρα $\|g\|_\infty \leqslant V(g)$.

Από την (2) έπεται ότι η (f_m) είναι βασική ακολουθία στον $B[0,1]$ άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f \in B[0,1]$ (επίσης, η f είναι συνεχής από δεξιά ως ομοιόμορφο όριο συναρτήσεων που είναι συνεχείς από δεξιά). Σταθεροποιώντας $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, $m \geqslant m_0$ και αφήνοντας το $s \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |(f - f_m)(t_i) - (f - f_m)(t_{i-1})| &= \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |(f_s - f_m)(t_i) - (f_s - f_m)(t_{i-1})| \\ &\leqslant \liminf_{s\to\infty} V(f_s - f_m) \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $V(f - f_m) \to 0$ όταν το $m \to \infty$. Ειδικότερα, $V(f) \leqslant V(f - f_{m_0}) + V(f_{m_0}) < \infty$, δηλαδή $f \in BV[0,1]$.

26. *Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$. Συμβολίζουμε με $\Lambda_\alpha([0,1])$ τον χώρο των Hölder συνεχών συναρτήσεων με εκθέτη α: δηλαδή, $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ αν και μόνο αν $f(0) = 0$ και*

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in [0,1],\ x \neq y\right\} < +\infty.$$

(α) *Αποδείξτε ότι ο $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι χώρος Banach.*

(β) *Έστω $\lambda_\alpha([0,1])$ το σύνολο των $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ που ικανοποιούν την*

$$\lim_{x\to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} = 0 \text{ για κάθε } y \in [0,1].$$

Αποδείξτε ότι: αν $0 < \alpha < 1$ τότε ο $\lambda_\alpha([0,1])$ είναι απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του $\Lambda_\alpha([0,1])$. Ποιός είναι ο $\lambda_\alpha([0,1])$ στην περίπτωση $\alpha = 1$;

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$ είναι νόρμα (απλό). Επίσης, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|^\alpha} \leqslant \|f\|_{\Lambda_\alpha},$$

άρα $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{\Lambda_\alpha}$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε βασική ακολουθία (f_n) στον $(\Lambda_\alpha([0,1]), \|\cdot\|_{\Lambda_\alpha})$ είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Ελέγχουμε ότι $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ και $\|f_n - f\|_{\Lambda_\alpha} \to 0$.

Για τον $\lambda_\alpha([0,1])$ παρατηρήστε ότι: αν $0<\alpha<1$ τότε οι $g_n(t)=t^n$ ανήκουν στον $\lambda_\alpha([0,1])$ (άρα έχει άπειρη διάσταση) ενώ αν $f\in\lambda_1([0,1])$ τότε $|f'(x)|=\left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=0$ για κάθε x, άρα η f είναι σταθερή, και λόγω της $f(0)=0$ αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση.

27. *Έστω c_0 ο γραμμικός χώρος των ακολουθιών $x=(\xi_k)$ που συγκλίνουν στο 0. Αν $x=(\xi_k)\in c_0$, υπάρχει μετάθεση των φυσικών $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ώστε η $(|\xi_{\pi(n)}|)$ να είναι φθίνουσα, και η ακολουθία (ξ'_n) με $\xi'_n=|\xi_{\pi(n)}|$ ορίζεται μονοσήμαντα από την (ξ_n).*

Για κάθε $x\in c_0$, ορίζουμε

$$\|x\|=\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{n=1}^{m}\xi'_n : m\in\mathbb{N}\right\},$$

και θέτουμε $d_0=\{x\in c_0:\|x\|<+\infty\}$. Αποδείξτε ότι ο $(d_0,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα. Είναι χώρος Banach;

Υπόδειξη. Ο $(d_0,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα: δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα (ελέγξτε όμως και τα άλλα αξιώματα της νόρμας). Παρατηρήστε ότι, αν $x=(\xi_k),y=(\eta_k)\in d_0$, τότε για κάθε $m\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{m}(x+y)'_k\leqslant\sum_{k=1}^{m}\xi'_k+\sum_{k=1}^{m}\eta'_k.$$

Πράγματι, αν $(x+y)'_k=|\xi_{j_k}+\eta_{j_k}|$ τότε

$$\sum_{k=1}^{m}(x+y)'_k=\sum_{k=1}^{m}|\xi_{j_k}+\eta_{j_k}|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\xi_{j_k}|+\sum_{k=1}^{m}|\eta_{j_k}|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\xi'_k+\sum_{k=1}^{m}\eta'_k,$$

γιατί οποιεσδήποτε m απόλυτες τιμές όρων π.χ. της (ξ_k) έχουν άθροισμα το πολύ ίσο με $\xi'_1+\cdots+\xi'_m$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \sup\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x+y)'_k : m\in\mathbb{N}\right\}\leqslant\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}\xi'_k\right\}+\sup\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}\eta'_k\right\}\\ &= \|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

(β) Ο $(d_0,\|\cdot\|)$ είναι πλήρης: έστω (x^ℓ) βασική ακολουθία στον d_0. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\ell_0\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε: αν $\ell,s\geqslant\ell_0$, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^\ell-x^s)'_k<\varepsilon$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$|\xi^\ell_m-\xi^s_m|\leqslant(x^\ell-x^s)'_1<\varepsilon,$$

δηλαδή $\|x^\ell-x^s\|_\infty<\varepsilon$. Ειδικότερα, η $(\xi^\ell_m)_{\ell\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία για κάθε m και ορίζεται το $\xi_m=\lim\limits_{\ell\to\infty}\xi^\ell_m\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, $\lim\limits_{s\to\infty}\|x^s-x\|_\infty=0$ (από την πληρότητα του ℓ_∞). Θέτουμε

$x = (\xi_m)$ και δείχνουμε ότι $\|x^\ell - x\| \to 0$. Αν μάς δώσουν $\varepsilon > 0$, για το ℓ_0 που ορίσαμε παραπάνω έχουμε: για κάθε $\ell \geqslant \ell_0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $s > \ell_0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^\ell - x)'_k &\leqslant \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^\ell - x^s)'_k + \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^s - x)'_k \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^s - x)'_k \\ &\leqslant \varepsilon + \sqrt{m}\,\|x^s - x\|_\infty.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $s \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^\ell - x)'_k \leqslant \varepsilon$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, άρα

$$\|x^\ell - x\| = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m}(x^\ell - x)'_k : m \in \mathbb{N}\right\} \leqslant \varepsilon$$

για κάθε $\ell \geqslant \ell_0$. Αυτό δείχνει ότι $\|x^\ell - x\| \to 0$.

28. *Ξέρουμε ότι ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Αποδείξτε ότι αν $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, τότε $d(x, c_0) = \limsup_k |\xi_k|$. Είναι πάντα σωστό ότι υπάρχει $y_x \in c_0$ ώστε $d(x, c_0) = \|x - y_x\|$;*

Υπόδειξη. Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_\infty$, και $\alpha = \limsup_k |\xi_k|$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|x - y\|_\infty \geqslant \alpha$ για κάθε $y \in c_0$. Έστω $y = (\eta_k) \in c_0$, και έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\eta_k \to 0$, άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$, $|\eta_k| < \varepsilon$. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει υπακολουθία της $(|\xi_k|)$ που συγκλίνει στο α. Άρα, υπάρχει $k \geqslant k_0$ ώστε $|\,|\xi_k| - \alpha| < \varepsilon$. Τότε,

$$|\xi_k - \eta_k| \geqslant |\xi_k| - |\eta_k| > \alpha - \varepsilon - \varepsilon = \alpha - 2\varepsilon,$$

άρα $\|x - y\|_\infty > \alpha - 2\varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\|x - y\|_\infty \geqslant \alpha$. Αφού το $y \in c_0$ ήταν τυχόν, $d(x, c_0) = \inf\{\|x - y\|_\infty : y \in c_0\} \geqslant \alpha$.

Δείχνουμε τώρα ότι μπορούμε να επιλέξουμε $y_x \in c_0$ τέτοιο ώστε $\|x - y_x\|_\infty = \alpha$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} : |\xi_k| > \alpha + 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

και θέτουμε

$$B_0 = A_1, \quad B_n = A_{n+1} \setminus A_n = \{k \in \mathbb{N} : \alpha + 1/n \geqslant |\xi_k| > \alpha + 1/(n+1)\}.$$

Κάθε A_n είναι πεπερασμένο σύνολο, αλλιώς η $|\xi_k|$ θα είχε υπακολουθία που θα συνέκλινε σε αριθμό μεγαλύτερο από α. Άρα, και κάθε B_n είναι πεπερασμένο. Ορίζουμε $y_x = (\eta_k)$ ως εξής:

(1) Αν $k \in B_n$, θέτουμε $\eta_k = \xi_k + \alpha$ αν $\xi_k < 0$ και $\eta_k = \xi_k - \alpha$ αν $\xi_k > 0$. Σε κάθε περίπτωση, $|\xi_k - \eta_k| = \alpha$ και $|\eta_k| \leqslant \frac{1}{n}$, εκτός ίσως από τα $k \in B_0$, τα οποία όμως είναι πεπερασμένα το πλήθος και δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση της (η_k).

(2) Αν $k \notin \cup B_n$, θέτουμε $\eta_k = 0$, οπότε $|\xi_k - \eta_k| \leqslant \alpha$ αφού γι' αυτά τα k έχουμε $|\xi_k| \leqslant \alpha$.

Όπως ορίσαμε το $y_x = (\eta_k)$, έχουμε $\|x - y_x\|_\infty \leqslant \alpha$. Μένει να δείξουμε ότι $y_x \in c_0$: έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $1/n_0 < \varepsilon$. Αν $k_0 = \max\{k : k \in \cup_{n=0}^{n_0} B_n\}$, τότε για κάθε $k > k_0$ ισχύει $|\eta_k| \leqslant 1/n_0 < \varepsilon$. Άρα, $\eta_k \to 0$, δηλαδή $y_x \in c_0$. Από τα παραπάνω, $\alpha \leqslant d(x, c_0) \leqslant \|x - y_x\|_\infty \leqslant \alpha$, δηλαδή $\|y_x - x\|_\infty = d(x, c_0)$.

29. *Έστω K φραγμένο υποσύνολο του c_0. Αποδείξτε ότι το K είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ ισχύει*

$$|\xi_n| \leqslant \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $x^1, \ldots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leqslant N$ με την ιδιότητα

$$\|x - x^j\|_\infty = \sup\{|\xi_n - \xi_n^j| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon/2.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} |\xi_n^j| = 0$, άρα υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_j$,

$$|\xi_n^j| < \varepsilon/2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leqslant N$ ώστε $\|x - x_j\|_\infty < \varepsilon/2$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$|\xi_n| \leqslant |\xi_n - \xi_n^j| + |\xi_n^j| \leqslant \|x - x^j\|_\infty + |\xi_n^j| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_n) \in K$ να ισχύει

$$|\xi_n| \leqslant \varepsilon.$$

Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon/2$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots) : y_n \in \{t_0, t_1, \ldots, t_m) \text{ για κάθε } n = 1, \ldots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του c_0: κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον c_0, και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο (εξηγήστε γιατί). Έστω $x = (\xi_n)$ στο K. Γνωρίζουμε ότι $|\xi_n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n > n_0$. Επίσης, για κάθε $n = 1, \ldots, n_0$ έχουμε $|\xi_n| \leqslant M$, άρα υπάρχει $i_n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ τέτοιος ώστε $|\xi_n - t_{i_n}| < \varepsilon/2$. Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n_0}}, 0, \ldots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\|x - y\|_\infty \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ (εξηγήστε γιατί).

30. *Έστω* $1 \leqslant p < \infty$ *και* K *κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* ℓ_p. *Αποδείξτε ότι το* K *είναι συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n \geqslant n_0$ *και κάθε* $x = (\xi_k) \in K$ *να ισχύει*

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το K είναι ολικά φραγμένο, μπορούμε να βρούμε $x^1, \ldots, x^N \in K$ ώστε: για κάθε $x \in K$ υπάρχει $j \leqslant N$ με την ιδιότητα

$$\|x - x^j\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, N$ υπάρχει $n_j(\varepsilon)$ ώστε

$$\sum_{k=n_j}^{\infty} |\xi_k^j|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Έστω τώρα $x \in K$. Βρίσκουμε $j \leqslant N$ ώστε $\|x - x_j\|_p^p < (\varepsilon/2)^p$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ γράφουμε

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k^j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι ολικά φραγμένο (ως κλειστό υποσύνολο του ℓ_p θα είναι και πλήρες, άρα συμπαγές). Θα μιμηθούμε το επιχείρημα της προηγούμενης άσκησης. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε την υπόθεση και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x = (\xi_k) \in K$ να ισχύει

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p.$$

Γνωρίζουμε ότι το K είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_p \leqslant M$ για κάθε $x \in K$. Θεωρούμε πεπερασμένη ακολουθία $-M = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = M$ τέτοια ώστε $|t_{i+1} - t_i|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Στη συνέχεια ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots) : y_k \in \{t_0, t_1, \ldots, t_m)\ \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, n_0\}.$$

Το A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του ℓ_p: κάθε $y \in A$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα ανήκει στον ℓ_p, και το πλήθος των στοιχείων του A είναι ίσο με $(m+1)^{n_0}$.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_p < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι ολικά φραγμένο. Έστω $x = (\xi_k)$ στο K. Γνωρίζουμε ότι $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p < (\varepsilon/2)^p$. Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n_0$ έχουμε $|\xi_k| \leqslant M$, άρα υπάρχει $i_k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ τέτοιος ώστε

$|\xi_k - t_{i_n}|^p < \frac{1}{n_0}(\varepsilon/2)^p$. Αν ορίσουμε $y = (t_{i_1}, \ldots, t_{i_{n_0}}, 0, \ldots)$ τότε $y \in A$ και είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$\|x-y\|_p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - t_{i_k}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

31. *Έστω X χώρος Banach και K συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X τέτοια ώστε $x_n \to 0$ και $K \subseteq \overline{\mathrm{conv}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$, όπου $\mathrm{conv}(A)$ είναι η κυρτή θήκη του A (το μικρότερο κυρτό σύνολο το οποίο περιέχει το A - ισοδύναμα, το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών σημείων του A).*

Υπόδειξη. Το K είναι συμπαγές, άρα το $2K$ είναι συμπαγές και ειδικότερα ολικά φραγμένο. Υπάρχει λοιπόν πεπερασμένο σύνολο $A_1 \subseteq 2K$ τέτοιο ώστε

$$2K \subseteq \bigcup_{a \in A_1} B\left(a, \frac{1}{4}\right).$$

Ορίζουμε

$$K_2 = \bigcup_{a \in A_1} \left[-a + 2K \cap \widehat{B}\left(a, \frac{1}{4}\right)\right].$$

Παρατηρήστε ότι

$$K_2 \subseteq \widehat{B}\left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Επίσης, το K_2 είναι συμπαγές (εξηγήστε γιατί), άρα το $2K_2$ είναι συμπαγές και ειδικότερα ολικά φραγμένο. Υπάρχει λοιπόν πεπερασμένο σύνολο $A_2 \subseteq 2K_2$ τέτοιο ώστε

$$2K_2 \subseteq \bigcup_{a \in A_2} B\left(a, \frac{1}{4^2}\right).$$

Ορίζουμε

$$K_3 = \bigcup_{a \in A_2} \left[-a + 2K_2 \cap \widehat{B}\left(a, \frac{1}{4^2}\right)\right],$$

και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Παρατηρήστε ότι

$$K_3 \subseteq \widehat{B}\left(0, \frac{1}{4^2}\right).$$

Στο n-οστό βήμα θεωρούμε το $2K_n$ και το καλύπτουμε με μπάλες ακτίνας $\frac{1}{4^n}$ που έχουν κέντρα από κάποιο πεπερασμένο σύνολο $A_n \subseteq 2K_n$. Ορίζουμε το K_{n+1} όπως παραπάνω και έχουμε

$$K_{n+1} \subseteq \widehat{B}\left(0, \frac{1}{4^n}\right).$$

Έστω $x \in K$. Από την κατασκευή, υπάρχει $a_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $2x - a_1 \in K_2$. Τότε, $4x - 2a_1 \in 2K_2$, άρα υπάρχει $a_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $4x - 2a_1 - a_2 \in K_3$. Ομοίως, $8x - 4a_1 - 2a_2 \in 2K_3$, άρα υπάρχει $a_3 \in A_3$ τέτοιο ώστε $8x - 4a_1 - 2a_2 - a_3 \in K_4$. Οι σχέσεις αυτές μας λένε ισοδύναμα ότι

$$x - \frac{a_1}{2} \in \frac{1}{2}K_2, \quad x - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} \in \frac{1}{2^2}K_3, \quad x - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} - \frac{a_3}{2^3} \in \frac{1}{2^3}K_4, \quad \dots$$

Γενικά,

$$x - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} \in \frac{1}{2^n}K_{n+1},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} \to x \quad \implies \quad \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} \to x.$$

Έπεται ότι $x \in \overline{\mathrm{conv}}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots)$. Θεωρούμε την ακολουθία (x_m) που προκύπτει αν πάρουμε σαν πρώτους όρους τα σημεία του A_1, επόμενους τα σημεία του A_2, επόμενους τα σημεία του A_3 και ούτω καθεξής. Από την κατασκευή, έχουμε

$$a \in A_n \quad \implies \quad a \in 2K_n \quad \implies \quad \|a\| \leqslant \frac{2}{4^n},$$

άρα $x_m \to 0$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Κεφάλαιο 2

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

1. *Έστω* $\|\cdot\|$ *και* $\|\cdot\|'$ *δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο* X*. Να δείξετε ότι αν* (x_n) *είναι μια ακολουθία στοιχείων του* X *και* $x \in X$*, τότε* $\|x_n - x\| \to 0$ *αν και μόνο αν* $\|x_n - x\|' \to 0$*.*

Υπόδειξη. Άμεσο, αφού υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant b\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Για παράδειγμα, αν $\|x_n - x\|' \to 0$ τότε

$$0 \leqslant \|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{a}\|x_n - x\|' \to 0,$$

άρα $\|x_n - x\| \to 0$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή έπεται όμοια από την $\|x_n - x\|' \leqslant b\|x_n - x\|$.

2. *Έστω* $\|\cdot\|$ *και* $\|\cdot\|'$ *δύο ισοδύναμες νόρμες στον γραμμικό χώρο* X*. Αποδείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός* $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$*. Δηλαδή, η* f *είναι συνεχής, ένα προς ένα και επί, και η* f^{-1} *είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, άρα υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε $a\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant b\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Ορίζουμε $f : B_{(X,\|\cdot\|)} \to B_{(X,\|\cdot\|')}$ με $f(\vec{0}) = \vec{0}$ και

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x, \qquad x \neq \vec{0}.$$

(α) Η f είναι καλά ορισμένη: αν $x \in B_{(X,\|\cdot\|)}$, $x \neq \vec{0}$, τότε $\|x\| \leqslant 1$ άρα

$$\|f(x)\|' = \frac{\|x\|}{\|x\|'}\|x\|' = \|x\| \leqslant 1,$$

δηλαδή $f(x) \in B_{(X,\|\cdot\|')}$. Αν $x = \vec{0}$, τότε $f(x) = \vec{0} \in B_{(X,\|\cdot\|')}$.

(β) Δείχνουμε πρώτα τη συνέχεια της f: αν $x_n \to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|$ και $x_0 \neq \vec{0}$, τότε από την ισοδυναμία των νορμών παίρνουμε $\|x_n\| \to \|x_0\|$, $x_n \to x_0$ ως προς την $\|\cdot\|'$ (γιατί;) και $\|x_n\|' \to \|x_0\|' > 0$, οπότε από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού ως προς την $\|\cdot\|'$ συμπεραίνουμε ότι

$$f(x_n) = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'}x_n \to \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|'}x_0 = f(x_0)$$

ως προς την $\|\cdot\|'$.

Αν $\|x_n\| \to 0$ τότε $\|x_n\|' \to 0$ από την ισοδυναμία των νορμών, και $\|x_n\|/\|x_n\|' \leqslant 1/a$ αν $x_n \neq \vec{0}$ ή $f(x_n) = \vec{0}$ αν $x_n = \vec{0}$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\|f(x_n)\|' \leqslant \frac{1}{a}\|x_n\|' \leqslant \frac{b}{a}\|x_n\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to \vec{0} = f(\vec{0})$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής.

(γ) Η f είναι επί: αν $y \neq \vec{0}$ και $\|y\|' \leqslant 1$, τότε το $x = (\|y\|'/\|y\|)y$ έχει νόρμα $\|x\| = \|y\|' \leqslant 1$ και (ελέγξτε το)

$$f(x) = \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = y.$$

(δ) Η f είναι ένα προς ένα: αν $f(x) = f(x_1)$ και $x \neq \vec{0}$, τότε $x_1 \neq \vec{0}$ (γιατί;) και

$$(*) \qquad \frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{\|x_1\|}{\|x_1\|'}x_1.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα x, x_1 είναι συγγραμμικά και μάλιστα $x = tx_1$, $t > 0$. Άρα, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\|x\|}{\|x\|'}x = \frac{t\|x\|}{t\|x\|'}tx \Longrightarrow x = tx \Longrightarrow t = 1,$$

οπότε $x_1 = x$. Αν πάλι $x = \vec{0}$ και $f(x_1) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, είναι φανερό ότι $x_1 = \vec{0} = x$.

(ε) Η $f^{-1} : B_{(X,\|\cdot\|')} \to B_{(X,\|\cdot\|)}$ ορίζεται από την

$$f^{-1}(y) = \frac{\|y\|'}{\|y\|}y.$$

Όπως στο (β) δείχνουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής. Άρα, η f είναι ομοιομορφισμός.

3. (α) *Αποδείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < q < +\infty$, ο ℓ_p περιέχεται γνήσια στον ℓ_q, και ο ℓ_q περιέχεται γνήσια στον c_0.*

(β) *Εξετάστε αν οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_q$ είναι ισοδύναμες στον ℓ_p ($p < q$).*

(γ) *Εξετάστε αν ισχύει $c_0 = \bigcup_{1\leqslant p<+\infty} \ell_p$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (\xi_k) \in \ell_p$. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p < +\infty$, άρα $|\xi_k| \to 0$. Για μεγάλα k έχουμε $0 \leqslant |\xi_k| < 1$ και αφού $p < q$ βλέπουμε ότι $0 \leqslant |\xi_k|^q \leqslant |\xi_k|^p$. Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^q < +\infty$, δηλαδή $x \in \ell_q$. Άρα, $\ell_p \subseteq \ell_q$.

Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Το $x = (1/k^{1/p}) \in \ell_q \setminus \ell_p$ (γιατί;).

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (n μονάδες και μετά μηδενικά). Τότε,

$$\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_q} = \frac{n^{1/p}}{n^{1/q}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$. Δηλαδή, δεν υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_p \leqslant b\|x\|_q$ για κάθε $x \in \ell_p$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, οι δύο νόρμες δεν είναι ισοδύναμες.

(γ) Παίρνουμε $\xi_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\xi_k \to 0$ όταν $k \to \infty$, όμως το κριτήριο συμπύκνωσης δείχνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(k+1)]^p} = +\infty$$

για κάθε $p \geqslant 1$. Άρα $x = \left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0 \setminus \cup_{p\geqslant 1} \ell_p$.

4. *Στον χώρο $\mathcal{C}[0,1]$ θεωρούμε τη συνήθη νόρμα $\|f\| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε το σύνολο*

$$\{g \in K : \|f - g\| = d(f, K)\}.$$

(α) K *είναι το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων,* f *τυχούσα στον* $\mathcal{C}[0,1]$.
(β) $K = \{ax : a \in \mathbb{R}\}$, f *σταθερή.*
(γ) $K = \{g \in \mathcal{C}[0,1] : \ g \geqslant 0, \ \int_0^1 g(t)dt \geqslant g(0) + 1\}$, $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $f \in \mathcal{C}[0,1]$ και $M = \max\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $m = \min\{f(t) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_0 \in K$ με $g_0(x) = \frac{M+m}{2}$ στο $[0,1]$. Τότε,

$$\|f - g_0\| = \max\left\{\left|f(x) - \frac{M+m}{2}\right| : x \in [0,1]\right\} = \max\left\{M - \frac{M+m}{2}, \frac{M+m}{2} - m\right\} = \frac{M-m}{2}.$$

Αν $g \in K$, τότε $g(x) = c \in \mathbb{R}$ στο $[0,1]$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) $c < m \Longrightarrow \|f - g\| = M - c > M - m \geqslant \frac{M-m}{2}$.

(ii) $c > M \Longrightarrow \|f - g\| = c - m > M - m \geqslant \frac{M-m}{2}$.

(iii) $m \leqslant c \leqslant M \Longrightarrow \|f - g\| = \max\{M - c, c - m\} \geqslant \frac{M-m}{2}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\|f-g\| \geqslant \frac{M-m}{2} = \|f-g_0\|$. Συνεπώς, $d(f, K) = \frac{M+m}{2} = d(f, g_0)$.

(β) Έστω $f(x) = c$, $x \in [0,1]$. Τότε, για κάθε $g(x) = ax$ στο K έχουμε $\|f-g\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |c - ax| \geqslant |c|$ και για την $g_0 \equiv 0$ έχουμε $g_0 \in K$ και $\|f - g_0\| = |c|$. Συνεπώς, $d(f, K) = |c|$. Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $c \geqslant 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $0 \leqslant a \leqslant 2c$ (και μόνον αυτές, εξηγήστε γιατί) ικανοποιούν την $\|f - g\| = c = d(f, K)$.

(ii) Αν $c < 0$, τότε όλες οι $g(x) = ax$ με $2c \leqslant a \leqslant 0$ (και μόνο αυτές, εξηγήστε γιατί) ικανοποιούν την $\|f - g\| = |c| = d(f, K)$.

(γ) Αν $g \in K$, τότε $\|g - f\| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |g(x)| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x)$. Όμως,

$$(*) \qquad 1 \leqslant g(0) + 1 \leqslant \int_0^1 g(t)dt \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$

Άρα $\|g - f\| \geqslant 1$, και αφού η $g \in K$ ήταν τυχούσα, $d(f, K) \geqslant 1$. Έστω ότι υπάρχει $g \in K$ για την οποία $\|g - f\| = 1$. Τότε έχουμε ισότητα στην $(*)$, άρα $0 \leqslant g \leqslant 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = g(0) + 1 = 1$, οπότε η g είναι συνεχής συνάρτηση με $g(0) = 0$, $0 \leqslant g \leqslant 1$ και $\int_0^1 g(t)dt = 1$, το οποίο είναι άτοπο (γιατί;).

Από την άλλη πλευρά, $d(f,K)=1$. Πράγματι, για κάθε μικρό $\varepsilon>0$ ορίζουμε g_ε με $g_\varepsilon(0)=0$, $g\equiv 1+\delta$ στο $[\varepsilon,1]$ και g_ε γραμμική στο $[0,\varepsilon]$. Αν $\delta=\frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}$, τότε $\int_0^1 g_\varepsilon(t)dt=1$. Άρα, $g_\varepsilon\in K$ και

$$\|g-f\|=1+\delta=1+\frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}.$$

Έπεται ότι

$$d(f,K)\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(1+\frac{\varepsilon/2}{1-(\varepsilon/2)}\right)=1.$$

Άρα $d(f,K)=1$, αλλά δεν υπάρχει $g\in K$ με την ιδιότητα $\|f-g\|=d(f,K)$.

5. *Αποδείξτε την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Riesz: αν ο Y είναι υπόχωρος του X που έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x\in X$ με $\|x\|=1$ και $d(x,Y)=1$.*

Υπόδειξη. Έστω $v\in X\setminus Y$. Αφού ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, είναι κλειστός υπόχωρος του X, και αφού $v\notin Y$ έχουμε $d(v,Y)=a>0$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_n\in Y$ με την ιδιότητα

$$a\leqslant\|v-y_n\|<a+\frac{1}{n}$$

(θυμηθείτε τον ορισμό της $d(v,Y)$). Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\|y_n-y_1\|\leqslant\|y_n-v\|+\|v-y_1\|<2a+1+\frac{1}{n}\leqslant 2a+2.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (y_n) περιέχεται στην $\widehat{B}(y_1,2a+2)$ που είναι συμπαγές σύνολο γιατί ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (y_{k_n}) της (y_n) με $y_{k_n}\to y\in Y$.

Τότε, $\|v-y\|=\lim\|v-y_n\|=a$. Δηλαδή, υπάρχει πλησιέστερο προς το v σημείο του Y. Συνεχίζουμε όπως στην απόδειξη του Λήμματος του Riesz. Ορίζουμε $x=\frac{1}{a}(v-y)$. Τότε $\|x\|=1$ και για κάθε $z\in Y$

$$\|x-z\|=\left\|\frac{v-y}{a}-z\right\|=\left\|\frac{v-(y+az)}{a}\right\|=\frac{\|v-(y+az)\|}{a}\geqslant\frac{d(v,Y)}{a}=1,$$

γιατί $y+az\in Y$ (ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X). Δείξαμε ότι $d(x,Y)\geqslant 1$ και αφού $d(x,Y)\leqslant\|x-\vec{0}\|=\|x\|=1$, συμπεραίνουμε ότι $d(x,Y)=1$.

6. *Έστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ και ένα $\varepsilon>0$.*

(α) *Έστω $x_1,x_2,\dots,x_k\in B_X$ με την ιδιότητα $\|x_i-x_j\|\geqslant\varepsilon$ αν $i\neq j$. Να δείξετε ότι $k\leqslant(1+2/\varepsilon)^n$.*

Υπόδειξη: *Οι μπάλες $B(x_i,\varepsilon/2)$ περιέχονται στην $B(0,1+\varepsilon/2)$ και είναι ξένες ανά δύο.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon-$δίκτυο για την B_X με πληθάριθμο $N\leqslant(1+2/\varepsilon)^n$.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τις μπάλες $B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$, $i=1,\dots,k$. Αν V είναι ο όγκος της $B(0,1)$, τότε ο όγκος της $B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$ είναι $V(\frac{\varepsilon}{2})^n$ για κάθε $i=1,\dots,k$.

Αφού $i\neq j\Rightarrow\|x_i-x_j\|\geqslant\varepsilon$, οι $B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$ είναι ξένες, άρα η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^k B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$ έχει όγκο

$$U=k\cdot V\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $y \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ για κάποιο $i \leqslant k$, τότε $\|y\| \leqslant \|x_i\| + \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή

$$\bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) B(0,1).$$

Έπεται ότι

$$k \cdot V\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = U \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n V,$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο.

(β) Θεωρούμε την κλάση όλων των συνόλων $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset B_X$, $k \in \mathbb{N}$, που ικανοποιούν την $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| \geqslant \varepsilon$. Από το (α) κάθε τέτοιο σύνολο έχει πλήθος στοιχείων το πολύ ίσο με $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$, άρα ανάμεσά τους υπάρχει κάποιο με μέγιστο πληθάριθμο. Παίρνουμε ένα τέτοιο $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Τότε, το $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι ε-δίκτυο για την B_X: αν υπήρχε $y \in B_X$ με $\|y - x_i\| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $i \leqslant k$, τότε το $\{y, x_1, \ldots, x_k\}$ θα ήταν στην κλάση μας και θα είχε περισσότερα από k στοιχεία.

Από την κατασκευή και το (α), το ε-δίκτυο που φτιάξαμε έχει το πολύ $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^n$ στοιχεία.

7. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.*

(α) *Αποδείξτε ότι υπάρχουν* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in B_X$ *ώστε* $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ *και τα* $x_n + \frac{1}{4}B_X$ *να είναι ξένα.*

(β) *Το ερώτημα απαιτεί κάποια γνώση Θεωρίας Μέτρου. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει μέτρο Borel* μ *στον X που να ικανοποιεί τα εξής:*

(i) *Το* μ *είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή* $\mu(x + A) = \mu(A)$ *για κάθε* $x \in X$ *και κάθε Borel υποσύνολο A του X.*

(ii) $\mu(A) > 0$ *για κάθε ανοικτό, μη κενό* $A \subseteq X$.

(iii) *Υπάρχει μη κενό ανοικτό* $A_0 \subseteq X$ *με* $\mu(A_0) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Από το Λήμμα του Riesz μπορούμε να βρούμε $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ στην B_X με την ιδιότητα $\|y_n - y_m\| > \frac{2}{3}$ αν $n \neq m$. Θέτουμε $x_n = \frac{3y_n}{4}$. Τότε, $x_n + \frac{1}{4}B_X \subseteq B_X$ (εξηγήστε γιατί) και τα $x_n + \frac{1}{4}B_X$ είναι ξένα: αν, για κάποια $n \neq m$, υπήρχε $y \in X$ με $\|y - x_n\| \leqslant \frac{1}{4}$ και $\|y - x_m\| \leqslant \frac{1}{4}$, τότε θα είχαμε $\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{2}$, οπότε $\|y_n - y_m\| = \frac{4}{3}\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{2}{3}$, το οποίο είναι άτοπο.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μέτρο μ το οποίο ικανοποιεί τα (i)–(iii). Το A_0 είναι ανοιχτό, επομένως υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x_0, r) \subset A_0$. Από τα (ii) και (iii) βλέπουμε ότι $0 < \mu(B(x_0, r)) < \infty$. Αφού το μ είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, έπεται ότι $0 < \mu(B(0, r)) < \infty$. Εφαρμόζοντας το (α) μπορούμε να βρούμε $x_n \in B(0, r)$ ώστε οι μπάλες $B(x_n, r/5)$ να είναι ξένες και να περιέχονται στην $B(0, r)$. Χρησιμοποιώντας πάλι τα (i) και (ii) βλέπουμε ότι υπάρχει $t > 0$ ώστε $\mu(B(x_n, r/5)) = t$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως τότε,

$$+\infty > \mu(B(0,r)) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r/5)\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(x_n, r/5)) = \sum_{n=1}^{\infty} t.$$

Αυτό είναι άτοπο.

8. *Αποδείξτε ότι ένας χώρος με νόρμα είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνο αν περιέχει συμπαγές σύνολο με μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. Έστω X χώρος με νόρμα. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Γνωρίζουμε τότε ότι η B_X είναι συμπαγές σύνολο και ότι

$$\mathrm{int}(B_X) = B(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\} \neq \emptyset.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $K \subseteq X$ συμπαγές, με $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $B(x_0, r) \subseteq K$. Αν ορίσουμε $K_1 = -x_0 + K$ τότε

$$B(0,r) = -x_0 + B(x_0, r) \subseteq -x_0 + K = K_1.$$

Έπεται ότι

$$B(0,1) = \frac{1}{r}B(0,r) \subseteq \frac{1}{r}K_1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το σύνολο $\frac{1}{r}K_1$ είναι συμπαγές. Αρχικά, η συνάρτηση $f : X \to X$ με $f(y) = -x_0 + y$ είναι συνεχής, και αφού το K είναι συμπαγές βλέπουμε ότι το $K_1 = -x_0 + K = f(K)$ είναι συμπαγές. Έπειτα, η συνάρτηση $g : X \to X$ με $g(y) = \frac{1}{r}y$ είναι συνεχής, και αφού το K_1 είναι συμπαγές βλέπουμε ότι το $\frac{1}{r}K_1$ είναι συμπαγές.

Τώρα, αφού $B(0,1) \subseteq \frac{1}{r}K_1$ και το $\frac{1}{r}K_1$ είναι κλειστό, βλέπουμε ότι

$$B_X = \overline{B(0,1)} \subseteq \frac{1}{r}K_1,$$

άρα η B_X, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου, είναι συμπαγής. Αναγκαστικά, ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

9. *Έστω X χώρος Banach. Αν $B_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου κάθε A_n είναι συμπαγές υποσύνολο του X, αποδείξτε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

Υπόδειξη. Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε το σύνολο $B_{n,k} := kA_n$. Παρατηρούμε (δείτε και την προηγούμενη άσκηση) ότι κάθε $B_{n,k}$ είναι συμπαγές. Επίσης, η οικογένεια $\{B_{n,k} : n,k \geqslant 1\}$ είναι αριθμήσιμη.

Γράφουμε

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_X = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} kA_n = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} B_{n,k}.$$

Από την δεύτερη μορφή του θεωρήματος Baire μπορούμε να βρούμε $n_0, k_0 \geqslant 1$ ώστε το σύνολο B_{n_0,k_0} να έχει μη κενό εσωτερικό. Αφού το B_{n_0,k_0} είναι συμπαγές, εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.

10. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται ισοπλευρικό αν υπάρχει $a > 0$ ώστε $\|x - y\| = a$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε κάθε ισοπλευρικό υποσύνολό του είναι πεπερασμένο.*

(β) *Στον ℓ_∞^n υπάρχει ισοπλευρικό σύνολο με 2^n στοιχεία.*

(γ) *Στον ℓ_p^n, όπου $n \geqslant 2$ και $p > 1$, υπάρχει ισοπλευρικό σύνολο με $n+1$ στοιχεία.*

Για το (γ) δοκιμάστε το $\{e_1, \ldots, e_n, r(e_1 + \cdots + e_n)\}$ για κατάλληλο $r \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση και περιέχει άπειρο ισοπλευρικό σύνολο. Τότε υπάρχουν άπειρη ακολουθία (x_n) στον X και $a > 0$ ώστε: αν $m \neq n$ τότε $\|x_n - x_m\| = a$. Παρατηρούμε ότι η (x_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\widehat{B}(x_1, a)$ (η συμπάγεια έπεται από την υπόθεση ότι $\dim(X) < \infty$) άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Αυτό οδηγεί σε άτοπο: η (x_{k_n}) θα ήταν βασική, άρα θα μπορούσαμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > n \geqslant n_0$ να ισχύει $\|x_{k_m} - x_{k_n}\| < \frac{a}{2}$ ενώ ταυτόχρονα $\|x_{k_m} - x_{k_n}\| = a$.

(β) Θεωρούμε το $A = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_j \in \{0,1\}\}$. Το A έχει 2^n στοιχεία και είναι ισοπλευρικό υποσύνολο του ℓ_∞^n: αν $a, a' \in A$ και $a \neq a'$ τότε

$$\|a - a'\|_\infty = \max\{|a_j - a_j'| : j = 1, \ldots, n\} = 1$$

(εξηγήστε γιατί).

(γ) Για κάθε $r > 0$ θεωρούμε το σύνολο $A_r = \{e_1, \ldots, e_n, r(e_1 + \cdots + e_n)\}$, το οποίο έχει $n+1$ σημεία (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $n \geqslant 2$, άρα $\frac{1}{r}(e_1 + \cdots + e_n) \neq e_j$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$). Παρατηρούμε ότι αν $1 \leqslant i, j \leqslant n$ και $i \neq j$ τότε

$$\|e_i - e_j\|_p^p = 2,$$

ενώ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$ ισχύει

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{r}(e_1 + \cdots + e_n) - e_j\right\|_p^p &= \left\|\left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{r} - 1, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)\right\|_p^p \\ &= (n-1)\frac{1}{r^p} + |1-r|^p \frac{1}{r^p} = \frac{(n-1) + |1-r|^p}{r^p}.\end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $g(r) = 2r^p - (n-1) - |1-r|^p$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty}(2r^p - (n-1) - (r-1)^p) = +\infty$ και $g(0) = -(n-1) - 1 < 0$. συνεπώς, υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιος ώστε $g(r_0) = 0$, δηλαδή

$$2 = \frac{(n-1) + |1-r|^p}{r^p}.$$

Έπεται ότι το A_{r_0} είναι ισοπλευρικό υποσύνολο του ℓ_p^n με $n+1$ στοιχεία.

Κεφάλαιο 3

Γραμμικοί τελεστές και γραμμικά συναρτησοειδή

1. *Ορίζουμε* $T : \ell_2 \to \ell_2$ *τον τελεστή της αριστερής μετατόπισης ως εξής: για κάθε* $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$, *θέτουμε* $Tx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

(α) *Αποδείξτε ότι ο* T *ορίζεται καλά, και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

(β) *Ορίζουμε* $T_n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ *(*n *φορές). Βρείτε την* $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, *και το* $\lim_n \|T_n\|$.

(γ) *Αν* $x \in \ell_2$, *βρείτε το* $\lim_n \|T_n x\|$.

Υπόδειξη. (α) Ο T ορίζεται καλά, γιατί

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \|x\|_2^2 < +\infty,$$

δηλαδή $Tx \in \ell_2$. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(β) Επαγωγικά δείχνουμε ότι $T_n x = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$. Για τη νόρμα του T_n έχουμε $\|T_n\| \leqslant \|T\| \cdots \|T\| = \|T\|^n \leqslant 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί

$$\|T_n\| \geqslant \frac{\|T_n e_{n+1}\|_2}{\|e_{n+1}\|_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ειδικότερα, $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = 1$.

(γ) Αν $x \in \ell_2$, τότε $\|T_n x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2} \to 0$ όταν $n \to \infty$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς). Δηλαδή, $T_n x \to \vec{0}$ για κάθε $x \in \ell_2$.

2. *Ορίζουμε* $F : \ell_1 \to \mathbb{R}$ *με* $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$. *Αποδείξτε ότι το* F *είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι φραγμένο; Αν ναι, ποιά είναι η νόρμα του;*

Υπόδειξη. Αν $x \in \ell_1$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ συγκλίνει απολύτως άρα συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι το F είναι καλά ορισμένο. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα:

$$F(ax + by) = \sum_{k=1}^{\infty} (a\xi_k + b\eta_k) = a \sum_{k=1} \xi_k + b \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = aF(x) + bF(y).$$

Έχουμε

$$|F(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1,$$

άρα το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 1$. Ισχύει ισότητα, γιατί αν $\xi_k \geqslant 0$ τότε

$$|F(x)| = F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_1.$$

3. *Έστω* $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$, *με* $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \in [0,1]$.

(α) *Αποδείξτε ότι ο* T *είναι φραγμένος, γραμμικός και ένα προς ένα τελεστής.*

(β) *Βρείτε την εικόνα* $\mathcal{R}(T)$ *του* T.

(γ) *Είναι ο* $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{C}[0,1]$ *φραγμένος;*

(δ) *Βρείτε την* $\|T\|$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$|(Tf)(t)| = \left|\int_0^t f(s)ds\right| \leqslant \int_0^t |f(s)|ds \leqslant \|f\| \int_0^t ds = \|f\| \cdot t \leqslant \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |(Tf)(t)| \leqslant \|f\|.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Για την γραμμικότητα του T παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}[T(af + bg)](t) &= \int_0^t (af(s) + bg(s))ds = a\int_0^t f(s)ds + b\int_0^t g(s)ds \\ &= a(Tf)(t) + b(Tg)(t) = [a(Tf) + b(Tg)](t),\end{aligned}$$

άρα $T(af + bg) = a(Tf) + b(Tg)$. Η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, αφού $(Tf)' = f$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι καλά ορισμένος, αλλά και ότι είναι ένα προς ένα:

$$Tf = Tg \Longrightarrow (Tf)' = (Tg)' \Longrightarrow f = g.$$

(β) Όπως παρατηρήσαμε στο (α) η Tf είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $(Tf)(0) = 0$. Αυτές είναι ακριβώς οι συναρτήσεις που ανήκουν στην εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T. Πράγματι, αν $g \in \mathcal{C}^1[0,1]$ και $g(0) = 0$, θεωρούμε την $f = g' \in \mathcal{C}[0,1]$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds = \int_0^t g'(s)ds = g(t) - g(0) = g(t),$$

δηλαδή, $Tf = g$.

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $f_n(t) = t^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και $f_n(0) = 0$. Από το (β), $f_n \in \mathcal{R}(T)$ και $[T^{-1}(f_n)](t) = f'_n(t) = nt^{n-1}$. Άρα,

$$\frac{\|T^{-1}(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{1} = n$$

(γιατί;). Έπεται ότι ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος: αν ήταν, θα είχαμε $\|T^{-1}\| \geqslant n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (γιατί;).

(δ) Αν πάρουμε $f \equiv 1$ στο $[0,1]$, τότε $\|f\| = 1$ και $(Tf)(t) = \int_0^t ds = t$. Άρα,

$$\|T\| \geqslant \|Tf\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t| = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\|T\| = 1$.

4. *Στον $\mathcal{C}[-1,1]$ ορίζουμε $\|f\| = \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Υπολογίστε τις νόρμες των παρακάτω συναρτησοειδών $F : \mathcal{C}[-1,1] \to \mathbb{R}$:*

(α) $F(g) = \int_{-1}^1 g(s)ds - g(0)$.

(β) $F(g) = \frac{g(1/2)+g(-1/2)-2g(0)}{2}$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $g \in \mathcal{C}[0,1]$ έχουμε

$$|F(g)| = \left| \int_{-1}^1 g(s)ds - g(0) \right| \leqslant \int_{-1}^1 |g(s)|ds + |g(0)| \leqslant 2\|g\| + \|g\| = 3\|g\|.$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 3$. Για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $g_\varepsilon \in \mathcal{C}[-1,1]$ θέτοντας $g_\varepsilon \equiv 1$ στα $[-1,-\varepsilon]$ και $[\varepsilon,1]$, $g_\varepsilon(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-\varepsilon,0]$ και $[0,\varepsilon]$. Τότε $\|g_\varepsilon\| = 1$ και

$$\begin{aligned}
\|F\| \geqslant |F(g_\varepsilon)| &= |\int_{-1}^1 g_\varepsilon(s)ds + 1| \\
&= \left| \int_{-1}^{-\varepsilon} ds + \int_{-\varepsilon}^0 g_\varepsilon(s)ds + \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(s)ds + \int_\varepsilon^1 ds + 1 \right| \\
&= |(1-\varepsilon) + 0 + 0 + (1-\varepsilon) + 1| = 3 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε μικρό $\varepsilon > 0$, βλέπουμε ότι

$$\|F\| \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0^+} (3 - 2\varepsilon) = 3.$$

Άρα, $\|F\| = 3$.

(β) Για κάθε $g \in \mathcal{C}[0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|F(g)| &= \left| \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0) \right| \leqslant \frac{|g(1/2)|}{2} + \frac{|g(-1/2)|}{2} + |g(0)| \\
&\leqslant \frac{\|g\|}{2} + \frac{\|g\|}{2} + \|g\| = 2\|g\|.
\end{aligned}$$

Άρα, το F είναι φραγμένο και $\|F\| \leqslant 2$. Ορίζουμε $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ θέτοντας $g \equiv 1$ στα $[-1,-1/2]$ και $[1/2,1]$, $g(0) = -1$ και επεκτείνοντας γραμμικά στα $[-1/2,0]$ και $[0,1/2]$. Τότε $\|g\| = 1$ και

$$\|F\| \geqslant |F(g)| = \left|\frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(-1/2)}{2} - g(0)\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1)\right| = 2.$$

Άρα, $\|F\| = 2$.

5. *Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση* $f : c_0 \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, *όπου* $x = (x_k) \in c_0$. *Αποδείξτε ότι* $f \in c_0^*$ *και υπολογίστε την* $\|f\|$.

Υπόδειξη. Έστω $x = (x_k) \in c_0$. Παρατηρούμε ότι, αφού $|x_k| \leqslant \|x\|_\infty$ για κάθε k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leqslant \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\|x\|_\infty < \infty,$$

άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ συγκλίνει απολύτως και

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{3^k} \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_\infty.$$

Έπεται ότι $f \in c_0^*$ και $\|f\| \leqslant \frac{1}{2}$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1,\dots,1,0,\dots) \in c_0$ (οι πρώτες N συντεταγμένες του x_N είναι ίσες με 1 και οι υπόλοιπες ίσες με 0). Έχουμε $\|x_N\|_\infty = 1$, άρα

$$\|f\| \geqslant |f(x_N)| = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^N}{1 - \frac{1}{3}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Έπεται ότι $\|f\| \geqslant \frac{1}{2}$. Άρα, τελικά, $\|f\| = \frac{1}{2}$.

6. *Αποδείξτε ότι οι γραμμικοί τελεστές* $S, T : \ell_1 \to \ell_1$ *με* $S(x) = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ *και* $T(x) = x + S(x)$ *είναι φραγμένοι και υπολογίστε τη νόρμα τους.*

Υπόδειξη. Έστω $x = (x_k)_{k\geqslant 1} \in \ell_1$. Έχουμε $S(x) = (x_2, x_3, \dots)$, άρα

$$\|S(x)\|_1 = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_1.$$

Έπεται ότι ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leqslant 1$. Θεωρώντας το $e_2 = (0,1,0,\dots)$ παρατηρούμε ότι $S(e_2) = e_1$ και $\|e_2\|_1 = 1$, άρα

$$\|S\| \geqslant \|S(e_2)\|_1 = \|e_1\|_1 = 1.$$

Συνεπώς, $\|S\| = 1$.

Για τον T παρατηρούμε ότι $\|T(x)\|_1 = \|x + S(x)\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|S(x)\|_1 \leqslant 2\|x\|_1$, άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 2$. Αν $x = (x_k)$ με $x_1 = 0$, $x_k \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 1$ και $\|x\|_1 = \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 1$, έχουμε

$$\|T\| \geqslant \|T(x)\|_1 = \|(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + x_{k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \sum_{k=2}^{\infty} x_k = 2\sum_{k=2}^{\infty} x_k = 2.$$

Έπεται ότι $\|T\| = 2$.

7. *Έστω* X *ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με νόρμα την* $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. *Ορίζουμε* $T : X \to X$, *με* $(Tf)(t) = f(t-a)$, *όπου* $a > 0$ *δοσμένη σταθερά. Είναι ο* T *γραμμικός; Φραγμένος;*

Υπόδειξη. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}[T(\lambda f + \mu g)](t) &= (\lambda f + \mu g)(t-a) = \lambda f(t-a) + \mu g(t-a) \\ &= \lambda (Tf)(t) + \mu (Tg)(t) = [\lambda Tf + \mu Tg](t),\end{aligned}$$

άρα $T(\lambda f + \mu g) = \lambda Tf + \mu Tg$, δηλαδή ο T είναι γραμμικός. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = |f(t-a)| \leqslant \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s)| = \|f\|,$$

άρα

$$\|Tf\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(Tf)(t)| \leqslant \|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος.

8. *Ορίζουμε* $T, S : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ *με*

$$(Tf)(t) = t\int_0^1 f(s)ds \quad , \quad (Sf)(t) = tf(t).$$

(α) *Αποδείξτε ότι οι* T, S *είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.*
(β) *Βρείτε τους* $T \circ S$ *και* $S \circ T$. *Είναι σωστό ότι* $T \circ S = S \circ T$*;*
(γ) *Υπολογίστε τις* $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ *και* $\|S \circ T\|$.

Υπόδειξη. (α) Η γραμμικότητα των T και S ελέγχεται εύκολα. Επίσης,

$$|(Tf)(t)| = \left| t\int_0^1 f(s)ds \right| \leqslant t\int_0^1 |f(s)|ds \leqslant t\|f\| \int_0^1 ds = t\|f\| \leqslant \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Tf\| \leqslant \|f\|$. Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Όμοια,

$$|(Sf)(t)| = |tf(t)| = t|f(t)| \leqslant 1 \cdot \|f\| = \|f\|$$

για κάθε $t \in [0,1]$, άρα $\|Sf\| \leqslant \|f\|$. Δηλαδή, ο S είναι φραγμένος και $\|S\| \leqslant 1$.

(β) Έχουμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = t\int_0^1 (Sf)(s)ds = t\int_0^1 sf(s)ds,$$

και

$$[(S \circ T)(f)](t) = t(Tf)(t) = t^2 \int_0^1 f(s)ds.$$

Δεν ισχύει ότι $T \circ S = S \circ T$. Αν ίσχυε, για την $f \equiv 1$ θα παίρναμε

$$[(T \circ S)(f)](t) = [(S \circ T)(f)](t) \Longrightarrow t\int_0^1 s\,ds = t^2\int_0^1 ds \Longrightarrow \frac{t}{2} = t^2$$

για κάθε $t \in [0,1]$, το οποίο προφανώς δεν ισχύει.

(γ) Όπως στο (α), ελέγχουμε ότι $\|T \circ S\| \leqslant 1/2$ και $\|S \circ T\| \leqslant 1$. Παίρνοντας $f \equiv 1$, βλέπουμε ότι ισχύουν ισότητες:

$$\|T\| = \|S\| = \|S \circ T\| = 1, \quad \|T \circ S\| = \frac{1}{2}.$$

Επαληθεύστε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς.

9. *Θεωρούμε το τρίγωνο* $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant x\}$, *και μια συνεχή συνάρτηση* $\phi : \Delta \to \mathbb{R}$. *Ορίζουμε* $T : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ *με*

$$(Tf)(x) = \int_a^x \phi(x,y)f(y)dy.$$

Αποδείξτε ότι ο T *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και*

$$\|T\| \leqslant (b-a)\max\{|\phi(x,y)| : (x,y) \in \Delta\}.$$

Υπόδειξη. Η Tf είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή ο T ορίζεται καλά: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta < \varepsilon$) τέτοιος ώστε αν $(x,y),(x_1,y_1) \in \Delta$ και $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} < \delta$ να έχουμε $|\phi(x,y) - \phi(x_1,y_1)| < \varepsilon$.

Ειδικότερα, αν $x < x_1$ και $x_1 - x < \delta$ και $(x,y),(x_1,y) \in \Delta$, τότε $|\phi(x,y) - \phi(x_1,y)| < \varepsilon$. Έστω $x < x_1$ στο $[a,b]$ με $x_1 - x < \delta$. Τότε,

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x_1) - (Tf)(x)| &= \left|\int_a^{x_1} \phi(x_1,y)f(y)dy - \int_a^x \phi(x,y)f(y)dy\right| \\
&\leqslant \left|\int_x^{x_1} \phi(x_1,y)f(y)dy\right| + \left|\int_a^x [\phi(x_1,y) - \phi(x,y)]f(y)dy\right| \\
&\leqslant \int_x^{x_1} |\phi(x_1,y)| \cdot |f(y)|dy + \int_a^x |\phi(x_1,y) - \phi(x,y)| \cdot |f(y)|dy \\
&\leqslant \left(\max_\Delta |\phi|\right) \|f\|(x_1 - x) + \|f\|\varepsilon(x-a) \\
&< \left[\left(\max_\Delta |\phi|\right) + b - a\right] \varepsilon\|f\|.
\end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η Tf είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Τέλος, για κάθε $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x)| &= \left|\int_a^x \phi(x,y)f(y)dy\right| \leqslant \int_a^x |\phi(x,y)| \cdot |f(y)|dy \\
&\leqslant \left(\max_\Delta |\phi|\right) \|f\|(x-a) \leqslant \left[(b-a)\max_\Delta |\phi|\right] \|f\|.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\| \leqslant \left[(b-a)\max_{\Delta}|\phi|\right]\|f\|.$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant (b-a)\max_{\Delta}|\phi|$.

10. *Θεωρούμε τον χώρο* $\mathcal{C}^1[0,1]$ *των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο* $[0,1]$. *Στον* $\mathcal{C}^1[0,1]$ *θεωρούμε τις νόρμες*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} \quad , \quad \|f\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} + |f(0)|.$$

Αποδείξτε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ *είναι φραγμένος.*

Υπόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$ με $f(0)=0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 \Big|\int_0^t f'(s)ds\Big|^2 dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds\right)\left(\int_0^t 1^2 ds\right) dt \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(s)|^2 ds\right) t\,dt \\
&\leqslant \int_0^1 |f'(s)|^2 ds \\
&\leqslant \|f\|_{1,2}^2.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_{1,2}$ σε αυτήν την περίπτωση. Έστω τώρα τυχούσα $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Τότε, η $g(t) = f(t) - f(0)$ ικανοποιεί την $g(0)=0$, άρα $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_{1,2}$. Όμως, $g' = f'$ άρα

$$\|g\|_{1,2} = \left(\int_0^1 |g'|^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2} = \|f\|_{1,2} - |f(0)|,$$

επομένως

$$\|f\|_2 = \|g + f(0)\|_2 \leqslant \|g\|_2 + |f(0)| \leqslant \|g\|_{1,2} + |f(0)| = \|f\|_{1,2}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο ταυτοτικός τελεστής $I : (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_{1,2}) \to (\mathcal{C}^1[0,1], \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος και $\|I\| \leqslant 1$.

11. *Έστω* X, Y *χώροι με νόρμα, και* $T : X \to Y$ *ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο* T *είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν και μόνο αν* $T(B_X) = B_Y$.

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή γραμμικός, ένα προς ένα και επί, με την ιδιότητα $\|Tx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in X$.

Αν $x \in B_X$, τότε $\|Tx\| = \|x\| \leqslant 1$ άρα $Tx \in B_Y$. Άρα, $T(B_X) \subseteq B_Y$.

Αν $y \in B_Y$, αφού ο T είναι ένα προς ένα και επί, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ για το οποίο $Tx = y$, και $\|x\| = \|Tx\| = \|y\| \leqslant 1$, δηλαδή $x \in B_X$. Άρα, $B_Y \subseteq T(B_X)$.

Επομένως, $T(B_X) = B_Y$.

($\Longleftarrow$) Δείχνουμε πρώτα ότι ο T είναι επί: αν $y \in Y$, $y \neq 0$, τότε $\frac{y}{\|y\|} \in B_Y = T(B_X)$, άρα υπάρχει $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $Tx = \frac{y}{\|y\|}$. Τότε,

$$y = T(\|y\|x) \in T(X).$$

Προφανώς, $0 = T(0) \in T(X)$. Άρα, $T(X) = Y$.

Ο T είναι ισομετρία: αν είχαμε $\|Tx\| > \|x\|$ για κάποιο $x \in X$, τότε θα είχαμε

$$\|T(x/\|x\|)\| > 1 \Longrightarrow T(x/\|x\|) \notin B_Y,$$

ενώ $x/\|x\| \in B_X$. Αυτό είναι άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι $T(B_X) = B_Y$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in X$ για το οποίο $\|Tx\| < \|x\|$.

Αφού ο T είναι ισομετρία, πρέπει να είναι και ένα προς ένα. Άρα, είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

12. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $x_n, x \in X$. Αποδείξτε ότι, αν $T_n \to T$ και $x_n \to x$, τότε $T_n x_n \to Tx$.*

Υπόδειξη. Οι (T_n) και (x_n) είναι φραγμένες ακολουθίες στους $B(X, Y)$ και X αντίστοιχα, ως συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|T_n\| \leqslant M, \quad \|x_n\| \leqslant M, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|T_n x_n - Tx\| &= \|T_n x_n - Tx_n + Tx_n - Tx\| \\
&\leqslant \|(T_n - T)(x_n)\| + \|T(x_n - x)\| \\
&\leqslant \|T_n - T\| \cdot \|x_n\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \\
&\leqslant M\|T_n - T\| + \|T\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $T_n x_n \to Tx$.

13. *Έστω X, Y χώροι με νορμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο τελεστής T είναι φραγμένος.*

(β) *Το σύνολο $T^{-1}(S_Y) = \{x \in X : \|Tx\|_Y = 1\}$ είναι κλειστό.*

Υπόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β): Η S_Y είναι κλειστό υποσύνολο του Y και ο $T : X \to Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, άρα συνεχής συνάρτηση. Έπεται ότι το σύνολο $T^{-1}(S_Y)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Αρχικά παρατηρούμε ότι $T(0) = 0 \notin S_Y$, άρα $0 \notin T^{-1}(S_Y)$. Αφού το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(0,\delta) \cap T^{-1}(S_Y) = \emptyset$. Δηλαδή, για κάθε $z \in B(0,\delta)$ έχουμε: $\|T(z)\|_Y < 1$ ή $\|T(z)\|_Y > 1$.

Έστω ότι υπάρχει $z_0 \in B(0,\delta)$ με $\|T(z_0)\|_Z > 1$. Θέτουμε $\lambda = \frac{1}{\|T(z_0)\|_Y} < 1$. Τότε, $\|\lambda z_0\|_X = \lambda\|z_0\|_X < \lambda\delta < \delta$, δηλαδή $\lambda z_0 \in B(0,\delta)$, $\|T(\lambda z_0)\|_Y = \lambda \cdot \|T(z_0)\|_Y = 1$, δηλαδή $\lambda z_0 \in T^{-1}(S_Y)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $B(0,\delta) \cap T^{-1}(S_Y) = \emptyset$.

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι για κάθε $z \in B(0,\delta)$ ισχύει $\|T(z)\| < 1$. Τότε, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right)\right\| < 1$ διότι $\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|_X}\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Δηλαδή,

$$\frac{\delta}{2\|x\|_X}\|T(x)\|_Y < 1 \quad \Longrightarrow \|T(x)\|_Y < \frac{2}{\delta}\|x\|_X,$$

άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant \frac{2}{\delta}$.

14. *Έστω $F : X \to \mathbb{R}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι το F είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(\widehat{B}(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω ότι το F είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε $x \in \widehat{B}(0,1)$ έχουμε

$$|F(x)| \leqslant \|F\| \cdot \|x\| \leqslant \|F\|,$$

δηλαδή, $F(\widehat{B}(0,1)) \subseteq [-\|F\|, \|F\|]$. Άρα, για $\delta = 1$ έχουμε $F(\widehat{B}(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $F(\widehat{B}(0,\delta)) \neq \mathbb{R}$ για κάποιο $\delta > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $F(\widehat{B}(0,\delta))$ είναι κυρτό και συμμετρικό ως προς το 0 υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (από τη γραμμικότητα του F - εξηγήστε). Αφού είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, πρέπει να είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα με κέντρο το 0. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| \leqslant \delta \Longrightarrow |F(x)| \leqslant M.$$

Έπεται ότι το F είναι φραγμένο: αν $x \neq 0$, τότε

$$\left|F\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right| \leqslant M \Longrightarrow |F(x)| \leqslant \frac{2M}{\delta}\|x\|.$$

15. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $F \in X^*$, $F \neq 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\|F\| = \frac{1}{\inf\{\|x\| : F(x) = 1\}}.$$

Υπόδειξη. Αν $F(x) = 1$, τότε $1 = F(x) \leqslant \|F\| \cdot \|x\|$, άρα $\|x\| \geqslant \frac{1}{\|F\|}$. Δηλαδή,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \geqslant \frac{1}{\|F\|}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $0 < \varepsilon < \|F\|$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $\|x_\varepsilon\| = 1$ τέτοιο ώστε $F(x_\varepsilon) = a_\varepsilon > \|F\| - \varepsilon$ (γιατί;). Τότε, $F(x_\varepsilon/a_\varepsilon) = 1$ και

$$\left\|\frac{x_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right\| = \frac{1}{a_\varepsilon} < \frac{1}{\|F\| - \varepsilon}.$$

Άρα,

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leqslant \frac{1}{\|F\| - \varepsilon},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\inf\{\|x\| : F(x) = 1\} \leqslant \frac{1}{\|F\|}.$$

16. *Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $x_n \to 0$ στον X, τότε η $\{\|Tx_n\|\}$ είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.*

Υπόδειξη. Έστω ότι ο T δεν είναι φραγμένος. Τότε, ο T δεν είναι συνεχής στο 0. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in X$ με $\|z_n\| < 1/n$ και $\|Tz_n\| \geqslant \varepsilon$.

Ορίζουμε $x_n = \frac{z_n}{\sqrt{\|z_n\|}}$ (αφού $\|Tz_n\| \geqslant \varepsilon$ έχουμε $Tz_n \neq 0$ άρα $z_n \neq 0$). Τότε,

$$\|x_n\| = \frac{\|z_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} = \sqrt{\|z_n\|} < \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

άρα $x_n \to 0$. Όμως,

$$\|Tx_n\| = \frac{\|Tz_n\|}{\sqrt{\|z_n\|}} \geqslant \varepsilon\sqrt{n} \to +\infty,$$

δηλαδή η $(\|Tx_n\|)$ δεν είναι φραγμένη. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ο T είναι φραγμένος.

17. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια βάση Hamel του X. Ο X είναι απειροδιάστατος, επομένως μπορούμε να γράψουμε αυτή τη βάση στη μορφή

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_i : i \in I\}.$$

[Ξεχωρίζουμε δηλαδή ένα άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο μιάς βάσης του X και το αριθμούμε.] Αφού τα x_n, y_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, κάθε x_n είναι μη μηδενικό. Ορίζουμε $F : X \to \mathbb{R}$ πρώτα στα στοιχεία της βάσης του X, θέτοντας

$$F(x_n) = n\|x_n\|, \quad F(y_i) = 0.$$

Κατόπιν επεκτείνουμε γραμμικά σε ολόκληρο το χώρο X (κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα σαν πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός κάποιων x_n και κάποιων y_i - εξηγήστε). Το F είναι γραμμικό συναρτησοειδές, όμως δεν είναι φραγμένο γιατί τότε θα είχαμε

$$\|F\| \geqslant \frac{|F(x_n)|}{\|x_n\|} = n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο.

18. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα (πάνω από το $\mathbb{R}$). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι φραγμένο. Χρησιμοποιώντας το, αποδείξτε ότι υπάρχουν κυρτά και πυκνά σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε $A \cup B = X$ και $A \cap B = \emptyset$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, τα σύνολα $A = \{x \in X : f(x) \geqslant 0\}$ και $B = \{x \in X : f(x) < 0\}$ είναι μη κενά, κυρτά, ξένα και $X = A \cup B$. Αφού το f δεν είναι φραγμένο, γνωρίζουμε ότι ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι πυκνός (και γνήσιος) υπόχωρος του X. Ο $\mathrm{Ker}(f)$ περιέχεται στο A, άρα $\overline{A} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)} = X$, δηλαδή το A είναι πυκνό. Επίσης, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) < 0$, και τότε $x_0 + \mathrm{Ker}(f) \subseteq B$: αν $x \in x_0 + \mathrm{Ker}(f)$ τότε $f(x) = f(x_0) < 0$. Όμως, $\overline{x_0 + \mathrm{Ker}(f)} = x_0 + \overline{\mathrm{Ker}(f)} = X$, άρα

$$\overline{B} \supseteq \overline{x_0 + \mathrm{Ker}(f)} = X.$$

Δηλαδή, το B είναι κι αυτό πυκνό υποσύνολο του X.

19. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω $\{e_i\}_{i\in I}$ (υπεραριθμήσιμη) βάση Hamel του X.*

(α) *Ορίζουμε μια νόρμα $\|\cdot\|'$ στον X ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i(x)e_i$ (για κάποιους $\alpha_i(x) \in \mathbb{K}$) με το σύνολο $I(x) = \{i \in I : \alpha_i(x) \neq 0\}$ πεπερασμένο. Θέτουμε $\|0\|' = 0$ και*

$$\|x\|' = \sum_{i\in I} |\alpha_i(x)| = \sum_{i\in I(x)} |\alpha_i(x)|$$

αν $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα, που δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

(β) *Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $f_i : X \to \mathbb{K}$ με*

$$f_i(x) = f_i\left(\sum_{i\in I} \alpha_i(x)e_i\right) = \alpha_i(x).$$

Αποδείξτε ότι κάθε f_i είναι γραμμικό συναρτησοειδές, αλλά υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in I$ ώστε το f_i να μην είναι φραγμένο.

Υπόδειξη. (α) Οι ιδιότητες $\|\lambda x\|' = |\lambda| \cdot \|x\|'$ και $\|x + y\|' \leqslant \|x\|' + \|y\|'$ ελέγχονται εύκολα. Επίσης, $\|x\|' = \sum_{i\in I} |\alpha_i(x)| \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$. Αν υποθέσουμε ότι $\|x\|' = 0$ τότε $\alpha_i(x) = 0$ για κάθε $i \in I$, άρα $x = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i(x)e_i = 0$. Συνεπώς, η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον X (ελέγξτε όλους τους παραπάνω ισχυρισμούς).

Αφού ο X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach, το σύνολο $\{e_i\}_{i\in I}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Παρατηρούμε ότι αν $i \neq j$, $i, j \in I$, τότε $e_i - e_j = 1 \cdot e_i + (-1) \cdot e_j$ (αυτή είναι η μοναδική του αναπαράσταση ως πεπερασμένου γραμμικού συνδυασμού των e_i), άρα

$$\|e_i - e_j\|' = 2.$$

Έπεται ότι ο $(X, \|\cdot\|')$ δεν είναι διαχωρίσιμος (εξηγήστε γιατί). Αν όμως οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ ήταν ισοδύναμες, τότε αφού ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμος θα είχαμε ότι και ο $(X, \|\cdot\|')$ είναι διαχωρίσιμος (εξηγήστε γιατί) το οποίο είναι άτοπο. Άρα, οι δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δεν είναι ισοδύναμες.

(β) Η γραμμικότητα των f_i ελέγχεται εύκολα.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε μια ακολουθία $(e_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ διαφορετικών ανά δύο στοιχείων της βάσης Hamel του X. Παρατηρήστε ότι $e_{i_k} \neq 0$, αφού τα e_{i_k} είναι στοιχεία της βάσης. Αν $v_k = \frac{e_{i_k}}{2^k\|e_{i_k}\|}$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty,$$

και αφού ο X είναι χώρος Banach, η ακολουθία $s_N = \sum_{k=1}^{N} v_k$ συγκλίνει στο $x = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \in X$.

Τώρα, γράφουμε το x στη μορφή $x = \sum_{j\in I(x)} \alpha_j(x)e_j$, όπου το $I(x)$ είναι πεπερασμένο. Αφού τα e_{i_k} είναι άπειρα το πλήθος, υπάρχει $i_n \in I$ τέτοιος ώστε $i_n \notin I(x)$.

Θεωρούμε το f_{i_n} και υποθέτουμε ότι είναι φραγμένο, άρα συνεχής απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι

$$f_{i_n}(x) = \alpha_{i_n}(x) = 0,$$

διότι $i_n \notin J(x)$ άρα $\alpha_{i_n}(x) = 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $N \geqslant n$ έχουμε

$$f_{i_n}(s_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k\|e_{i_k}\|} f_{i_n}(e_{i_k}) = \frac{1}{2^n\|e_{i_n}\|},$$

διότι $f_{i_n}(e_{i_k}) = 0$ αν $k \neq n$ και $f_{i_n}(e_{i_n}) = 1$. Αν το f_{i_n} ήταν συνεχής απεικόνιση, θα είχαμε

$$\lim_{N\to\infty} f_{i_n}(s_N) = \frac{1}{2^n\|e_{i_n}\|} = f(x) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

20. *Αποδείξτε ότι το σύνολο* $Y = \{x = (x_n) \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ *είναι πυκνός διανυσματικός υπόχωρος του* c_0.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ ως υπόχωρο του c_0. Είναι γνωστό (ελέγξτε το) ότι $\overline{c_{00}} = c_0$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K}$ με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη διότι κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (ουσιαστικά έχουμε άθροισμα πεπερασμένων το πλήθος μη μηδενικών όρων). Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμική.

Παρατηρούμε τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \dots, 1, 0, \dots) \in c_{00}$ (N μονάδες και μετά μηδενικά) και έχουμε $\|x_N\|_\infty = 1$ και $f(x_N) = N$, οπότε αν είχαμε $\|f\| < \infty$ θα παίρναμε

$$N = |f(x_N)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_N\|_\infty = \|f\|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, έχουμε $\overline{\mathrm{Ker}(f)}^{c_{00}} = c_{00}$ (η κλειστή θήκη εδώ είναι στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$).

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq Y$ και αν δούμε τον $\mathrm{Ker}(f)$ σαν υποσύνολο του c_0 παίρνουμε

$$\overline{Y}^{c_0} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{c_0} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{c_{00}} = c_{00}.$$

Άρα,

$$\overline{Y}^{c_0} \supseteq \overline{c_{00}}^{c_0} = c_0.$$

Δηλαδή, ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του c_0.

21. *Έστω $1 < p < \infty$ και $Y = \left\{x = (x_k) \in \ell_p : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\right\}$. Αποδείξτε ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ_p.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ ως υπόχωρο του ℓ_p. Είναι γνωστό (ελέγξτε το) ότι $\overline{c_{00}} = \ell_p$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f : (c_{00}, \|\cdot\|_p) \to \mathbb{K}$ με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη διότι κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (ουσιαστικά έχουμε άθροισμα πεπερασμένων το πλήθος μη μηδενικών όρων). Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι γραμμική.

Παρατηρούμε τώρα ότι η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_N = (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \in c_{00}$ (N μονάδες και μετά μηδενικά) και έχουμε $\|x_N\|_\infty = N^{1/p}$ και $f(x_N) = N$, οπότε αν είχαμε $\|f\| < \infty$ θα παίρναμε

$$N = |f(x_N)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_N\|_\infty = \|f\| \cdot N^{1/p} \quad \Longrightarrow \quad N^{1/q} \leqslant \|f\|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, το οποίο είναι άτοπο. Αφού η f δεν είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, έχουμε $\overline{\mathrm{Ker}(f)}^{(c_{00}, \|\cdot\|_p)} = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$ (η κλειστή θήκη εδώ είναι στον $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$).

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq Y$ και αν δούμε τον $\mathrm{Ker}(f)$ σαν υποσύνολο του ℓ_p παίρνουμε

$$\overline{Y}^{\ell_p} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{\ell_p} \supseteq \overline{\mathrm{Ker}(f)}^{(c_{00}, \|\cdot\|_p)} = c_{00}.$$

Άρα,

$$\overline{Y}^{\ell_p} \supseteq \overline{c_{00}}^{\ell_p} = \ell_p.$$

Δηλαδή, ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ_p.

22. *Αποδείξτε ότι ο $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.*

Υπόδειξη. Για κάθε $y \in \ell_1$, η απεικόνιση $f_y : c_0 \to \mathbb{K}$ με $f_y(x) = \sum_n x_n y_n$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f_y\| \leqslant \|y\|_1$. Πράγματι,

$$|f_y(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \sup_n |x_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|y\|_1 \|x\|_\infty.$$

Ορίζουμε $T : \ell_1 \to c_0^*$ με $T(y) = f_y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Θα δείξουμε ότι ο T είναι ισομετρία. Για κάθε $y \in \ell_1$, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ όπου $x_k = \operatorname{sign}(y_k)$, $k \leqslant N$. Τότε $\|x(N)\|_\infty \leqslant 1$ και $f_y(x(N)) = \sum_{k=1}^N |y_k|$, οπότε $\|f_y\| \geqslant |f_y(x(N))| = \sum_{k=1}^N |y_k|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\|f_y\| \geqslant \|y\|_1$, άρα

$$\|T(y)\|_{c_0^*} = \|f_y\| = \|y\|_1.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $f \in c_0^*$. Θέτουμε $y = (y_n)$ όπου $y_n = f(e_n)$. Θα δείξουμε ότι $y \in \ell_1$ και ότι $f_y = f$ (οπότε $T(y) = f$). Έστω $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $x(N) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$ όπου $x_k = \operatorname{sign}(y_k)$, $k \leqslant N$. Τότε, $\|x(N)\|_\infty \leqslant 1$ και

$$f(x(N)) = \sum_{k=1}^N \operatorname{sign}(y_k) f(e_k) = \sum_{k=1}^N |y_k|,$$

άρα $\sum_{k=1}^N |y_k| = |f(x(N))| \leqslant \|f\|$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $y \in \ell_1$ και $\|y\|_1 \leqslant \|f\|$.

Για να δείξουμε ότι $f_y = f$, παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά φραγμένα συναρτησοειδή συμφωνούν σε κάθε e_n από τον ορισμό του y. Λόγω γραμμικότητας συμφωνούν στον $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ ο οποίος είναι πυκνός στον c_0 και λόγω συνέχειας συμφωνούν σε ολόκληρο τον c_0.

23. *Έστω c ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών με τη νόρμα $\|x\|_\infty = \sup_k |\xi_k|$, αν $x = (\xi_k)$.*

(α) *Αποδείξτε ότι οι χώροι c και c_0 είναι ισόμορφοι.*

(β) *Αποδείξτε ότι οι χώροι c και c_0 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

(γ) *Αποδείξτε ότι ο c^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.*

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $T : c \to c_0$ με $T(x) = (\xi, \xi_1 - \xi, \xi_2 - \xi, \dots)$, όπου $\xi = \lim \xi_k$. Από τον ορισμό του T είναι φανερό ότι $T(x) \in c_0$, δηλαδή ο T είναι καλά ορισμένος.

(i) Ο T είναι ένα προς ένα: αν $T(x) = T(y)$, τότε $\xi = \lim \xi_k = \lim \eta_k = \eta$ και $\xi - \xi_m = \eta - \eta_m$ για κάθε m, οπότε $\xi_m = \eta_m$, $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x = y$.

(ii) Ο T είναι επί: αν $y = (\eta_k) \in c_0$, τότε $x = (\eta_1, \eta_1 + \eta_2, \eta_1 + \eta_3, \dots) \in c$ γιατί $\eta_1 + \eta_k \to \eta_1$, και $T(x) = y$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

(iii) Ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant 2$: παρατηρούμε αρχικά ότι αν $x = (\xi_k) \in c$ τότε $|\xi| = \lim_{k\to\infty} |\xi_k| \leqslant \|x\|_c$. Επίσης, $|\xi - \xi_k| \leqslant |\xi| + |\xi_k| \leqslant 2\|x\|_c$ για κάθε k, άρα

$$\|T(x)\|_{c_0} = \max\{|\xi|, \sup\{|\xi - \xi_k| : k \in \mathbb{N}\}\} \leqslant 2 \sup\{|\xi_k| : k \in \mathbb{N}\} = 2\|x\|_c.$$

(iv) Ομοίως ελέγχουμε ότι $\|T^{-1}\| \leqslant 2$. Άρα, οι c και c_0 είναι ισομορφικοί.

(β) Έστω $T : c_0 \to c$ ισομετρικός ισομορφισμός. Θα δείξουμε ότι $T(e_n) \in c_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: θα είχαμε $T(c_0) \subseteq c_0$ ενώ ο T είναι επί.

Γράφουμε $T(e_n) = (x_{nm})_{m=1}^{\infty}$. Έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $T(e_{n_0}) \notin c_0$. Τότε, $\lim_m x_{n_0 m} = \ell \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ell > 0$ (αν $\ell < 0$, εργαζόμαστε όμοια). Επίσης, $\ell \leqslant 1$ αφού $\sup_m |x_{n_0 m}| = \|T(e_{n_0})\| = 1$. Υπάρχει m_0 ώστε: για κάθε $m \geqslant m_0$, $x_{n_0 m} > \frac{\ell}{2}$.

Παρατηρήστε ότι: για κάθε n υπάρχει $m(n)$ ώστε $|x_{nm(n)}| > 1 - \frac{\ell}{2}$ (γιατί $\sup_m |x_{nm}| = \|T(e_n)\| = \|e_n\| = 1$). Επίσης, $n_1 \neq n_2 \implies m(n_1) \neq m(n_2)$. Αλλιώς, για κάποιο από τα $y = \pm e_{n_1} \pm e_{n_2}$ θα είχαμε $\|T(y)\| > 2 - \ell \geqslant 1$ ενώ $\|y\| = 1$.

Υπάρχει λοιπόν n ώστε $m(n) \geqslant m_0$ και $|x_{nm(n)}| > 1 - \frac{\ell}{2}$. Τότε, για ένα από τα $y = e_{n_0} \pm e_n$ έχουμε $\|T(y)\| \geqslant |x_{n_0 m(n)}| + |x_{nm(n)}| > \frac{\ell}{2} + \left(1 - \frac{\ell}{2}\right) = 1$ ενώ $\|y\| = 1$. Αυτό είναι άτοπο.

(γ) Παρατηρήστε ότι $c = c_0 \oplus \mathrm{span}\{e_0\}$, όπου $e_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Κάθε $x \in c$ γράφεται στη μορφή $x = x_0 e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_0) e_n$, όπου $x_0 = \lim_n x_n$. Αν $f \in c^*$ τότε

$$f(x) = x_0 f(e_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_0) f(e_n) = x_0 \left(f(e_0) - \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)$$

(αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|$ συγκλίνει). Θέτουμε $a_0 = f(e_0) - \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n)$ και $a_n = f(e_n)$, $n \geqslant 1$. Η απεικόνιση $T : c^* \to \ell_1$ με $T(f) = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

24. *Ορίστε μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον c_{00} με την εξής ιδιότητα: η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$ αλλά οι χώροι $(c_{00}, \|\cdot\|)$ και $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

Υπόδειξη. Έστω (e_n) η βάση του c_{00}. Ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ θέτοντας $T(e_n) = n e_n$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Ο T είναι 1-1 και επί. Ορίζουμε μια δεύτερη νόρμα $\|\cdot\|_s$ στον c_{00}, θέτοντας $\|x\|_s = \|T(x)\|_\infty$. Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_s$ είναι νόρμα.

Οι $\|\cdot|_s$ και $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι ισοδύναμες: $\|e_n\|_s = \|n e_n\|_\infty = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, ο $T : (c_{00}, \|\cdot\|_s) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρία: αν $x \in c_{00}$ τότε $\|T(x)\|_\infty = \|x\|_s$.

25. *Έστω X χώρος Banach και έστω (f_n) μια ακολουθία μη μηδενικών συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών $f_n : X \to \mathbb{K}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $f_n(x) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n = n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$, δηλαδή $x \in \mathrm{Ker}(f_n)$. Τότε,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ker}(f_n).$$

Αφού κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\mathrm{Ker}(f_n)$ είναι κλειστό. Ο X είναι πλήρης, άρα από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(f_{n_0})$ να έχει μη κενό εσωτερικό. Όμως τότε, $\mathrm{Ker}(f_{n_0}) = X$ (γνωστό από τη θεωρία). Δηλαδή, $f_{n_0} \equiv 0$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση ότι όλα τα f_n είναι μη μηδενικά.

26. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, ο X χώρος Banach, και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ και το $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.*

Υπόδειξη. Αφού ο X είναι πλήρης, τα σύνολα F_n είναι κλειστά και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, από το θεώρημα Baire υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(F_n) \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ ώστε $B(x_0, \delta) \subseteq F_{n_0}$. Άρα, το

$$T(B(x_0, \delta)) \subseteq T(F_{n_0})$$

είναι φραγμένο υποσύνολο του Y. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $z \in B(x_0, \delta)$ ισχύει $\|Tz\|_Y \leqslant M$. Τότε, για κάθε $w \in B(0, \delta)$ έχουμε $x_0 + w \in B(x_0, \delta)$ και $x_0 \in B(x_0, \delta)$, άρα

$$\|Tw\|_Y = \|T(x_0 + w) - T(x_0)\|_Y \leqslant \|T(x_0 + w)\|_Y + \|T(x_0)\|_Y \leqslant 2M.$$

Τέλος, για κάθε $x \in X \setminus \{0\}$ έχουμε $\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, \delta)$, άρα

$$\|T(x)\|_Y = \frac{2\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y \leqslant \frac{4M}{\delta} \|x\|,$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος.

27. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (F_n) κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και κάθε $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y. Είναι ο T απαραίτητα φραγμένος;*

Υπόδειξη. Στον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ θεωρούμε τα σύνολα

$$F_n := \{x = (x_k) : |x_k| \leqslant n \text{ αν } k \leqslant n \text{ και } x_k = 0 \text{ αν } k > n\}.$$

Κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο: αν $x^{(s)} = (x_k^{(s)})_{k=1}^{\infty} \in F_n$, $s = 1, 2, \ldots$, και $x^{(s)} \to x$ για κάποιο $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_{00}$, τότε για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε

$$\lim_{s\to\infty} x_k^{(s)} = x_k,$$

διότι $|x_k^{(s)} - x_k| \leqslant \|x^{(s)} - x\|_\infty \to 0$. Όμως, αν $k \leqslant n$ έχουμε $|x_k^{(s)}| \leqslant n$ για κάθε s, άρα

$$|x_k| = \lim_{s\to\infty} |x_k^{(s)}| \leqslant n,$$

και όμοια, αν $k < n$ έχουμε $x_k^{(s)} = 0$ για κάθε s, άρα

$$x_k = \lim_{s\to\infty} x_k^{(s)} = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in F_n$, και από τον χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι το F_n είναι κλειστό.

Δείχνουμε ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Έστω $x = (x_k) \in c_{00}$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_k = 0$ για κάθε $k > m$. Επίσης, υπάρχει $s \in \mathbb{N}$ ώστε $\max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\} \leqslant s$. Αν πάρουμε οποιονδήποτε $n \geqslant \max\{m, s\}$ τότε έχουμε $|x_k| \leqslant n$ για κάθε $k \leqslant n$ (διότι $|x_k| \leqslant s \leqslant n$ αν $k \leqslant m$ και $|x_k| = 0 \leqslant n$

αν $k > m$) και $x_k = 0$ για κάθε $k > n$ (διότι, αν $k > n$ έχουμε $k > m$). Άρα, $x \in F_n$, και αφού το $x \in c_{00}$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα, θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $T : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί η ακολουθία (x_k) είναι τελικά μηδενική (άρα, οι μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος). Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός. Αν $x \in F_n$ τότε

$$|T(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \sum_{k==1}^{n} n = n^2.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $T(F_n)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Όμως, ο T δεν είναι φραγμένος: υποθέτουμε ότι $\|T\| < \infty$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $x_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (με n μονάδες στην αρχή και μηδενικά μετά). Τότε, $\|x_n\|_\infty = 1$, άρα

$$\|T\| \geqslant |T(x_n)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} 1\right| = n,$$

το οποίο είναι άτοπο (το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο από την $\|T\|$).

28. *Έστω $T \in B(X, Y)$ (X είναι χώρος Banach). Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $\|Tx\| \geqslant \alpha\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $\mathcal{R}(T)$ του T είναι κλειστός υπόχωρος του Y.*

Υπόδειξη. Έστω (y_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(T)$ με $y_n \to y$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $y_n = T(x_n)$. Από την υπόθεση, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\alpha}\|T(x_n) - T(x_m)\| = \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|.$$

Η (y_n) είναι συγκλίνουσα άρα βασική ακολουθία. Από την ανισότητα

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\|, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

συμπεραίνουμε (εξηγήστε γιατί) ότι η (x_n) είναι επίσης βασική. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Ο T είναι συνεχής, άρα $T(x_n) \to T(x)$. Δηλαδή, $y_n \to T(x)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι $y = T(x) \in \mathcal{R}(T)$. Συνεπώς, ο $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστό σύνολο (το γεγονός ότι είναι υπόχωρος του Y ισχύει γενικά).

29. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας τελεστής που ικανοποιεί την ανισότητα $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ για κάθε $x \in X$, όπου $m > 0$ μια σταθερά. Να δείξετε ότι ορίζεται ο $T^{-1} : T(X) \to X$ και είναι φραγμένος. Τι μπορείτε να πείτε για τη νόρμα του;*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $T : X \to T(X)$ είναι 1-1. Αν $x, z \in X$ και $T(x) = T(z)$, τότε

$$0 = \|T(x) - T(z)\| = \|T(x - z)\| \geqslant m\|x - z\|,$$

άρα $\|x - z\| = 0$ και έπεται ότι $x = z$. Άρα, ο $T : X \to T(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής. Έστω $y \in T(X)$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $T(x) = y$, και $x = T^{-1}(y)$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για το $y = T(x)$, έχουμε

$$\|y\| = \|T(x)\| \geqslant m\|x\| = m\|T^{-1}(y)\|.$$

Δηλαδή,

$$\|T^{-1}(y)\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$$

για κάθε $y \in T(X)$. Έπεται ότι ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$.

30. *Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα.*

(α) *Αποδείξτε ότι για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχει πεπερασμένο $A \subset S_X$ το οποίο είναι δ-δίκτυο για την S_X: δηλαδή, για κάθε $x \in S_X$ υπάρχει $a \in A$ με $\|x - a\| < \delta$.*

(β) *Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $0 < \delta < \frac{1}{4}$ και κάποιο δ-δίκτυο A της S_X ισχύει το εξής: για κάθε $a \in A$ ισχύει $\frac{1}{1+\delta} \leqslant \|T(a)\|_Y \leqslant 1 + \delta$. Αποδείξτε ότι*

$$\|T\| \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta} \quad \text{και} \quad \|T^{-1}\| \leqslant \left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta}\right)^{-1}.$$

Υπόδειξη. (α) Η σφαίρα S_X είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X, άρα συμπαγές σύνολο διότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Συνεπώς, η S_X είναι ολικά φραγμένο σύνολο. Τότε, για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $A \subset S_X$ ώστε

$$S_X \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \delta).$$

Έπεται ότι για κάθε $x \in S_X$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in B(a, \delta)$, δηλαδή $\|x - a\| < \delta$.

(β) Έστω $x \in X$. Υπάρχει $a \in A$ ώστε $\|x - a\| < \delta$, άρα

$$\|T(x) - T(a)\| \leqslant \|T\| \, \|x - a\| < \|T\| \, \delta,$$

και από την υπόθεση παίρνουμε

$$\|T(x)\| \leqslant \|T(a)\| + \|T(x) - T(a)\| \leqslant 1 + \delta + \|T\| \, \delta.$$

Αφού $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in S_X\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|T\| \leqslant 1 + \delta + \|T\| \, \delta,$$

απ' όπου παίρνουμε την

$$\|T\| \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Τώρα, για κάθε $x \in S_X$ και για $a \in A$ με $\|x - a\| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|T(x)\| = \|T(a) - (T(a) - T(x))\| \geqslant \|T(a)\| - \|T(a) - T(x)\| &\geqslant \frac{1}{1+\delta} - \|T\| \, \delta \\ &\geqslant \frac{1}{1+\delta} - \frac{1+\delta}{1-\delta} \, \delta. \end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι θετική διότι $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Αυτό δείχνει ότι ο T είναι ένα προς ένα και ότι

$$\|T^{-1}\| \leqslant \left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta}\right)^{-1}.$$

31. (α) *Έστω X χώρος Banach και έστω $T \in B(X,X)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{\infty}\|T^n\| < +\infty$. Αν $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y : X \to X$ με $S_y(x) = y + T(x)$. Αποδείξτε ότι ο S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο ($S_y(x_0) = x_0$), το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$.*

(β) *Δίνονται $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση του Volterra*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t)f(s)ds$$

για κάθε $t \in [0,1]$.

Υπόδειξη. (α) Το x_0 ορίζεται καλά γιατί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)$ συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T^n(y)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|T^n\|\cdot\|y\| < +\infty$$

από την υπόθεση. Λόγω συνέχειας του T έχουμε

$$S_y(x_0) = y + T\left(y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(y)\right) = y + T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{n+1}(y) = y + \sum_{k=1}^{\infty} T^k(y) = x_0,$$

δηλαδή το x_0 είναι σταθερό σημείο της S_y.

Αν τα x_0 και x_1 είναι διαφορετικά σταθερά σημεία της S_y, τότε $y+T(x_0) = x_0$ και $y+T(x_1) = x_1$. Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$T(x_0 - x_1) = T(x_0) - T(x_1) = x_0 - x_1.$$

Τότε, επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$T^n(x_0 - x_1) = x_0 - x_1$$

για κάθε n, δηλαδή $\|T^n\| \geqslant 1$ για κάθε n (γιατί;). Αυτό είναι άτοπο αφού από την υπόθεση έχουμε $\|T^n\| \to 0$. Άρα, η S_y έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

(β) Θεωρούμε τον τελεστή $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t)f(s)\,ds$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Ελέγξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος: η Tf είναι συνεχής συνάρτηση και ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $S_g : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $S_g(f) = g + Tf$. Η εξίσωση του Volterra έχει συνεχή λύση αν η S_g έχει σταθερό σημείο. Από το (α) αρκεί να δείξουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|T^n\| < +\infty$.

Έστω $M = \max\{|K(s,t)| : 0 \leqslant s,t \leqslant 1\}$. Δείχνουμε επαγωγικά ότι: για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,1]$, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|(T^n f)(t)| \leqslant \frac{M^n}{n!}\|f\|_\infty t^n.$$

Το επαγωγικό βήμα:

$$\begin{aligned}|(T^{n+1}f)(t)| &= \left|\int_0^t K(s,t)(T^n f)(s)\,ds\right| \leqslant M\int_0^t |(T^n f)(s)|\,ds\\ &\leqslant \frac{M^{n+1}}{n!}\|f\|_\infty \int_0^t s^n ds \leqslant \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}\|f\|_\infty t^{n+1}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T^n\| \leqslant M^n/n!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < +\infty$.

32. *Έστω* X *διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και ένα προς ένα τελεστής* $T : X^* \to c_0$.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X. Ορίζουμε $T : X^* \to c_0$ με

$$T(f) = \left(\frac{f(x_n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί $|f(x_n)|/n \leqslant \|f\|\cdot\|x_n\|/n = \|f\|/n \to 0$, γραμμικός, και για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$\|T(f)\|_{c_0} = \sup_n \frac{|f(x_n)|}{n} \leqslant \sup_n \frac{\|f\|}{n} = \|f\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.

Αν $T(f) = T(g)$ για κάποια $f, g \in X^*$, τότε $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε n, και αφού το $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο της B_X, έχουμε $f \equiv g$ στην B_X. Άρα, $f = g$ και αυτό δείχνει ότι ο T είναι ένα προς ένα.

33. *Έστω* X *διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής* $T : \ell_1 \to X$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D := \{x_n : n \in \mathbb{N}$ της B_X και ορίζουμε $T : \ell_1 \to X$ με $T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ για $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ο T είναι καλά ορίσμένος: αν $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\cdot\|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_{\ell_1} < \infty.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει απολύτως και ο X είναι χώρος Banach, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει και το $T(a) \in X$ ορίζεται καλά. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα. Επίσης, για κάθε $\alpha \in \ell_1$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \|a\|_{\ell_1},$$

άρα

$$\|T(a)\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right\| \leqslant \|a\|_{\ell_1}.$$

Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leqslant 1$. Μάλιστα ισχύει και η $\|T\| \geqslant \|T(e_n)\| = \|x_n\|$ για κάθε n, άρα $\|T\| = 1$ (αφού η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πυκνή στην B_X έχουμε $\sup_n \|x_n\| = 1$ – εξηγήστε γιατί.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x \in \frac{1}{2}B_X$. Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x - x_{k_1}\| < \frac{1}{2}$. Τότε, $2(x - x_{k_1}) \in B_X$ άρα μπορούμε να βρούμε $k_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$\|2(x - x_{k_1}) - x_{k_2}\| < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left\| x - \left(x_{k_1} + \frac{1}{2}x_{k_2} \right) \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον $k_2 > k_1$ διότι το σύνολο $B(2(x - x_{k_1}), 1/2) \cap D$ είναι άπειρο (εξηγήστε γιατί). Επαγωγικά, βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών ώστε, για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n-1}} x_{k_n} \right) \right\| < \frac{1}{2^N}$$

(εξηγήστε το επαγωγικό βήμα). Έπεται ότι

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} x_{k_n} = T(a_x),$$

όπου $a_x = (a_m)_{m=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία με $a_m = \frac{1}{2^{n-1}}$ αν $m = k_n$ και $a_m = 0$ αν $m \neq k_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (παρατηρήστε ότι $a_x \in \ell_1$ αφού $\|a_x\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 < \infty$).

Αφού $T(\ell_1) \supseteq B_X$ και ο T είναι γραμμικός, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι ο T είναι επί.

34. *Έστω X γραμμικός χώρος και $g, f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{K}$ γραμμικά συναρτησοειδή με την ιδιότητα $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Τότε, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε $g = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $T : X \to \mathbb{K}^n$ με

$$T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

και το γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : T(X) \to \mathbb{K}$ με

$$\psi(T(x)) = g(x).$$

Ο $T(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$ και το ψ είναι καλά ορισμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $T(X)$: αν $T(x_1) = T(x_2) \in T(X)$, τότε $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, άρα $x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Ker}(f_k)$. Από την υπόθεση, $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(g)$, δηλαδή $g(x_1) = g(x_2)$. Η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα.

Η ψ επεκτείνεται σε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\Psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ώστε: για κάθε $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\Psi(t_1, \ldots, t_n) = a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n.$$

Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$g(x) = \psi(T(x)) = \Psi(f_1(x), \dots, f_n(x)) = a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x).$$

Δηλαδή, $g = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$.

35. (**Κριτήριο του Schur**) *Έστω $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ένας άπειρος πίνακας με $a_{ij} \geqslant 0$ για κάθε i, j. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $b, c > 0$ και $p_i > 0$ ώστε για κάθε i, j να ισχύουν οι*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \leqslant b p_j \quad \textit{και} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j \leqslant c p_i.$$

Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T\left((\xi_i)_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j \right)_i$$

είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ταυτόχρονα ότι ο T ορίζεται καλά και $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$. Έστω $x = (\xi_i) \in \ell_2$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a_{ij} \Big|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j \sqrt{a_{ij}}}{\sqrt{p_j}} \sqrt{a_{ij} p_j} \Big|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2 a_{ij}}{p_j} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_j \right),
\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2 a_{ij} c p_i}{p_j} = c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{p_j} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} p_i \\
&\leqslant bc \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j^2}{p_j} p_j = bc \|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Από την $\|Tx\|_2^2 \leqslant bc\|x\|_2^2$ έπεται ότι $\|T\| \leqslant \sqrt{bc}$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

36. (**Ανισότητα του Hilbert**) *Αν $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\left| \sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \right| \leqslant \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $g_j(x) = 1/[(x + j + \frac{1}{2}) \sqrt{x}]$ είναι κυρτή για κάθε $j = 0, 1, 2, \dots$, οπότε, για $i = 0, 1, 2, \dots$, έχουμε

$$\frac{1}{i + \frac{1}{2} + j + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i + \frac{1}{2}}} < \int_i^{i+1} \frac{dx}{(x + j + \frac{1}{2}) \sqrt{x}}$$

(γιατί;). Έπεται ότι

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}} < \sum_{i=0}^{\infty} \int_{i}^{i+1} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}} = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+j+\frac{1}{2})\sqrt{x}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{j+\frac{1}{2}}}$$

(υπολογίστε το). Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Schur, με

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1} = \frac{1}{i+\frac{1}{2}+j+\frac{1}{2}}, \quad p_i = \frac{1}{\sqrt{i+\frac{1}{2}}}, \quad b = c = \pi.$$

Θεωρούμε τον τελεστή $T : \ell_2 \to \ell_2$, με

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{i+j+1} \right)_{i=0}^{\infty}.$$

Αν $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, τότε

$$\left| \sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \right| = \langle Tx, x \rangle \leqslant \|Tx\|_2 \|x\|_2 \leqslant \|T\| \cdot \|x\|_2^2 \leqslant \pi \sum_{i=0}^{n} x_i^2.$$

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Hahn-Banach

1. *Αποδείξτε ότι η απόλυτη τιμή γραμμικού συναρτησοειδούς είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.*

Υπόδειξη. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, και $p(x) = |f(x)|$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$p(x+y) = |f(x+y)| = |f(x) + f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| = p(x) + p(y).$$

Αν $x \in X$ και $\lambda \geqslant 0$, τότε

$$p(\lambda x) = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = \lambda |f(x)| = \lambda p(x).$$

Άρα, το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

2. *Αποδείξτε ότι κάθε νόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.*

Υπόδειξη. Έστω $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, ελέγχουμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \geqslant 0$, ισχύουν οι

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda \|x\|,$$

από τις γνωστές ιδιότητες της νόρμας.

3. *Έστω p ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον γραμμικό χώρο X. Ορίζουμε $Z = \mathrm{span}\{x_0\}$, και $f(x) = ap(x_0)$ αν $x = ax_0 \in Z$. Αποδείξτε ότι το f είναι γραμμικό συναρτησοειδές και $f(x) \leqslant p(x)$, $x \in Z$.*

Υπόδειξη. Το f είναι προφανώς γραμμικό, γιατί αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x = ax_0, y = bx_0 \in Z$, τότε

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= f((\lambda a + \mu b)x_0) = (\lambda a + \mu b)p(x_0) \\ &= \lambda(ap(x_0)) + \mu(bp(x_0)) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Για την ανισότητα $f(x) \leqslant p(x)$ παρατηρούμε ότι: αν $a \geqslant 0$, τότε $f(ax_0) = ap(x_0) = p(ax_0)$, ενώ αν $a < 0$, τότε

$$f(ax_0) = -f((-a)x_0) = -p(-ax_0) \leqslant p(ax_0),$$

αφού κάθε υπογραμμικό συναρτησοειδές ικανοποιεί την $-p(-z) \leqslant p(z)$.

4. *Αποδείξτε ότι η* $p(x) = \limsup_n \xi_n$, *όπου* $x = (\xi_n) \in \ell_\infty$ *ορίζει ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές στον* ℓ_∞.

Υπόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες του lim sup: αν $x \in \ell_\infty$ και $\lambda \geqslant 0$, τότε

$$p(\lambda x) = \limsup_n (\lambda x_n) = \lambda \limsup_n x_n = \lambda p(x),$$

και αν $x, y \in \ell_\infty$ τότε

$$p(x+y) = \limsup_n (x_n + y_n) \leqslant \limsup_n x_n + \limsup_n y_n = p(x) + p(y).$$

5. *Έστω X χώρος με νόρμα, και* $p : X \to \mathbb{R}$ *υποπροσθετικό συναρτησοειδές (δεν υποθέτουμε δηλαδή ότι είναι θετικά ομογενές.) Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν* $p(0) = 0$ *και το* p *είναι συνεχές στο 0, τότε είναι συνεχές σε κάθε* $x_0 \in X$.

(β) *Αν* $p(x) \geqslant 0$ *έξω από μιά σφαίρα* $\{x : \|x\| = r\}$, $r > 0$, *τότε* $p(x) \geqslant 0$ *για κάθε* $x \in X$.

Υπόδειξη. (α) Το p είναι συνεχές στο 0 και $p(0) = 0$, άρα για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|z\| < \delta \Longrightarrow |p(z)| < \varepsilon.$$

Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αν $\|x - x_0\| < \delta$, τότε και $\|x_0 - x\| = \|x - x_0\| < \delta$, οπότε

$$|p(x - x_0)| < \varepsilon, \qquad |p(x_0 - x)| < \varepsilon.$$

Από την υποπροσθετικότητα του p,

$$p(x) - p(x_0) \leqslant p(x - x_0) \leqslant |p(x - x_0)| < \varepsilon$$

και

$$p(x_0) - p(x) \leqslant p(x_0 - x) \leqslant |p(x_0 - x)| < \varepsilon,$$

άρα $|p(x) - p(x_0)| < \varepsilon$. Δηλαδή, το p είναι συνεχές στο x_0.

(β) Έστω $r > 0$, και ας υποθέσουμε ότι για κάποιο x_0 με $\|x_0\| = r$ ισχύει η $p(x_0) < 0$. Τότε,

$$p(2x_0) = p(x_0 + x_0) \leqslant p(x_0) + p(x_0) = 2p(x_0) < 0.$$

Όμως, $\|2x_0\| = 2r \neq r$, άρα $2x_0 \notin \{x : \|x\| = r\}$. Από την υπόθεσή μας, $p(2x_0) \geqslant 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $p(x) \geqslant 0$ και στην $\{x : \|x\| = r\}$.

Αν $r = 0$, τότε $p(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \notin 0$. Όμως, $p(0) = p(0+0) \leqslant 2p(0)$ άρα $p(0) \geqslant 0$. Δηλαδή, $p(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$.

6. *Έστω X διανυσματικός χώρος και* $p : X \to [0, +\infty)$ *συνάρτηση τέτοια ώστε (α)* $p(x) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = 0$, *και (β)* $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και κάθε* $x \in X$. *Αποδείξτε ότι η* p *είναι νόρμα αν και μόνο αν το σύνολο* $B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ *είναι κυρτό.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η p είναι νόρμα: τότε ικανοποιεί και την $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ για κάθε $x, y \in X$. Έστω $x, y \in B$ και $t \in (0,1)$. Έχουμε

$$p((1-t)x+ty) \leqslant p((1-t)x)+p(ty) = (1-)p(x)+tp(y) \leqslant (1-t)\cdot 1+t\cdot 1 = 1,$$

άρα $(1-t)x+ty \in B$. Έπεται ότι το B είναι κυρτό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το B είναι κυρτό. Από τις υποθέσεις της άσκησης, η p ικανοποιεί όλες οι ιδιότητες της νόρμας εκτός από την τριγωνική ανισότητα. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι αν $x, y \in X$ τότε $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x, y \neq 0$ (αν για παράδειγμα $x = 0$ τότε η $p(0+y) \leqslant p(0)+p(y)$ ισχύει ως ισότητα αφού $0+y = y$ και $p(0) = 0$). Τότε, $p(x) > 0$ και $p(y) > 0$. Παρατηρούμε ότι $\frac{x}{p(x)} \in B$ και $\frac{y}{p(y)} \in B$. Για παράδειγμα,

$$p\left(\frac{x}{p(x)}\right) = \frac{1}{p(x)}\cdot p(x) = 1$$

(εφαρμόζουμε την ιδιότητα (β) με $\lambda = \frac{1}{p(x)} > 0$). Άρα, $\frac{x}{p(x)} \in B$ από τον ορισμό του B.

Επιλέγουμε $t = \frac{p(y)}{p(x)+p(y)} \in (0,1)$, οπότε $1-t = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)}$. Αφού το B είναι κυρτό, έχουμε

$$(1-t)\frac{x}{p(x)}+t\frac{y}{p(y)} \in B \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p(x)+p(y)}(x+y) \in B.$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{p(x)+p(y)}p(x+y) = p\left(\frac{1}{p(x)+p(y)}(x+y)\right) \leqslant 1,$$

δηλαδή $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$.

7. *Έστω X γραμμικός χώρος και $p : X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό συναρτησοειδές. Αποδείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε*

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x), \qquad x \in X.$$

Υπόδειξη. Παίρνουμε τυχόν $x_0 \neq 0$ στον X. Θεωρούμε τον $Z = \mathrm{span}\{x_0\}$, και ορίζουμε $g : Z \to \mathbb{R}$, με $g(ax_0) = ap(x_0)$. Από την Άσκηση 3, το g είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον Z, και ικανοποιεί την $g(z) \leqslant p(z)$ στον Z.

Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, που επεκτείνει το g, και ικανοποιεί την

$$f(x) \leqslant p(x), \qquad x \in X.$$

Τέλος,

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) \Longrightarrow f(x) \geqslant -p(-x), \qquad x \in X.$$

Δηλαδή, $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$ για κάθε $x \in X$.

8. *Έστω X γραμμικός χώρος και $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ ημινόρμες. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα*

$$|f(x)| \leqslant p_1(x)+p_2(x),$$

για κάθε $x \in X$, *αποδείξτε ότι υπάρχουν γραμμικά συναρτησοειδή* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f = f_1 + f_2$ *και*

$$|f_i(x)| \leqslant p_i(x), \quad i = 1, 2, \ x \in K.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $p : X \times X \to \mathbb{R}$ με $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η p είναι ημινόρμα. Ο $W = \{(x, x) : x \in X\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $X \times X$. Αν ορίσουμε $\psi_0 : W \to \mathbb{K}$ με $\psi(x, x) = f(x)$, τότε το ψ_0 είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον W και φράσσεται από την p: έχουμε

$$|\psi_0(x, x)| = |f(x)| \leqslant p_1(x) + p_2(x) = p(x, x)$$

για κάθε $(x, x) \in W$. Από το θεώρημα Hahn–Banach, το ψ επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\psi : X \times X \to \mathbb{K}$ με

$$|\psi(x_1, x_2)| \leqslant p_1(x_1) + p_2(x_2)$$

για κάθε $(x_1, x_2) \in X \times X$. Ορίζουμε $f_1 : X \to \mathbb{K}$ με $f_1(x) = \psi(x, 0)$ και $f_2 : X \to \mathbb{K}$ με $f_2(x) = \psi(0, x)$. Τα f_1, f_2 είναι γραμμικά συναρτησοειδή και

$$f(x) = \psi_0(x, x) = \psi(x, x) = \psi(x, 0) + \psi(0, x) = f_1(x) + f_2(x)$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή $f = f_1 + f_2$. Επίσης, $|f_1(x)| = |\psi(x, 0)| \leqslant p(x, 0) = p_1(x) + p_2(0) = p_1(x)$ για κάθε $x \in X$ και, όμοια, $|f_2(x)| \leqslant p_2(x)$ για κάθε $x \in X$.

9. *Αποδείξτε ότι αν ο* X *έχει τουλάχιστον* n *το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε και ο* X^* *έχει τουλάχιστον* n *το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.*

Υπόδειξη. Έστω $x_1, \ldots, x_n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X. Ξέρουμε ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$, υπάρχει $f \in X^*$ με $f(x_j) = a_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ τέτοια ώστε

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Τα $f_1, \ldots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \ldots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j \leqslant n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \ldots + t_n f_n)(x_j) = t_1 f_1(x_j) + \ldots + t_n f_n(x_j) = t_j \cdot 1 = t_j.$$

Άρα, $t_1 = \ldots = t_n = 0$.

10. *Έστω* Y *κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα* X, *τέτοιος ώστε: αν* $f \in X^*$ *και* $f|_Y \equiv 0$, *τότε* $f \equiv 0$. *Αποδείξτε ότι* $Y = X$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X \setminus Y$. Αφού ο Y είναι κλειστός και $x \notin Y$, υπάρχει $f \in X^*$ που ικανοποιεί τα εξής:

$$f(y) = 0, \ \ y \in Y, \qquad \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach). Αυτό είναι άτοπο, γιατί η υπόθεση μας λέει ότι

$$f|_Y \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Άρα, $Y = X$.

11. *Έστω* Y *υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα* X. *Ορίζουμε*

$$A = \{f \in X^* : Y \subseteq \mathrm{Ker}(f)\}.$$

Αποδείξτε ότι $\overline{Y} = \bigcap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\}$.

Υπόδειξη. Έστω $y \in \overline{Y}$. Υπάρχουν $y_n \in Y$ με $y_n \to y$. Για κάθε $f \in A$ έχουμε $f(y_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(y) = \lim f(y_n) = 0.$$

Δηλαδή, $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Αφού το $f \in A$ ήταν τυχόν, $y \in \cap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\}$. Αφού το $y \in \overline{Y}$ ήταν τυχόν,

$$\overline{Y} \subseteq \bigcap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\}.$$

Έστω ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος. Τότε, υπάρχει $z \in \cap\{\mathrm{Ker}(f) : f \in A\} \setminus \overline{Y}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\| = 1$, $g(z) \neq 0$ και $g(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{Y}$. Τότε, $g \in A$ και $z \notin \mathrm{Ker}(g)$, το οποίο είναι άτοπο.

12. *Έστω* X *χώρος με νόρμα, και* A *μη κενό υποσύνολο του* X. *Αποδείξτε ότι:* $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ *αν και μόνο αν, για κάθε* $f \in X^*$ *με* $f|_A \equiv 0$, *ισχύει* $f(x) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $x \in \overline{\mathrm{span}(A)}$. Έστω $f \in X^*$ με $f(a) = 0$ για κάθε $a \in A$. Λόγω γραμμικότητας του f συμπεραίνουμε ότι $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathrm{span}(A)$, και λόγω συνέχειας του f συμπεραίνουμε ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \overline{\mathrm{span}(A)}$ (εξηγήστε με την αρχή της μεταφοράς ή χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι κλειστός και περιέχει τον $\mathrm{span}(A)$). Ειδικότερα, $f(x) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ με $f|_A \equiv 0$ ισχύει $f(x) = 0$ και ότι $x \notin \overline{\mathrm{span}(A)}$. Ειδικότερα, $x \neq 0$ (γιατί;). Από βασική εφαρμογή του θεωρήματος Hahn–Banach υπάρχει $g \in X^*$ τέτοιο ώστε $g|_{\overline{\mathrm{span}(A)}} \equiv 0$, $\|g\| = 1$ και $g(x) = \|x\| > 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $g|_A \equiv 0$ και $g(x) \neq 0$.

13. *Έστω* X *χώρος με νόρμα και* Y *υπόχωρος του* X. *Αποδείξτε ότι ο* Y *είναι πυκνός υπόχωρος του* X *αν και μόνο αν για κάθε* $f \in X^*$ *με* $f\big|_Y \equiv 0$ *ισχύει* $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X. Έστω $f \in X^*$ με $f\big|_Y \equiv 0$. Τότε, $Y \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ και αφού ο $\mathrm{Ker}(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X συμπεραίνουμε ότι $X = \overline{Y} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, δηλαδή $\mathrm{Ker}(f) = X$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $f \equiv 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ με $f\big|_Y \equiv 0$ ισχύει $f \equiv 0$. Έστω ότι ο Y δεν είναι πυκνός υπόχωρος του X. Τότε, ο $\overline{Y}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f \neq 0$, $f \in X^*$ ώστε $f\big|_Y \equiv 0$. Αυτό είναι άτοπο (από την υπόθεση θα είχαμε $f \equiv 0$).

14. *Έστω X χώρος με νόρμα, και (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in X^*$ με την ιδιότητα*

$$\liminf_n f_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_n f_n(x), \qquad x \in X.$$

Υπόδειξη. Το $p(x) = \limsup f_n(x)$ είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές στον X. Αν $x, y \in X$, τότε

$$p(x+y) = \limsup f_n(x+y) = \limsup[f_n(x)+f_n(y)] \leqslant \limsup f_n(x)+\limsup f_n(y) = p(x)+p(y),$$

και αν $\lambda \geqslant 0$,

$$p(\lambda x) = \limsup f_n(\lambda x) = \limsup[\lambda f_n(x)] = \lambda \limsup f_n(x) = \lambda p(x).$$

Τώρα εφαρμόζουμε την Άσκηση 7: υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\liminf f_n(x) = -\limsup f_n(-x) \leqslant f(x) \leqslant \limsup f_n(x), \qquad x \in X.$$

15. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του X και $f \in Y^*$. Αποδείξτε ότι το σύνολο*

$$A(f) := \{g \in X^* : g\big|_Y = f \ \text{ και } \ \|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}\}$$

είναι μη κενό και κυρτό.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Hahn-Banach γνωρίζουμε ότι υπάρχει $g_0 \in X^*$ τέτοιο ώστε $g_0\big|_Y = f$ και $\|g_0\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$. Τότε $g_0 \in A(f)$, άρα το $A(f)$ είναι μη κενό.

Έστω $g_1, g_2 \in A(f)$ και $t \in (0,1)$. Αφού ο X^* είναι διανυσματικός χώρος, έχουμε $(1-t)g_1 + tg_2 \in X^*$. Επίσης, για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned}|(1-t)g_1(x) + tg_2(x)| &\leqslant (1-t)|g_1(x)| + t|g_2(x)| \leqslant ((1-t)\|g_1\|_{X^*} + t\|g_2\|_{X^*})\|x\| \\ &= ((1-t)\|f\|_{Y^*} + t\|f\|_{Y^*})\|x\| = \|f\|_{Y^*}\|x\|.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} \leqslant \|f\|_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$(1-t)g_1 + tg_2\big|_Y = (1-t)g_1\big|_Y + tg_2\big|_Y = (1-t)f + tf = f,$$

και

$$\|(1-t)g_1+tg_2\|_{X^*} = \sup_{x\in S_X} |(1-t)g_1(x)+tg_2(x)| \geqslant \sup_{y\in S_Y} |(1-t)g_1(y)+tg_2(y)| = \sup_{y\in S_Y} |f(y)| = \|f\|_{Y^*}.$$

Άρα, $\|(1-t)g_1 + tg_2\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$, και έπεται ότι $(1-t)g_1 + tg_2 \in A(f)$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $A(f)$ είναι κυρτό.

16. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν*

$$M = \sup\{f(Tx) : \|x\| \leqslant 1, \|f\| \leqslant 1\} < +\infty.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείξτε ότι $\|T\| = M$.

Υπόδειξη. Το δεξιό μέλος ισούται με

$$M = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leqslant 1} f(Tx) \right) = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y,$$

από το θεώρημα Hahn-Banach (για το $Tx \in Y$). Όμως, ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < +\infty,$$

και τότε $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|$.

17. *Έστω* X, Y *δύο χώροι με νόρμα, και* $X \neq \{0\}$. *Αποδείξτε ότι αν ο* $B(X,Y)$ *είναι πλήρης, τότε ο* Y *είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Σταθεροποιούμε $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$. Έστω (y_n) βασική ακολουθία στον Y. Ορίζουμε $T_n : X \to Y$ με $T_n(x) = f(x)y_n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|T_n - T_m\| &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|f(x)(y_n - y_m)\|_Y = \left(\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |f(x)| \right) \cdot \|y_n - y_m\| \\ &= \|f\| \cdot \|y_n - y_m\| = \|y_n - y_m\|, \end{aligned}$$

δηλαδή, η (T_n) είναι βασική ακολουθία στον $B(X,Y)$. Αφού ο $B(X,Y)$ έχει υποτεθεί πλήρης, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $T_n \to T$, δηλαδή

$$(*) \qquad T(x) = \lim_{n \to \infty} (f(x)y_n), \quad x \in X.$$

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = 1$. Τότε, αν ορίσουμε $y = T(x)$, έχουμε $y_n \to y$ από την $(*)$.

18. *Έστω* X *χώρος με νόρμα και* $x_1, \ldots, x_n \in X$. *Αποδείξτε ότι*

$$\sup\left\{ \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\| : \varepsilon_i = \pm 1 \right\} = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| : \|x^*\|_{X^*} = 1 \right\} = \sup\left\{ \Big\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \Big\| : |a_i| \leqslant 1 \right\}.$$

Υπόδειξη. Συμβολίζουμε με A, B και C τα τρία supremum στην εκφώνηση της άσκησης.

Για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\|_{X^*} = 1$ και

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\| = x^* \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^*(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| \leqslant B.$$

Συνεπώς, $A \leqslant B$.

Για κάθε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\|_{X^*} = 1$ και για κάθε $i = 1, \ldots, n$ μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_i = \pm 1$ ώστε $|x^*(x_i)| = \varepsilon_i x^*(x_i)$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x^*(x_i) = x^* \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right) \leqslant \|x^*\|_{X^*} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \Big\| \leqslant A.$$

Συνεπώς, $B \leqslant A$ και έχουμε αποδείξει ότι $A = B$.

Η ανισότητα $A \leqslant C$ είναι προφανής αν παρατηρήσουμε ότι

$$\left\{\Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} \subseteq \left\{\Big\|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\Big\| : |a_i| \leqslant 1\right\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θεωρούμε τη συνάρτηση $G : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$G(a_1,\dots,a_n) = \Big\|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\Big\|.$$

Παρατηρούμε ότι η G είναι συνεχής και κυρτή (εξηγήστε τις λεπτομέρειες), άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποια κορυφή $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, του κύβου $[-1,1]^n$ (για μια αυστηρή απόδειξη, δείξτε πρώτα ότι κάθε $a = (a_1,\dots,a_n) \in [-1,1]^n$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός σημείων της μορφής $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την κυρτότητα της f). Δηλαδή, για κάθε $a = (a_1,\dots,a_n) \in [-1,1]^n$ ισχύει ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\Big\| = G(a_1,\dots,a_n) \leqslant \sup\{G(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) : \varepsilon_i = \pm 1\} \;= \sup\left\{\Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\Big\| : \varepsilon_i = \pm 1\right\} = A.$$

Συνεπώς, $C \leqslant A$.

19. *Έστω Y πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Αποδείξτε ότι οι X^* και Y^* είναι ισομετρικά ισομορφικοί.*

Υπόδειξη. Αφού ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X, γνωρίζουμε ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : Y \to \mathbb{K}$ (και γενικότερα, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : Y \to Z$, όπου Z χώρος με νόρμα) έχει μοναδική επέκταση σε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $g : X \to \mathbb{K}$. Επιπλέον, λόγω της πυκνότητας του Y στον X, βλέπουμε εύκολα ότι $\|g\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ (για παράδειγμα, δείξτε πρώτα ότι η B_Y είναι πυκνή στην B_X, οπότε $\|g\|_{X^*} = \sup\{|g(x)| : x \in B_X\} = \sup\{|g(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_Y\} = \|f\|_{Y^*}$).

Ορίζουμε $T : Y^* \to X^*$ με $T(f) = g$, όπου g η μοναδική αυτή επέκταση του f. Αποδεικνύουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής: αν $f_1, f_2 \in Y^*$ και $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, τότε $g := t_1T(f_1)+t_2T(f_2) \in X^*$ και $g\big|_Y = t_1T(f_1)\big|_Y + t_2(Tf_2)\big|_Y = t_1f_1+t_2f_2$. Αφού $T(t_1f_1+t_2f_2)\big|_Y = t_1f_1+t_2f_2$, λόγω μοναδικότητας της επέκτασης συμπεραίνουμε ότι $T(t_1f_1+t_2f_2) = t_1T(f_1)+t_2T(f_2)$.

Από την $\|T(f)\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ έχουμε ότι ο T είναι ισομετρία.

Τέλος, ο T είναι επί: αν $g \in X^*$ τότε $g\big|_Y \in Y^*$ και το g είναι η μοναδική φραγμένη επέκταση του f. Άρα, $g = T(f)$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

20. *Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $E_n = \overline{\mathrm{span}}\{x_k : k \neq n\}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει ακολουθία (f_n) στον X^* ώστε $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$ για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$.*

(β) *Για κάθε* n *ισχύει* $x_n \notin E_n$.

Υπόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β): Έστω $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_k \in \operatorname{Ker}(f_n)$ για κάθε $k \neq n$ (από την υπόθεση έχουμε $f_n(x_k) = 0$ αν $k \neq n$) και αφού ο $\operatorname{Ker}(f_n)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X έπεται ότι $\operatorname{span}\{x_k : k \neq n\} \subseteq \operatorname{Ker}(f_n)$. Όμως, $f_n \in X^*$ άρα ο $\operatorname{Ker}(f_n)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Άρα, $E_n = \overline{\operatorname{span}}\{x_k : k \neq n\} \subseteq \operatorname{Ker}(f_n)$. Δηλαδή, $f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in E_n$. Αφού $f_n(x_n) = 1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $x_n \notin E_n$.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο E_n είναι κλειστός υπόχωρος του X και $x_n \notin E_n$, από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach υπάρχει $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_n(x_n) \neq 0$ και $f_n\big|_{E_n} \equiv 0$. Πολλαπλασιάζοντας, αν χρειαστεί, το f_n με κατάλληλο $\lambda \neq 0$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n(x_n) = 1$. Αφού $x_k \in E_n$ για κάθε $k \neq n$, έχουμε $f_n(x_k) = 0$ για κάθε $k \neq n$. Δηλαδή, $f_n(x_k) = \delta_{n,k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία (f_n) που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ικανοποιεί το (α).

21. *Έστω* $X \neq \{0\}$ *διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και* (x_n) *πυκνή ακολουθία στον* X. *Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία* (f_n) *στον* X^* *με* $\|f_n\| = 1$ *και* $f_n(x_n) = \|x_n\|$ *για κάθε* n. *Αποδείξτε επίσης ότι κάθε τέτοια ακολουθία διαχωρίζει τα σημεία του* X *και ικανοποιεί την* $\sup_n |f_n(x)| = \|x\|$ *για κάθε* $x \in X$.

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f_n\| = 1$ και $f_n(x_n) = \|x_n\|$ είναι γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach. Για να δείξουμε ότι η (f_n) διαχωρίζει τα σημεία του X αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $0 \neq z \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(z) \neq 0$ (κατόπιν, αν μας δώσουν $x, y \in X$ με $x \neq y$ θεωρούμε το $z = x - y \neq 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f_n(x) - f_n(y) = f_n(x-y) = f_n(z) \neq 0$, δηλαδή $f_n(x) \neq f_n(y)$).

Έστω $z \neq 0$ και ας υποθέσουμε ότι $f_n(z) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|z - x_n\| < \frac{1}{2}\|z\|$. Τότε,

$$\|x_n\| = |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(z)| = |f_n(x_n - z)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x_n - z\| < \frac{1}{2}\|z\|.$$

Όμως,

$$\|x_n\| \geqslant \|z\| - \|x_n - z\| > \|z\| - \frac{1}{2}\|z\|$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θεωρούμε $x \neq 0$ και για τυχόν $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\|x\|$ επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_N - x\| < \varepsilon$. Όπως πριν, έχουμε $\|x_N\| > \|x\| - \varepsilon$ και

$$\|x\| - \varepsilon < \|x_N\| = |f_N(x_N)| \leqslant |f_N(x)| + |f_N(x_N - x)| \leqslant |f_N(x)| + \|f_N\| \cdot \|x_N - x\| < |f_N(x)| + \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\sup_n |f_n(x)| \geqslant |f_N(x)| > \|x\| - 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|x\|/2)$ ήταν τυχόν, έχουμε $\sup_n |f_n(x)| \geqslant \|x\|$.

Η αντίστροφη ανισότητα είναι απλή: για κάθε n έχουμε $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x\| = \|x\|$, άρα $\sup\limits_n |f_n(x)| \leqslant \|x\|$.

22. *Έστω Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του χώρου Banach X. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Η απεικόνιση $T : X^* \to Y^*$ με $T(f) = f\big|_Y$ είναι γραμμική, φραγμένη και επί του Y^*.*

(β) *Υπάρχει μια 1-1 (όχι αναγκαστικά γραμμική) απεικόνιση $\varphi : Y^* \to X^*$ με $\|\varphi(y^*)\| = \|y^*\|$.*

(γ) *Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος τότε και ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. (α) Αν $f \in X^*$ τότε η $T(f) = f\big|_Y : Y \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική απεικόνιση και για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$|(Tf)(y)| = |f(y)| \leqslant \|f\|_{Y^*}\|y\|,$$

δηλαδή $T(f) \in Y^*$ και $\|T(f)\|_{Y^*} \leqslant \|f\|_{X^*}$. Επίσης, αν $f, g \in X^*$ και $a, b \in \mathbb{K}$ τότε

$$T(af + bg) = af + bg\big|_Y = af\big|_Y + bg\big|_Y = aT(f) + bT(g),$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T\| \leqslant 1$. Για να δείξουμε ότι ο T είναι επί, θεωρούμε $g \in Y^*$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f\big|_Y = g$. Τότε, $T(f) = g$.

(β) Για κάθε $y^* \in Y^*$ επιλέγουμε $f_{y^*} \in X^*$ τέτοιο ώστε $f_{y^*}\big|_Y = y^*$ και $\|f_{y^*}\| = \|y^*\|$ (θεώρημα Hahn-Banach) και ορίζουμε $\varphi(y^*) = f_{y^*}$. Τότε, $\|\varphi(y^*)\| = \|y^*\|$. Μένει να δείξουμε ότι η φ είναι 1-1: έστω y_1^*, y_2^* με $\varphi(y_1^*) = \varphi(y_2^*)$. Τότε,

$$y_1^* = \varphi(y_1^*)\big|_Y = \varphi(y_2^*)\big|_Y = y_2^*.$$

Άρα, η φ είναι 1-1.

(γ) Έστω $D := \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Ορίζουμε $y_n^* = x_n^*\big|_Y \in Y^*$ και θα δείξουμε ότι το $E := \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y^*.

Έστω $y^* \in Y^*$ και $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*\big|_Y = y^*$. Από την πυκνότητα του D στον X^* υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x^* - x_n^*\|_{X^*} < \varepsilon$. Τότε, $(x^* - x_n^*)\big|_Y = y^* - y_n^*$ και

$$\begin{aligned}\|y^* - y_n^*\|_{Y^*} &= \sup_{x\in B_Y} |y^*(x) - y_n^*(x)| = \sup_{x\in B_Y} |x^*(x) - x_n^*(x)| \leqslant \sup_{x\in B_X} |x^*(x) - x_n^*(x)| \\ &= \|x^* - x_n^*\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $y_n^* \in E$, βλέπουμε ότι $y^* \in \overline{E}$. Αφού το $y^* \in Y^*$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y^* = \overline{E}$. Αφού το E είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του Y^*. ο Y^* είναι διαχωρίσιμος.

23. *Έστω Y μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Ο* $T : X^* \to Y^*$ *με* $T(f) = f\big|_Y$ *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

(β) $T(B_{X^*}) = B_{Y^*}$, $\|T\| = 1$ *και ο* T *είναι επί, αλλά δεν είναι 1-1 αν ο* Y *είναι κλειστός.*

(γ) *Αν ο* Y *είναι πυκνός υπόχωρος του* X *τότε ο* T *είναι ισομετρία (δείξτε πρώτα ότι η* B_Y *είναι πυκνό υποσύνολο της* B_X*).*

Υπόδειξη. Όταν λέμε ότι ο Y είναι μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του X εννοούμε ότι $Y \neq \{0\}$ και $Y \neq X$.

(α) Το είδαμε στο (α) της προηγούμενης άσκησης (Άσκηση 22).

(β) Πάλι στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι $\|T(f)\|_{Y^*} \leqslant \|f\|_{X^*}$ για κάθε $f \in X^*$. Άρα, $\|T\| \leqslant 1$ και $T(B_{X^*}) \subseteq B_{Y^*}$. Από την άλλη πλευρά, αν $g \in B_{Y^*} \setminus \{0\}$ υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f\big|_Y = g$ και $\|f\|_{X^*} = \|g\|_{Y^*} \leqslant 1$ (θεώρημα Hahn-Banach). Άρα, $g = T(f) \in T(B_{X^*})$, το οποίο αποδεικνύει ότι $B_{Y^*} \subseteq T(B_{X^*})$. Αυτό δείχνει και ότι $\|T\| \geqslant \frac{\|f\|_{X^*}}{\|g\|_{Y^*}} = 1$, δηλαδή $\|T\| = 1$. Έχουμε τώρα δείξει ότι $T(B_{X^*}) = B_{Y^*}$, και από τη γραμμικότητα του T έπεται ότι ο T είναι επί.

Έστω ότι ο $Y \neq \{0\}$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f \neq 0$ και $f\big|_Y \equiv 0$. Τότε, $T(f) = T(0) = 0$ ενώ $f \neq 0$. Άρα, ο T δεν είναι 1-1.

(γ) Έστω ότι ο Y είναι πυκνός υπόχωρος του X. Δείχνουμε πρώτα ότι $\overline{B_Y} = B_X$: θεωρούμε $x \neq 0$ με $\|x\| < 1$ και για τυχόν $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|$ βρίσκουμε $y \in Y$ ώστε $\|x - y\| < \varepsilon$. Τότε,

$$\|y\| \leqslant \|x\| + \|y - x\| > \|x\| + \varepsilon < 1,$$

δηλαδή $B(x, \varepsilon) \cap B_Y \neq \emptyset$. Άρα, $x \in \overline{B_Y}$. Αυτό δείχνει ότι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα $B(0,1)$ του X περιέχεται στην $\overline{B_Y}$, άρα $B_X = \overline{B(0,1)} \subseteq \overline{B_Y}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι απλός: έχουμε $B_Y \subseteq B_X$, άρα $\overline{B_Y} \subseteq \overline{B_X} = B_X$.

Τώρα, για κάθε $f \in X^{ast}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\|T(f)\|_{Y^*} = \sup\{|(Tf)(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_Y\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|_{X^*},$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμιοιούμε τη συνέχεια της f και το γεγονός ότι $\overline{B_Y} = B_X$ (εξηγήστε γιατί τα δύο supremum είναι ίσα).

24. *Έστω* X *διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμική ισομετρία* $T : X \to \ell_\infty$.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της S_X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Hahn-Banach βρίσκουμε $f_n \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$f_n(x_n) = \|f_n\| = 1.$$

Ορίζουμε $T : X \to \ell_\infty$ με

$$T(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γιατί $|f_n(x)| \leqslant \|x\|$ για κάθε n, γραμμικός, και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|T(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |f_n(x)| \leqslant \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x \in S_X$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x - x_n\| < \varepsilon$, οπότε $|f_n(x) - f_n(x_n)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x - x_n\| < \varepsilon$, άρα

$$|f_n(x)| > |f_n(x_n)| - \varepsilon = 1 - \varepsilon,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\|T(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_n |f_n(x)| > 1 - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|T(x)\| = 1$ για κάθε $x \in S_X$, και από τη γραμμικότητα του T έπεται ότι ο T είναι ισομετρία.

25. *Έστω X χώρος Banach, (x_i) ακολουθία στον X και (c_i) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.*

(β) *Υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| \leqslant M \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Υπόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β): Έστω $f \in X^*$ ώστε $f(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Τότε,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i,$$

άρα

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right| \leqslant \|f\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|,$$

δηλαδή ισχύει το (β) με $M = \|f\|$.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \operatorname{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ του X. Κάθε $x \in Y$ γράφεται (όχι αναγκαστικά μονοσήμαντα) στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Παρατηρούμε ότι αν το ίδιο x γράφεται και στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i$, τότε αν για παράδειγμα $m > n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i c_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) c_i + \sum_{i=n+1}^{m} \beta_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) x_i + \sum_{i=n+1}^{m} \beta_i x_i\right\| \\ &= M \left|\sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right| = M\|x - x\| = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή $\sum_{i=1}^{m} \beta_i c_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$. Όμοια ελέγχουμε ότι αυτό ισχύει και αν $m < n$ ή $m = n$. Έπεται ότι η σύνάρτηση $f_0 : Y \to \mathbb{K}$ με

$$f_0(x) = f_0\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i,$$

όπου $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, είναι καλά ορισμένη. Παρατηρήστε ότι $f_0(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ εξηγήστε γιατί). Από τον ορισμό της f_0 μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι είναι γραμμική. Τέλος, από την υπόθεση έχουμε ότι αν $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in Y$ τότε

$$|f_0(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| = M\|x\|,$$

δηλαδή $f_0 \in Y^*$ και $\|f_0\|_{Y^*} \leqslant M$. Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Hahn-Banach επεκτείνουμε το f_0 σε κάποιο $f \in X^*$ με $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*} \leqslant M$.

Αφού $x_i \in Y$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε $f(x_i) = f_0(x_i) = c_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

26. *Έστω X χώρος με νόρμα και W γραμμικός υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι μια νόρμα $|\cdot|$ στον W είναι ισοδύναμη με τον περιορισμό της νόρμας $\|\cdot\|$ του X στον W. Να δείξετε ότι υπάρχει νόρμα $|\cdot|'$ στον X, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$, της οποίας ο περιορισμός στον W να είναι η $|\cdot|$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε $a|x| \leqslant \|x\| \leqslant b|x|$ για κάθε $x \in W$.

Για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$ έχουμε $|f(x)| \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{a}\|x\|$ δηλαδή το f είναι $\|\cdot\|$–φραγμένο στον W και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε να επιλέξουμε επέκταση $G_f : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{K}$ με $\|G_f\| \leqslant 1/a$. Ορίζουμε $|\cdot|'$ στον X με

$$|x|' = \max\left\{\frac{1}{b}\|x\|, \sup\{|G_f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\}\right\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|\cdot|'$ είναι νόρμα στον X. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\|x\| \leqslant b|x|'$ για κάθε $x \in X$. Επίσης, αν $\|x\| = 1$ τότε $|G_f(x)| \leqslant \frac{1}{a}$ για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$, οπότε $|x|' \leqslant \frac{1}{a}$. Έπεται ότι

$$a|x|' \leqslant \|x\| \leqslant b|x|', \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $x \in W$. Έχουμε $\frac{1}{b}\|x\| \leqslant |x|$ και $|G_f(x)| = |f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $f \in (W, |\cdot|)^*$ με $\|f\| = 1$. Άρα, $|x|' \leqslant |x|$. Όμως,

$$|x|' \geqslant \sup\{|G_f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} = \sup\{|f(x)| : f \in (W, |\cdot|)^*, \|f\| = 1\} = |x|.$$

Άρα, τελικά, $|x| = |x|'$ για κάθε $x \in W$.

27. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(f) = f \circ T$. Αποδείξτε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$.*

Υπόδειξη. Η $f \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική σαν σύνθεση γραμμικών συναρτήσεων, και για κάθε $x \in X$,

$$|[T^*(f)](x)| = |f(Tx)| \leqslant \|f\| \cdot \|Tx\|_Y \leqslant \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|,$$

δηλαδή $T^*(f) \in X^*$ και $\|T^*(f)\| \leqslant \|T\| \cdot \|f\|$. Αυτό δείχνει ότι ο T^* ορίζεται καλά, και

$$(*) \qquad \|T^*\| \leqslant \|T\|.$$

Η γραμμικότητα του T^* ελέγχεται εύκολα:

$$T^*(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda(f \circ T) + \mu(g \circ T) = \lambda T^*(f) + \mu T^*(g).$$

Για την ισότητα των $\|T\|$ και $\|T^*\|$ χρησιμοποιούμε το θεώρημα Hahn-Banach: Έστω $x \in X$. Τότε, $Tx \in Y$ και υπάρχει $f \in Y^*$ τέτοιο ώστε $\|f\| = 1$ και $f(y) = \|y\| = \|Tx\|$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= f(y) = (f \circ T)(x) = [T^*(f)](x) \leqslant \|T^*(f)\| \cdot \|x\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| \\ &= \|T^*\| \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|T\| \leqslant \|T^*\|$, και από την $(*)$ έχουμε το ζητούμενο.

28. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν ο T είναι ισομορφισμός τότε ο T^* είναι ισομορφισμός.*

(β) *Οι χώροι c_0 και $\mathcal{C}[0,1]$ δεν είναι ισομορφικοί.*

Υπόδειξη. (α) Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι ο T^* ορίζεται καλά, είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, και $\|T^*\| = \|T\|$. Έστω ότι $T^*(y_1^*) = T^*(y_2^*)$ για κάποια $y_1^*, y_2^* \in Y^*$. Τότε, $y_1^*(Tx) = y_2^*(Tx)$ για κάθε $x \in X$, και αφού ο $T : X \to Y$ είναι επί έπεται ότι $y_1^*(y) = y_2^*(y)$ για κάθε $y \in Y$, δηλαδή $y_1^* = y_2^*$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T^* είναι 1-1.

Δείχνουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $y^* : Y \to \mathbb{K}$ με $y^*(y) = x^*(T^{-1}(y)$. Αφού ο T είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής απεικόνιση, άρα η $y^* = x^* \circ T^{-1}$ είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, δηλαδή $y^* \in Y^*$. Παρατηρούμε ότι

$$T^*(y^*) = y^* \circ T = x^* \circ T^{-1} \circ T = x^*.$$

Άρα $x^* \in T^*(Y^*)$ και αφού το $x^* \in X^*$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι ο T^* είναι επί.

Τέλος, δείχνουμε ότι ο $(T^*)^{-1}$ είναι φραγμένος. Από το γεγονός ότι ο T είναι ισομορφισμός έχουμε

$$\|T^{-1}(y)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|y\| \quad \Longrightarrow \quad T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\|\, B_X \quad \Longrightarrow \quad B_Y \subseteq \|T^{-1}\|\, T(B_X).$$

Έπεται ότι, για κάθε $y^* \in Y^*$ ισχύει

$$\|T^*(y^*)\|_{X^*} = \sup\{|y^*(Tx)| : x \in B_X\} \geqslant \frac{1}{\|T^{-1}\|} \sup\{|y^*(y)| : \|y \leqslant 1\} = \frac{1}{\|T^{-1}\|} \|y^*\|_{Y^*}.$$

Ισοδύναμα, αφού ο T^* είναι επί, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\|(T^*)^{-1}(x^*)\|_{Y^*} \leqslant \|T^{-1}\| \, \|x^*\|_{X^*},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο $(T^*)^{-1} : X^* \to Y^*$ είναι φραγμένος. Άρα, ο T^* είναι ισομορφισμός.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : c_0 \to \mathcal{C}[0,1]$. Τότε, ο $T^* : (\mathcal{C}[0,1])^* \to c_0^*$ είναι ισομορφισμός, από το (α), δηλαδή οι $(\mathcal{C}[0,1])^*$ και c_0^* είναι ισομορφικοί. Γνωρίζουμε ότι ο c_0^* είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον ℓ_1, ο οποίος είναι διαχωρίσιμος, άρα ο c_0^* είναι διαχωρίσιμος. Έπεται ότι ο $(\mathcal{C}[0,1])^*$ είναι διαχωρίσιμος.

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για κάθε $t \in [0,1]$ θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\delta_t : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{K}$ με $\delta_t(f) = f(t)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε δ_t είναι φραγμένο και ότι $\|\delta_t\| = 1$. Επίσης, αν $t, s \in [0,1]$ και $t \neq s$ τότε

$$\|\delta_t - \delta_s\| = \sup\{|\delta_t(f) - \delta_s(f)| : \|f\| \leqslant 1\} = \sup\{|f(t) - f(s)| : \|f\| \leqslant 1\} = 2,$$

διότι μπορούμε να ορίσουμε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(s) = 1$, $f(t) = -1$ και $\|f\| = 1$ (δώστε παράδειγμα). Αυτό δείχνει ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία στη μοναδιαία σφαίρα του $(\mathcal{C}[0,1])^*$ που ανά δύο έχουν απόσταση ίση με 2, και από αυτό γνωρίζουμε ότι έπεται ότι ο $(\mathcal{C}[0,1])^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

29. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την*

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $\dim(F) < \infty$, η μοναδιαία σφαίρα S_F του F είναι συμπαγής. Άρα, μπορούμε να βρούμε $y_1, \ldots, y_k \in S_F$ τα οποία να σχηματίζουν $\varepsilon/2$-δίκτυο: για κάθε $y \in S_F$ υπάρχει $j \leqslant k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ μπορούμε να βρούμε $y_j^* \in X^*$ με $\|y_j^*\| = 1$ και $y_j^*(y_j) = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, συνεπώς, αφού $\dim(X) = \infty$, υπάρχει $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή,

$$y_1^*(x) = \cdots = y_k^*(x) = 0.$$

Έστω $y \in S_F$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $j \leqslant k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\|y + \lambda x\| &\geqslant \|y_j + \lambda x\| - \|y - y_j\| \geqslant \|y_j + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geqslant y_j^*(y_j + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = y_j^*(y_j) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon},\end{aligned}$$

δηλαδή $\|y\| = 1 \leqslant (1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|$ για κάθε $y \in S_F$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έπεται το συμπέρασμα για κάθε $y \in F$: Αν $y = 0$, τότε είναι προφανές. Αν $0 \neq y \in F$, τότε $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\frac{y}{\|y\|} + \lambda\frac{x}{\|y\|}\right\|,$$

δηλαδή $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|$.

30. Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\dim(X) = n < \infty$ τότε $\dim(X^*) = n$.

(β) Αν $\dim(X) = n < \infty$ τότε ο X είναι αυτοπαθής.

(γ) Αν ο X είναι απειροδιάστατος τότε ο X^* είναι απειροδιάστατος.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε μια βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του X και τα γραμμικά συναρτησοειδή $f_k : X \to \mathbb{K}$, $k = 1, \dots, n$ με

$$f_k(x) = f_k\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = a_i.$$

Κάθε $f_k \in X^*$ διότι $\dim(X) < \infty$. Επίσης, αν $f \in X^*$ και αν θέσουμε $t_i = f(e_i)$, για κάθε $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in X$ έχουμε

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n t_i f_i(x),$$

δηλαδή $f = \sum_{i=1}^n t_i f_i \in \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_n\}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $X^* = \mathrm{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.

Επίσης, τα $f_1, \dots, f_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα: αν $t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n \equiv 0$, τότε για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$0 = (t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n)(e_i) = \sum_{k=1}^n t_i f_k(e_i) = t_i,$$

διότι $f_k(e_i) = 0$ αν $k \neq i$ και $f_i(e_i) = 1$.

Δείξαμε ότι τα $f_1, \dots, f_n$ είναι βάση του X^*, άρα $\dim(X^*) = n$.

(β) Θεωρούμε τη φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$. Γνωρίζουμε ότι η τ είναι γραμμική ισομετρία, άρα είναι 1-1. Από το (α) έχουμε $\dim(X^*) = n$, άρα πάλι από το (α) παίρνουμε $\dim(X^{**}) = \dim((X^*)^*) = \dim(X^*) = n$. Τότε, $\dim(X^{**}) = \dim(X) < \infty$, άρα η τ είναι επί. Συνεπώς, ο X είναι αυτοπαθής.

(γ) Έστω ότι $\dim(X^*) = n < \infty$. Τότε, $\dim(X^{**}) = \dim(X^*) = n < \infty$. Όμως, η $\tau : X \to \tau(X)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός και ο $\tau(X)$ είναι υπόχωρος του X^{**}, άρα $\dim(X) = \dim(\tau(X)) \leqslant \dim(X^{**}) < \infty$.

31. *Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν ο X είναι αυτοπαθής και Y είναι κλειστός υπόχωρος του X τότε ο Y είναι αυτοπαθής.*

(β) *Ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν ο X^* είναι αυτοπαθής.*

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$ είναι επί και πρέπει να δείξουμε ότι η φυσιολογική εμφύτευση $\tau_1 : Y \to Y^{**}$ είναι επί. Έστω $y^{**} : Y^* \to \mathbb{K}$ στον Y^{**}. Ορίζουμε $x^{**} : X^* \to \mathbb{K}$ με

$$x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*\big|_Y).$$

Το x^{**} είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον X^* (ελέγξτε το) και

$$\begin{aligned}\sup\{|x^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} &= \sup\{|y^{**}(x^*\big|_Y) : \|x^*\| \leqslant 1\}\\ &\leqslant \sup\{|y^{**}(y^*) : \|y^*\| \leqslant 1\} = \|y^{**}\|,\end{aligned}$$

(για τη μεσαία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $\|x^*\| \leqslant 1$ τότε $\|x^*\big|_Y\| \leqslant 1$, άρα $\{x^*\big|_Y : \|x^*\| \leqslant 1\} \subseteq \{y^* : \|y^*\| \leqslant 1\}$). Άρα, $x^{**} \in X^{**}$.

Αφού ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Δηλαδή, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$x^*(x) = [\tau(x)](x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*\big|_Y).$$

Θα δείξουμε ότι $x \in Y$. Αν $x \notin Y$ τότε, αφού ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X, υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*\big|_Y \equiv 0$ και $x^*(x) \neq 0$. Τότε, η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι

$$0 = y^{**}(x^*\big|_Y) = x^*(x) \neq 0,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x) = y^{**}$. Έστω $y^* \in Y^*$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*\big|_Y = y^*$. Γράφουμε

$$[\tau_1(x)](y^*) = y^*(x) = x^*(x) = [\tau(x)](x^*) = x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*\big|_Y) = y^{**}(y^*).$$

Αφού το $y^* \in Y^*$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\tau_1(x) = y^{**}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι κάθε $y^{**} \in Y^{**}$ γραφεται ως $y^{**} = \tau_1(x)$ για κάποιο $x \in Y$. Άρα, $\tau_1(Y) = Y^{**}$, δηλαδή ο Y είναι αυτοπαθής.

(β) Έστω $\tau : X \to X^{**}$ και $\tau_1 : X^* \to X^{***}$ οι κανονικές εμφυτεύσεις.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\tau(X) = X^{**}$. Έστω $x_0^{***} \in X^{***}$. Ζητάμε $x_0^* \in X^*$ ώστε $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Ορίζουμε το x_0^* ως εξής: αν $x \in X$ τότε $\tau(x) \in X^{**}$, οπότε θέτουμε

$$x_0^*(x) := (x_0^{***})(\tau(x)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το x_0^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και αφού

$$|x_0^*(x)| = |(x_0^{***})(\tau(x))| \leqslant \|x_0^{***}\| \cdot \|\tau(x)\| = \|x_0^{***}\| \cdot \|x\|,$$

βλέπουμε ότι $x_0^* \in X^*$ και $\|x_0^*\| \leqslant \|x_0^{***}\|$.

Θα δείξουμε ότι $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$. Άρα,

$$\begin{aligned}[\tau_1(x_0^*)](x^{**}) &= x^{**}(x_0^*) = [\tau(x)](x_0^*) = x_0^*(x) = x_0^{***}(\tau(x)) \\ &= x_0^{***}(x^{**}).\end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\tau_1(X^*) = X^{***}$ και ας υποθέσουμε ότι $\tau(X) \neq X^{**}$. Τότε, ο $\tau(X)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X^{**} άρα υπάρχει μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x_0^{***} \in X^{***}$ ώστε $x_0^{***}(\tau(x)) = 0$ για κάθε $x \in X$. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\tau_1(x_0^*) = x_0^{***}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_0^*(x) = [\tau(x)](x_0^*) = [\tau_1(x_0^*)](\tau(x)) = x_0^{***}(\tau(x)) = 0,$$

δηλαδή $x_0^* = 0$. Όμως τότε, $x_0^{***} = \tau_1(x_0^*) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

32. *Έστω X χώρος με νόρμα και K κυρτό υποσύνολο του X με $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$.*

(α) *Αποδείξτε ότι αν $x_1 \in \mathrm{int}(K)$ και $x_2 \in \overline{K}$ τότε $(1-t)x_1 + tx_2 \in \mathrm{int}(K)$ για κάθε $0 < t < 1$.*

(β) *Αποδείξτε ότι τα $\mathrm{int}(K)$ και $\overline{K}$ είναι κυρτά σύνολα.*

(γ) *Αποδείξτε ότι $\overline{\mathrm{int}(K)} = \overline{K}$ και $\mathrm{int}(\overline{K}) = \mathrm{int}(K)$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $0 < t < 1$ και $z = (1-t)x_1 + tx_2$. Γράφουμε

$$x_1 = \frac{1}{1-t}(z - tx_2).$$

Αφού $x_2 \in \overline{K}$, υπάρχει ακολουθία (u_k) στο K ώστε $u_k \to x_2$. Ορίζουμε

$$v_k = \frac{1}{1-t}(z - tu_k).$$

Τότε, $v_k \to x_1$. Αφού $x_1 \in \mathrm{int}(K)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x_1, \delta) \subseteq K$. Τότε, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $v_k \in B(x_1, \delta)$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Σταθεροποιούμε ένα $k \geqslant k_0$ και βρίσκουμε $\delta_1 > 0$ ώστε $B(v_k, \delta_1) \subseteq B(x_1, \delta) \subseteq K$. Τότε, το σύνολο $U := (1-t)B(v_k, \delta_1) + tu_k$ είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί) και, από την κυρτότητα του K και το γεγονός ότι $u_k \in K$ παίρνουμε

$$U := (1-t)B(v_k, \delta_1) + tu_k \subseteq (1-t)K + tK = K.$$

Αφού $z = (1-t)v_k + tu_k \in U \subseteq K$ και το U είναι ανοικτό, έπεται ότι $z \in \mathrm{int}(K)$.

(β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathrm{int}(K)$. Έστω $t \in (0,1)$ και $z_t = (1-t)x_1 + tx_2$. Θα δείξουμε ότι $z_t \in \mathrm{int}(K)$, οπότε το $\mathrm{int}(K)$ είναι κυρτό.

Υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε $B(x_1, \delta_1) \subseteq K$ και $B(x_2, \delta_2) \subseteq K$. Θέτοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε $B(x_1, \delta) \subseteq K$ και $B(x_2, \delta) \subseteq K$. Θα δείξουμε ότι $B(z_t, \delta) \subseteq K$, απ' όπου έπεται ότι $z_t \in \mathrm{int}(K)$.

Έστω $y \in B(z_t, \delta)$, δηλαδή $\|y - z_t\| < \delta$. Ορίζουμε $x_{1,t} = x_1 + (y - z_t)$ και $x_{2,t} = x_2 + (y - z_t)$. Τότε, $\|x_1 - x_{1,t}\| = \|x_2 - x_{2,t}\| = \|y - z_t\| < \delta$, άρα $x_{1,t} \in B(x_1, \delta) \subseteq K$ και όμοια $x_{2,t} \in K$. Όμως,

$$(1-t)x_{1,t} + tx_{2,t} = (1-t)x_1 + (1-t)(y - z_t) + tx_2 + t(y - z_t) = y + (1-t)x_1 + tx_2 - z_t = y,$$

άρα $y = (1-t)x_{1,t} + tx_{2,t} \in K$ από την κυρτότητα του K.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, έστω $x_1, x_2 \in \overline{K}$ και $0 < t < 1$. Υπάρχουν ακολουθίες $(u_k), (v_k)$ στο K τέτοιες ώστε $u_k \to x_1$ και $v_k \to x_2$. Αφού το K είναι κυρτό, για κάθε k έχουμε $(1-t)u_k + tv_k \in K$ και $(1-t)u_k + tv_k \to (1-t)x_1 + tx_2$, άρα $(1-t)x_1 + tx_2 \in \overline{K}$, και έπεται ότι το $\overline{K}$ είναι κυρτό.

(γ) Έχουμε $\mathrm{int}(K) \subseteq K$, άρα $\overline{\mathrm{int}(K)} \subseteq \overline{K}$. Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{K}$. Αφού $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$, υπάρχει $y \in \mathrm{int}(K)$. Από το (α), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $z_k := \frac{1}{k}y + \frac{k-1}{k}x \in \mathrm{int}(K)$. Όμως,

$$z_k = \frac{1}{k}y + \frac{k-1}{k}x \to x.$$

Άρα, $x \in \overline{\mathrm{int}(K)}$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, αρχικά έχουμε $K \subseteq \overline{K}$ άρα $\mathrm{int}(K) \subseteq \mathrm{int}(\overline{K})$. Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{int}(\overline{K})$. Σταθεροποιούμε κάποιο $y \in \mathrm{int}(K)$. Αν $y = x$ έχουμε $x \in \mathrm{int}(K)$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq x$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq \overline{K}$ και $y \notin B(x, \delta)$. Θα δείξουμε ότι $B(x, \delta/2) \subseteq K$, οπότε $x \in \mathrm{int}(K)$. Έστω $z \in B(x, \delta/2)$. Παρατηρήστε ότι $z \neq y$ διότι $y \notin B(x, \delta)$. Θεωρούμε το $v := z + \frac{\delta}{2}\frac{z-y}{\|z-y\|} \in B(x, \delta)$ (εφαρμόστε την τριγωνική ανισότητα) άρα $v \in \overline{K}$. Όμως, αν θέσουμε $\lambda = \frac{\delta}{2\|z-y\|} > 0$ και $t = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, έχουμε

$$(1-t)v + ty = \frac{1}{1+\lambda}(z + \lambda(z-y)) + \frac{\lambda}{1+\lambda}y = z.$$

Από το (α) έπεται ότι $z \in \mathrm{int}(K)$.

33. *Έστω X χώρος με νόρμα πάνω από το $\mathbb{R}$ και A, B μη κενά, ξένα, κυρτά υποσύνολα του X με την ιδότητα*

$$0 \notin \overline{A - B}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup\{f(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in A\}.$$

Υπόδειξη. Αφού $0 \notin \overline{A - B}$, μπορούμε να βρούμε συμμετρική περιοχή $U = D(0, \delta)$ του 0 ώστε $(U + U) \cap (A - B) = \emptyset$, οπότε $(A + U) \cap (B + U) = \emptyset$. Τα $A + U, B + U$ είναι ξένα, ανοικτά και κυρτά, συνεπώς διαχωρίζονται γνήσια: υπάρχουν συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(w) > \lambda \text{ αν } w \in A + U \text{ και } f(w) < \lambda \text{ αν } w \in B + U.$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει $z \in U$ με $f(z) > 0$. Τότε, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x - z \in A + U$ άρα $f(x) - f(z) = f(x - z) > \lambda$ και για κάθε $y \in B$ έχουμε $y + z \in B + U$ άρα $f(y) + f(z) = f(y + z) < \lambda$. Έπεται ότι

$$\sup_{y \in B} f(y) \leqslant \lambda - f(z) < \lambda + f(z) \leqslant \inf_{x \in A} f(x).$$

Κεφάλαιο 5

Χώροι Hilbert

1. *Έστω* X *χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και έστω* $x, y \in X$. *Αποδείξτε ότι:*

(α) $x \perp y$ *αν και μόνο αν* $\|x + ay\| = \|x - ay\|$ *για κάθε* $a \in \mathbb{R}$.

(β) $x \perp y$ *αν και μόνο αν* $\|x + ay\| \geqslant \|x\|$ *για κάθε* $a \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x - ay\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + \|ay\|^2 = \|x\|^2 - 2a\langle x, y\rangle + \|ay\|^2,$$

δηλαδή,

$$a\langle x, y\rangle = 0.$$

Παίρνοντας $a = 1$, βλέπουμε ότι $x \perp y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 = \|x - ay\|^2.$$

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 \geqslant \|x\|^2 \Longrightarrow \|x\|^2 + 2a\langle x, y\rangle + a^2\|y\|^2 \geqslant \|x\|^2,$$

δηλαδή,

$$2a\langle x, y\rangle + a^2\|x\|^2 \geqslant 0.$$

Διαιρώντας με a και παίρνοντας $a \to 0^+$, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle \geqslant 0$, ενώ παίρνοντας $a \to 0^-$, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle \leqslant 0$. Άρα, $\langle x, y\rangle = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν $x \perp y$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|x + ay\|^2 = \|x\|^2 + \|ay\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

2. *Έστω* H *χώρος Hilbert,* x_n, y_n *στη μοναδιαία μπάλα του* H, *και* $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. *Αποδείξτε ότι* $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Υπόδειξη. Υψώνουμε την $\|x_n - y_n\|$ στο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|x_n - y_n\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \\ &\leqslant 2 - 2\langle x_n, y_n\rangle \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - y_n\| \to 0$.

3. *Έστω* H *χώρος Hilbert, και* $x_n, x \in H$ *με τις ιδιότητες:* $\|x_n\| \to \|x\|$*, και, για κάθε* $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$*. Αποδείξτε ότι* $\|x_n - x\| \to 0$*.*

Υπόδειξη. Υψώνουμε την $\|x_n - x\|$ στο τετράγωνο, και εφαρμόζουμε την υπόθεση για $y = x$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|x_n - x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle \\ &\to \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\|x_n - x\| \to 0$.

4. *Έστω* X *χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και* A, B *μη κενά υποσύνολα του* X*, με* $A \subseteq B$*. Αποδείξτε ότι:*
(α) $A \subseteq A^{\perp\perp}$, (β) $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$, (γ) $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in A$. Από τον ορισμό του $A^{\perp}$, για κάθε $y \in A^{\perp}$ έχουμε $\langle x, y\rangle = 0$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$x \in (A^{\perp})^{\perp} =: A^{\perp\perp}.$$

Αφού το $x \in A$ ήταν τυχόν, έχουμε $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(β) Αν $x \in B^{\perp}$, τότε $x \perp y$ για κάθε $y \in B$. Αφού $A \subseteq B$, αυτό σημαίνει ότι $x \perp y$ για κάθε $y \in A$, άρα $x \in A^{\perp}$.

(γ) Εφαρμόζοντας το (α) για το $A^{\perp}$ στη θέση του A, έχουμε

$$A^{\perp} \subseteq (A^{\perp})^{\perp\perp} = A^{\perp\perp\perp}.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A \subseteq A^{\perp\perp}$, το (β) μάς δίνει

$$A^{\perp\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^{\perp} \subseteq A^{\perp}.$$

Επομένως, $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

5. *Έστω* H *χώρος Hilbert, και* Y *υπόχωρος του* H*. Αποδείξτε ότι ο* Y *είναι κλειστός αν και μόνο αν* $Y = Y^{\perp\perp}$*.*

Υπόδειξη. Ο $Y^{\perp\perp}$ είναι (πάντα) κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H, άρα, αν $Y = Y^{\perp\perp}$ τότε ο Y είναι κλειστός.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: ξέρουμε ότι $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$. Έστω $x \in Y^{\perp\perp}$. Αφού ο H είναι χώρος Hilbert και ο Y κλειστός υπόχωρός του, το x γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$, όπου $y \in Y$ και $z \in Y^{\perp}$. Όμως, $x \in Y^{\perp\perp}$ και $y \in Y \subseteq Y^{\perp\perp}$, άρα

$$z = x - y \in Y^{\perp\perp}.$$

Αφού $z \in Y^{\perp\perp} \cap Y^{\perp}$, έχουμε $z \perp z$. Άρα, $z = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y \in Y$, και αφού το $x \in Y^{\perp\perp}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $Y = Y^{\perp\perp}$.

6. *Έστω* M, N *κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Αποδείξτε ότι*

$$(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} \quad , \quad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

Υπόδειξη. Αφού $M, N \subseteq M + N$, έχουμε $(M+N)^{\perp} \subseteq M^{\perp}, N^{\perp}$, άρα

$$(M+N)^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap N^{\perp}.$$

Αντίστροφα, έστω $x \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$ και $w \in M + N$. Τότε, $w = m + n$ για κάποια $m \in M$ και $n \in N$, και αφού $x \perp m, n$ παίρνουμε

$$\langle x, w\rangle = \langle x, m\rangle + \langle x, n\rangle = 0,$$

δηλαδή, $x \perp w$. Έπεται ότι $x \in (M+N)^{\perp}$, δηλαδή

$$M^{\perp} \cap N^{\perp} \subseteq (M+N)^{\perp}.$$

Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ισότητα. Για τη δεύτερη, βάζουμε στην πρώτη τους $M^{\perp}, N^{\perp}$ στη θέση των M, N: έχουμε

$$M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = (M^{\perp} + N^{\perp})^{\perp},$$

και αφού οι M, N είναι κλειστοί, παίρνουμε

$$M \cap N = (M^{\perp} + N^{\perp})^{\perp}.$$

Παίρνοντας ορθογώνια συμπληρώματα, βλέπουμε ότι

$$(*) \qquad (M \cap N)^{\perp} = (M^{\perp} + N^{\perp})^{\perp\perp}.$$

Μένει να δείξουμε ότι: αν F είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του H, τότε $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ (σημειώστε ότι ο $M^{\perp} + N^{\perp}$ μπορεί να μην είναι κλειστός υπόχωρος του H). Στην Άσκηση 7 είδαμε ότι $F \subseteq F^{\perp\perp}$ και αφού ο $F^{\perp\perp}$ είναι κλειστός έπεται ότι $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$. Αν υπήρχε $z \in F^{\perp\perp} \setminus \overline{F}$, τότε το μη μηδενικό διάνυσμα $z - P_F(z)$ θα ανήκε στον $F^{\perp} \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$ (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο. Άρα, έχουμε ισότητα, και θέτοντας $F = M^{\perp} + N^{\perp}$ στην $(*)$ έχουμε το ζητούμενο.

7. *Δώστε παράδειγμα χώρου Hilbert* H *και γραμμικού υπόχωρου* F *του* H *με την ιδιότητα* $H \neq F + F^{\perp}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $H = \ell_2$, και σαν F παίρνουμε τον υπόχωρο c_{00} που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες. Προφανώς $F \neq H$, γιατί

$$\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \in \ell_2 \backslash c_{00}.$$

Από την άλλη πλευρά, $e_n \in c_{00}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν $y \in c_{00}^{\perp}$, το $y = (\eta_n)$ πρέπει να ικανοποιεί τις

$$\eta_n = \langle y, e_n \rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή $y = 0$. Άρα, $c_{00}^{\perp} = \{0\}$. Τότε,

$$c_{00} + c_{00}^{\perp} = c_{00} \neq \ell_2.$$

8. *Έστω H χώρος Hilbert, και W, Z κλειστοί υπόχωροι του H με την ιδιότητα: αν $w \in W$ και $z \in Z$, τότε $w \perp z$ (οι W και Z είναι κάθετοι). Αποδείξτε ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.*

Υπόδειξη. Έστω $x_n = w_n + z_n$ ακολουθία στον $W + Z$, η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in H$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $x = w + z$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $W + Z$ είναι κλειστός υπόχωρος του H (γιατί;).

Η (x_n) συγκλίνει, άρα είναι βασική ακολουθία: έχουμε $\|x_n - x_m\| \to 0$ καθώς $m, n \to \infty$. Όμως, από την καθετότητα των W και Z, και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε

$$\|w_n - w_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2,$$

και αυτό δείχνει ότι οι (w_n), (z_n) είναι ακολουθίες Cauchy στους W, Z αντίστοιχα. Οι W, Z είναι κλειστοί υπόχωροι του H, άρα είναι πλήρεις σαν μετρικοί χώροι. Επομένως, υπάρχουν $w \in W$ και $z \in Z$ τέτοια ώστε $w_n \to w$ και $z_n \to z$. Έπεται ότι $x_n = w_n + z_n \to w + z$, και από μοναδικότητα του ορίου, $x = w + z \in W + Z$.

9. *Σε έναν χώρο Hilbert H, θεωρούμε δύο κλειστούς υποχώρους M, N, και τις αντίστοιχες ορθογώνιες προβολές P_M, P_N. Εξετάστε αν ισχύει πάντα $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M$.*

Υπόδειξη. Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τους $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $N = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε,

$$(P_M \circ P_N)(1, 1) = P_M(1, 1) = (1, 0),$$

ενώ

$$(P_N \circ P_M)(1, 1) = P_N(1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα, $P_M \circ P_N \neq P_N \circ P_M$.

Ισχύει όμως ισότητα αν $M \perp N$: για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$(P_M \circ P_N)(x) = (P_N \circ P_M)(x) = 0,$$

δηλαδή $P_M \circ P_N = P_N \circ P_M \equiv 0$.

10. *Θεωρούμε τον* $\mathcal{C}[-1,1]$ *με εσωτερικό γινόμενο το* $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. *Βρείτε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt στις* $1, t, t^2$.

Βρείτε $a, b, c \in \mathbb{R}$ *τέτοιους ώστε να ελαχιστοποιείται το*

$$\int_{-1}^{1} (t^4 - a - bt - ct^2)^2 dt.$$

Υπόδειξη. Οι τρείς πρώτες συναρτήσεις που προκύπτουν από την ορθοκανονικοποίηση είναι οι εξής:

(α) $f_1(t) = \frac{1}{\|1\|} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(β) $f_2(t) = \frac{t-\langle t, f_1\rangle f_1(t)}{\|t-\langle t, f_1\rangle f_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$.

(γ) $f_3(t) = \frac{t^2-\langle t^2, f_1\rangle f_1(t)-\langle t^2, f_2\rangle f_2(t)}{\|t^2-\langle t^2, f_1\rangle f_1-\langle t^2, f_2\rangle f_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}(t^2 - \frac{1}{3})$.

Παρατηρούμε ότι

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |t^4 - a - bt - ct^2|^2 dt = d^2(t^4, \langle 1, t, t^2\rangle),$$

επομένως μπορούμε να βρούμε τα βέλτιστα a, b, c βρίσκοντας το πλησιέστερο σημείο του $\langle 1, t, t^2\rangle$ προς την t^4. Όμως, οι f_1, f_2, f_3 είναι ορθοκανονική βάση του $\langle 1, t, t^2\rangle$, άρα η λύση δίνεται από την

$$g(t) = \langle t^1, f_1\rangle f_1(t) + \langle t^4, f_2\rangle f_2(t) + \langle t^4, f_3\rangle f_3(t) = \ldots = \frac{6}{7}t^2 - \frac{3}{35},$$

το οποίο δίνει

$$a = -\frac{3}{35}, \quad b = 0, \quad c = \frac{6}{7}.$$

11. *Έστω* $T : H \to H$ *φραγμένος γραμμικός τελεστής, του οποίου η εικόνα είναι μονοδιάστατη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν* $u, v \in H$ *τέτοια ώστε*

$$T(x) = \langle x, u\rangle v, \quad x \in H.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{R}T) = \text{span}\{v\}$ για κάποιο $v \neq o$. Τότε, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$T(x) = \lambda_x v,$$

όπου ο $\lambda_x \in \mathbb{R}$ εξαρτάται από το x. Μπορούμε να υπολογίσουμε το λ_x μέσω του T ως εξής:

$$\langle Tx, v\rangle = \lambda_x \langle v, v\rangle \Longrightarrow \lambda_x = \Big\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι το $f : H \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x) = \Big\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle,$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$|f(x)| = |\Big\langle Tx, \frac{v}{\|v\|^2}\Big\rangle| \leqslant \|Tx\| \cdot \Big\|\frac{v}{\|v\|^2}\Big\| \leqslant \frac{\|T\|}{\|v\|}\|x\|.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_x = f(x) = \langle x, u\rangle, \quad x \in H.$$

Άρα, $T(x) = \lambda_x v = \langle x, u\rangle v$ για κάθε $x \in H$.

12. *Έστω W κλειστός γραμμικός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, και $f \in W^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $f_1 \in H^*$ τέτοιο ώστε $f_1|_W = f$ και $\|f_1\|_{H^*} = \|f\|_{W^*}$.*

Υπόδειξη. Ο W είναι χώρος Hilbert, άρα το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας δίνει μοναδικό $w \in W$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle w, x\rangle, \quad x \in W.$$

Αφού (προφανώς) $w \in H$, μπορούμε να ορίσουμε $f_1 : H \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = \langle w, x\rangle, \quad x \in H.$$

Τότε, το f_1 είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον H, επεκτείνει το f, και

$$\|f\|_{W^*} = \|w\| = \|f_1\|_{H^*}.$$

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα: έστω ότι κάποιο $g \in H^*$ ικανοποιεί τα παραπάνω. Τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz στον H, υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = \langle u, x\rangle, \quad x \in H.$$

Όμως τότε, $\langle w - u, x\rangle = 0$ για κάθε $x \in W$, οπότε $w - u = z \in W^{\perp}$. Τότε,

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|z\|^2$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα (εξηγήστε), και αφού $\|u\| = \|g\| = \|f\| = \|f_1\| = \|w\|$, πρέπει να έχουμε $\|z\| = 0$, το οποίο δίνει $z = 0 \Longrightarrow w = u$. Έπεται ότι $g = f_1$.

13. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακόλουθία στον X. Αν $x, y \in X$, αποδείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwarz, και κατόπιν την ανισότητα του Bessel:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle| &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle y, e_k\rangle^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \|x\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

14. *Έστω* Y *κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert* H, *και* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση του* Y. *Αποδείξτε ότι αν* $x \in H$, *τότε το πλησιέστερο σημείο του* Y *προς το* x *είναι το* $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$.

Υπόδειξη. Έστω y το πλησιέστερο σημείο του Y προς το x. Αφού $y \in Y$ και η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του Y, το y γράφεται στη μορφή

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle e_n.$$

Όμως ξέρουμε ότι $x - y \perp Y$ και $e_n \in Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\langle x - y, e_n\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, e_n\rangle = \langle y, e_n\rangle$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n.$$

15. *Αποδείξτε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση του* ℓ_2 *έχει την εξής ιδιότητα:*

$$\forall f \in \ell_2^*, \quad f(e_n) \to 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $f \in \ell_2^*$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει $y \in \ell_2$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle y, x\rangle, \quad x \in \ell_2.$$

Ειδικότερα, $f(e_n) = \langle y, e_n\rangle$. Όμως, από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle^2 = \|y\|^2 < +\infty,$$

άρα, $\langle y, e_n\rangle^2 \to 0$, δηλαδή $f(e_n) \to 0$.

16. *Έστω* H *χώρος Hilbert, και* (x_n) *ορθογώνια ακολουθία στον* H *(δηλαδή, αν* $n \neq m$, *τότε* $x_n \perp x_m$.*) Τότε, η* $\sum_n x_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η* $\sum_n \|x_n\|^2$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Ο H είναι πλήρης, άρα η $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ είναι Cauchy. Όμως, αν $l > m$ έχουμε

$$\|s_l - s_m\|^2 = \|x_{m+1} + \cdots + x_l\|^2 = \sum_{n=m+1}^{l}\|x_n\|^2,$$

από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Άρα, η (s_m) είναι Cauchy αν και μόνο αν η

$$t_m = \sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^2$$

είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$ συγκλίνει.

17. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και (e_k) μια ορθοκανονική ακολουθία στον X. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$|\{k \in \mathbb{N} : |\langle x, e_k\rangle| \geqslant 1/m\} \leqslant m^2\|x\|^2,$$

όπου με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Bessel έχουμε

$$\frac{1}{m^2}\cdot|\{k \in \mathbb{N} : |\langle x, e_k\rangle| \geqslant 1/m\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

άρα

$$|\{k \in \mathbb{N} : |\langle x, e_k\rangle| \geqslant 1/m\} \leqslant m^2\|x\|^2.$$

18. *Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και $x_1, \dots, x_n \in X$. Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{i\neq j}\|x_i - x_j\|^2 = n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|^2.$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geqslant 2$ για $i \neq j$, αποδείξτε ότι αν μιά μπάλα περιέχει όλα τα x_i, πρέπει να έχει ακτίνα τουλάχιστον $\sqrt{2(n-1)/n}$.

Υπόδειξη. Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j}\|x_i - x_j\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n}x_i\|^2 &= \sum_{i\neq j}(\|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle + \|x_j\|^2) + \langle\sum_{i=1}^{n}x_i, \sum_{j=1}^{n}x_j\rangle\\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 - 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle + \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 + 2\sum_{i<j}\langle x_i, x_j\rangle\\ &= n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.\end{aligned}$$

Αν $\|x_i - x_j\| \geqslant 2$ όταν $i \neq j$, τότε για κάθε $y \in X$ έχουμε

$$i \neq j \implies \|(x_i - y) - (x_j - y)\| \geqslant 2.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $y \in X$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\|y - x_i\| \leqslant r$, $i = 1, \dots, n$. Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{2}\cdot 4 &\leqslant \sum_{i\neq j}\|(x_i - y) - (x_j - y)\|^2\\ &= n\sum_{i=1}^{n}\|x_i - y\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n}x_i - ny\|^2\\ &\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\|x_i - y\|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n}r^2\\ &= n^2r^2.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$r^2 \geqslant \frac{2(n-1)}{n} \Longrightarrow r \geqslant \sqrt{\frac{2(n-1)}{n}}.$$

19. *Έστω* X *χώρος με εσωτερικό γινόμενο, και* $x_1, \ldots, x_n \in X$. *Αποδείξτε ότι*

$$\sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

όπου το εξωτερικό άθροισμα είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$.

Υπόδειξη. Αν $n = 1$, έχουμε $\|x\|^2 + \|-x\|^2 = 2\|x\|^2$.

Για το επαγωγικό βήμα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{k+1} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 &= \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left(\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i + x_{k+1}\Big\|^2 + \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i - x_{k+1}\Big\|^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left(\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 + \|x_{k+1}\|^2 \right) \\
&= 2 \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\
&= 2 \cdot 2^k \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 + 2 \cdot 2^k \|x_{k+1}\|^2 \\
&= 2^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά: τον κανόνα του παραλληλογράμμου για τα $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i$ και x_{k+1} (για κάθε επιλογή των $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$), την επαγωγική υπόθεση για τα $x_1, \ldots, x_k$, και το γεγονός ότι το $\{-1, 1\}^k$ έχει 2^k στοιχεία.

20. *Έστω* H *χώρος Hilbert και* $T : H \to H$ *γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε* $T^2 = T$ *και* $\|T\| \leqslant 1$. *Αν* $F = \mathrm{Ker}T$, *αποδείξτε ότι:*

(i) $T(H) \subseteq F^{\perp}$.

(ii) *Ο* T *είναι η ορθογώνια προβολή στον* $F^{\perp}$.

Υπόδειξη. (α) Ο F είναι κλειστός υπόχωρος του H διότι ο T είναι φραγμένος. Συνεπώς $H = F \oplus F^{\perp}$. Έστω $x \in H$. Το Tx γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $Tx = y + z$, όπου $y \in F$ και $z \in F^{\perp}$. Αφού $y \in \mathrm{Ker}T$ και $T^2 = T$, έχουμε $Tx = T^2 x = T(y + z) = Tz$. Αφού $y \perp z$ και $\|T\| \leqslant 1$, έχουμε

$$\|y\|^2 + \|z\|^2 = \|Tx\|^2 = \|Tz\|^2 \leqslant \|z\|^2.$$

Έπεται ότι $y = 0$, δηλαδή $Tx = z \in F^{\perp}$.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι $Tx = x$ για κάθε $x \in F^{\perp}$. Από την $T^2 = T$ έχουμε $T(Tx - x) = 0$ δηλαδή $Tx - x \in \mathrm{Ker}T = F$ για κάθε $x \in H$. Αν επιπλέον $x \in F^{\perp}$, τότε τα x και $Tx - x$ είναι κάθετα, οπότε

$$\|x\|^2 + \|Tx - x\|^2 = \|Tx\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Αυτό δείχνει ότι $Tx - x = 0$.

21. *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, (e_m) ορθοκανονική βάση του H, και (x_n) ακολουθία στοιχείων του H. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $x \in H$, $\langle x, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

(β) *Η (x_n) είναι φραγμένη και, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $\langle e_m, x_n\rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Υπόδειξη. (α)⇒ (β): Για τα συναρτησοειδή $f_n(x) = \langle x, x_n\rangle$ έχουμε $\|f_n\| = \|x_n\|$ και $\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ για κάθε $x \in X$. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, $\sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Η $\lim\limits_{n\to\infty} \langle e_m, x_n\rangle = 0$ είναι προφανής από την υπόθεση.

(β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $x = \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, e_m\rangle e_m \in H$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι

$$\langle x, x_n\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m\rangle\langle e_m, x_n\rangle.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε $\sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_m, x\rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} |\langle e_m, x\rangle|^2 < (\varepsilon/2M)^2.$$

Από την υπόθεση, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $m = 1, \dots, N$,

$$|\langle e_m, x_n\rangle| \cdot \|x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\langle x, x_n\rangle| &= \left|\sum_{m=1}^{\infty} \langle x, e_m\rangle\langle e_m, x_n\rangle\right| \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{N} |\langle x, e_m\rangle| \cdot |\langle e_m, x_n\rangle| + \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |\langle e_m, x\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} |\langle e_m, x_n\rangle|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{N} \|x\| \cdot |\langle e_m, x_n\rangle| + \frac{\varepsilon}{2M}\|x_n\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 6

Βασικά θεωρήματα για χώρους Banach

1. *Αποδείξτε ότι η πληρότητα του X είναι απαραίτητη στο θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: πάρτε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίστε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$ με $T_n(x) = n\xi_n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον c_{00} με νόρμα την $\|x\| = \sup_k |\xi_k|$. Ορίζουμε $T_n : c_{00} \to \mathbb{R}$, με $T_n(x) = n\xi_n$. Κάθε T_n είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και

$$|T_n x| = n|\xi_n| \leqslant n\|x\|,$$

άρα, κάθε T_n είναι φραγμένο και $\|T_n\| \leqslant n$. Έχουμε $T_n(e_n) = n$, άρα $\|T_n\| = n$ (γιατί;). Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $(\|T_n\|)$ δεν είναι φραγμένη.

Από την άλλη πλευρά, κάθε $x \in c_{00}$ είναι τελικά μηδενική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ τέτοιος ώστε $T_n(x) = n\xi_n = 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη για κάθε $x \in c_{00}$.

Το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος δεν εφαρμόζεται εδώ, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

2. *Αν X χώρος με νόρμα, και $x_n \to x$ στον X, τότε $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in X^*$. Ισχύει το αντίστροφο;*

Υπόδειξη. Αν $x_n \to x$, τότε για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x\| \to 0,$$

δηλαδή $f(x_n) \to f(x)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, για παράδειγμα, στον ℓ_2 πάρουμε $x_n = e_n$ τα διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης, έχουμε

$$f(e_n) \to 0 = f(0)$$

για κάθε $f \in \ell_2^*$. Όμως, $\|e_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα δεν ισχύει ότι $e_n \to 0$.

3. *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy. Αποδείξτε ότι η $(\|T_n\|)$ είναι φραγμένη.*

Αν επιπλέον ο Y είναι πλήρης, αποδείξτε ότι υπάρχει $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη, άρα η υπόθεση μας δίνει το εξής: για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(T_n x)$ είναι φραγμένη. Αφού ο X είναι χώρος Banach, από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι ο Y είναι πλήρης, έχουμε: για κάθε $x \in X$ η $(T_n x)$ είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει το $\lim_n T_n x \in Y$. Ορίζουμε $T : X \to Y$ με

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής: για κάθε $x, y \in X$ και $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε $T_n x \to Tx$ και $T_n y \to Ty$, άρα

$$T_n(ax + by) = aT_n x + bT_n y \to aTx + bTy.$$

Όμως, από τον ορισμό του T έχουμε $T_n(ax + by) \to T(ax + by)$. Άρα,

$$T(ax + by) = aTx + bTy,$$

δηλαδή, ο T είναι γραμμικός. Για να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, παρατηρούμε ότι, από το πρώτο μέρος, έχουμε $\|T_n x\| \leqslant M\|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Αφού $T_n x \to Tx$, βλέπουμε ότι

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leqslant M\|x\|, \quad x \in X$$

δηλαδή ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant M$.

4. *Θεωρούμε τον c_{00} σαν υπόχωρο του ℓ_∞, και ορίζουμε $T : c_{00} \to c_{00}$ με $Tx = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots)$. Αποδείξτε ότι ο T είναι γραμμικός, φραγμένος, ένα προς ένα και επί. Είναι ο T^{-1} φραγμένος; Εξηγήστε.*

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ο $T^{-1} : Y \to X$ ορίζεται από την

$$T^{-1}(y) = (\eta_1, 2\eta_2, 3\eta_3, \dots).$$

Έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_k \frac{|\xi_k|}{k} \leqslant \sup_k |\xi_k| = \|x\|,$$

άρα ο T είναι φραγμένος, και $\|T\| \leqslant 1$ (ισχύει ισότητα - γιατί;). Όμως, για κάθε n έχουμε

$$\frac{\|T^{-1}(e_n)\|}{\|e_n\|} = \frac{\|ne_n\|}{\|e_n\|} = n,$$

άρα ο T^{-1} δεν είναι φραγμένος. Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δεν εφαρμόζεται, γιατί ο c_{00} δεν είναι πλήρης.

5. *Έστω* X, Y *χώροι με νόρμα,* $T_1 : X \to Y$ *τελεστής με κλειστό γράφημα, και* $T_2 : X \to Y$ *φραγμένος τελεστής. Αποδείξτε ότι ο* $T_1 + T_2$ *έχει κλειστό γράφημα.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον X και $(T_1 + T_2)(x_n) \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x = y,$$

οπότε ο T έχει κλειστό γράφημα.

Αφού ο T_2 είναι φραγμένος και $x_n \to x$, έχουμε

$$T_2x_n \to T_2x.$$

Όμως τότε,

$$T_1x_n = (T_1 + T_2)(x_n) - T_2x_n \to y - T_2x.$$

Αφού ο T_1 έχει κλειστό γράφημα, αυτό σημαίνει ότι $y - T_2x = T_1x$ (γιατί;), δηλαδή το ζητούμενο.

6. *Έστω* X, Y *χώροι με νόρμα, και* $T : X \to Y$ *γραμμικός τελεστής με κλειστό γράφημα. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν* $C \subseteq X$ *συμπαγές, τότε το* $T(C)$ *είναι κλειστό στον* Y.

(β) *Αν* $K \subseteq Y$ *συμπαγές, τότε το* $T^{-1}(K)$ *είναι κλειστό στον* X.

Υπόδειξη. (α) Έστω $y_n = Tx_n$ στο $T(C)$, με $y_n \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι $y \in T(C)$, δηλαδή ότι υπάρχει $x \in C$ τέτοιο ώστε $y = Tx$.

Αφού το C είναι συμπαγές και $x_n \in C$, υπάρχουν υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και $x \in C$, τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Τότε, αφού η (y_{k_n}) είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας (y_n), έχουμε

$$Tx_{k_n} = y_{k_n} \to y.$$

Ο T έχει κλειστό γράφημα, $x_{k_n} \to x$ και $y_{k_n} \to y$. Άρα, $y = Tx \in T(C)$.

(β) Έστω $x_n = T^{-1}y_n \in T^{-1}(K)$, με $x_n \to x \in X$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y \in K$ με $x = T^{-1}y$.

Αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, υπάρχουν (y_{k_n}) και $y \in K$ τέτοια ώστε

$$y_{k_n} = Tx_{k_n} \to y.$$

Όμως, $x_{k_n} \to x$, και ο T έχει κλειστό γράφημα. Άρα, $y = Tx$.

7. *Έστω* X *χώρος με νόρμα, και* (x_k) *ακολουθία στον* X *τέτοια ώστε* $\sum_k |f(x_k)| < +\infty$ *για κάθε* $f \in X^*$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά* $M > 0$ *τέτοια ώστε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leqslant M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $T_n : X^* \to \ell_1$, με

$$T_n(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n), 0, 0, \dots).$$

Κάθε T_n είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T_n(f)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \right) \cdot \|f\|.$$

Άρα, ο T_n είναι φραγμένος, και $\|T_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$. Η υπόθεση ότι $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| < +\infty$ για κάθε $f \in X^*$, μας λέει ότι η ακολουθία $(T_n(f))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1 για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;). Ο X^* είναι χώρος Banach, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(f)\| \leqslant M\|f\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)| \leqslant M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| \leqslant M\|f\|$$

για κάθε $f \in X^*$ (γιατί;).

8. *Έστω X χώρος Banach, (f_n) φραγμένη ακολουθία στον X^*, και $\varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε: $\varepsilon_n \to 0$ και, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $K_x > 0$ τέτοιο ώστε $|f_n(x)| \leqslant K_x \varepsilon_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\|f_n\| \to 0$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $(g_n) = (\frac{1}{\varepsilon_n} f_n)$ στον X^*. Από την υπόθεση,

$$|g_n(x)| \leqslant K_x, \quad n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή, η (g_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|g_n\| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|f_n\| \leqslant M\varepsilon_n \to 0,$$

άρα, $\|f_n\| \to 0$.

9. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T_n \in B(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) $\sup_n \|T_n\| < +\infty$.

(β) *Για κάθε $x \in X$, $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$.*

(γ) *Για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$.*

Υπόδειξη. Από το (α) στο (β): αν $x \in X$, τότε

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \cdot \|x\| \leqslant (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\|,$$

άρα
$$\sup_n \|T_n x\| \leqslant (\sup_n \|T_n\|) \cdot \|x\| < +\infty.$$
Από το (β) στο (γ): όπως πρίν, για κάθε $x \in X$ και $g \in Y^*$, έχουμε
$$\sup_n |g(T_n x)| \leqslant \sup_n (\|g\| \cdot \|T_n x\|) = \|g\| \cdot \sup_n \|T_n x\| < +\infty.$$
Από το (γ) στο (β): Για κάθε $g \in Y^*$, η ακολουθία $(g(T_n x))$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Στη θεωρία είδαμε ότι αυτό μας δίνει ότι η $(T_n x)$ είναι φραγμένη στον Y.
Από το (β) στο (α): αυτό είναι ακριβώς το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος.

10. *Έστω X γραμμικός χώρος, πλήρης ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Υποθέτουμε ότι*
$$\|x_n\|_1 \to 0 \Longrightarrow \|x_n\|_2 \to 0.$$
Αποδείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή
$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2).$$
Ο I είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και η υπόθεση μας δίνει ότι ο I είναι συνεχής στο 0, άρα φραγμένος τελεστής (γιατί;). Αφού ο X είναι πλήρης ως προς τις δύο νόρμες, το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης μας λέει ότι ο $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης φραγμένος.

Υπάρχουν λοιπόν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε: για κάθε $x \in X$,
$$\|x\|_2 = \|I(x)\|_2 \leqslant a\|x\|_1, \quad \|x\|_1 = \|I^{-1}(x)\|_1 \leqslant b\|x\|_2.$$
Οι δύο ανισότητες δείχνουν ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες.

11. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε*
$$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|$$
για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Ο T είναι φραγμένος, άρα παίρνοντας $b = \|T\|$ έχουμε
$$\|Tx\| \leqslant b\|x\|, \quad x \in X.$$
Αφού ο T είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί, και αφού οι X, Y είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αν $x \in X$, τότε $x = T^{-1}(Tx)$ άρα
$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$
δηλαδή ισχύει και η αριστερή ανισότητα, με $a = 1/\|T^{-1}\|$.

12. *Αποδείξτε το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης χρησιμοποιώντας το θεώρημα κλειστού γραφήματος.*

Υπόδειξη. Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Για να δείξουμε ότι ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος, αρκεί να δείξουμε ότι έχει κλειστό γράφημα.

Έστω $y_n \to y$ στον Y, και $x_n = T^{-1}y_n \to x$ στον X. Θα δείξουμε ότι

$$x = T^{-1}y \iff Tx = y.$$

(η ισοδυναμία εξηγείται από το ότι ο T είναι ένα προς ένα και επί). Ο T είναι φραγμένος, και $x_n \to x$. Άρα,

$$y_n = Tx_n \to Tx.$$

Όμως, έχουμε και την $y_n \to y$. Από μοναδικότητα του ορίου, $y = Tx$.

13. *Θεωρούμε τον $\mathcal{C}[0,1]$ και τον υπόχωρό του $\mathcal{C}^1[0,1]$ που αποτελείται από όλες τις f που έχουν συνεχή παράγωγο f' στο $[0,1]$. Ορίζουμε $T : \mathcal{C}^1[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $Tf = f'$.*

(α) *Αποδείξτε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.*

(β) *Ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;). Τι συμπεραίνετε;*

Υπόδειξη. (α) Αν $f_n \to f$ στον $\mathcal{C}^1[0,1]$ και $Tf_n \to g$ στον $\mathcal{C}[0,1]$, τότε έχουμε τις ομοιόμορφες συγκλίσεις

$$f_n \to f, \quad f_n' \to g.$$

Είναι γνωστό ότι με αυτές τις υποθέσεις έχουμε $f' = g$ στο $[0,1]$, δηλαδή

$$T(f) = g.$$

Αυτό δείχνει ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

(β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(t) = t^n$. Τότε $\|f_n\| = 1$ για κάθε n, αλλά

$$(Tf_n)(t) = nt^{n-1}, \quad t \in [0,1],$$

δηλαδή, $\|Tf_n\| = n$. Αυτό δείχνει ότι ο T δεν είναι φραγμένος (γιατί;).

Το θεώρημα κλειστού γραφήματος δεν εφαρμόζεται σ¨ αυτήν την περίπτωση, κι αυτό σημαίνει (αναγκαστικά) ότι ο $\mathcal{C}^1[0,1]$ δεν είναι χώρος Banach.

14. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ ένα προς ένα, φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ είναι φραγμένος αν και μόνο αν ο $\mathcal{R}(T) = \{Tx : x \in X\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.*

Υπόδειξη. Αν ο $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y, τότε είναι χώρος Banach, και ο $T : X \to \mathcal{R}(T)$ είναι φραγμένος, γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ είναι φραγμένος.

Αντίστροφα: έστω ότι ο $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ είναι φραγμένος, και έστω $y_n \in \mathcal{R}(T)$ με $y_n \to y \in Y$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $Tx = y$.

Υπάρχουν $x_n \in X$ με $Tx_n = y_n$, και αφού ο T^{-1} είναι φραγμένος, έχουμε

$$(*) \qquad \|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Όμως η (y_n) συγκλίνει στον Y άρα είναι βασική ακολουθία στον Y, και από την $(*)$ συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$.

Ο T είναι φραγμένος και $x_n \to x$, άρα $y_n = Tx_n \to Tx$. Από μοναδικότητα του ορίου,

$$y = Tx \in \mathcal{R}T),$$

δηλαδή το $\mathcal{R}(T)$ είναι κλειστό.

15. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο τελεστή $S : \ell_1 \to Y$ υπάρχει φραγμένος τελεστής $W : \ell_1 \to X$ ώστε $T \circ W = S$.*

Υπόδειξη. Αφού ο T είναι επί, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leqslant M\|y\|$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $S(e_n) = y_n \in Y$ και βρίσκουμε $x_n \in X$ ώστε $\|x_n\| \leqslant M\|y_n\| \leqslant M\|S\|$. Ορίζουμε $W : \ell_1 \to X$ με $W(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$. Ο W είναι καλά ορισμένος, διότι

$$\sum_{n=1}^{N} \|t_n x_n\| \leqslant M\|S\| \sum_{n=1}^{N} |t_n| \leqslant M\|S\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right\|_1 ,$$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ συγκλίνει στον X. Η ίδια ανισότητα δείχνει ότι

$$\left\| W\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right) \right\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leqslant M\|S\| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|,$$

δηλαδή ο W είναι φραγμένος και $\|W\| \leqslant M\|S\|$. Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(T \circ W)(e_n) = T(x_n) = y_n = S(e_n).$$

Από τη συνέχεια των $T \circ W$ και S βλέπουμε εύκολα ότι $T \circ W = S$.

16. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $\|x_n\| \to 0$ και $f \in Y^*$, τότε $f(Tx_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.*

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Υποθέτουμε ότι $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y. Θα δείξουμε ότι $y = Tx$.

Για κάθε $f \in Y^*$ ισχύουν τα εξής:

(α) Αφού $Tx_n \to y$ και το $f : Y \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές,

$$f(Tx_n) \to f(y).$$

(β) Από την υπόθεση, αφού $x_n - x \to 0$,

$$f(T(x_n - x)) = f(Tx_n) - f(Tx) \to 0 \Longrightarrow f(Tx_n) \to f(Tx).$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in Y^*$, $f(Tx) = f(y)$. Όμως αυτό σημαίνει ότι

$$y = Tx$$

(βασική συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach είναι ότι ο Y^* «διαχωρίζει» τα σημεία του Y).

17. *Έστω X, Y χώροι Banach, και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν για κάθε $g \in Y^*$ έχουμε $g \circ T \in X^*$.*

Υπόδειξη. Αν ο T είναι φραγμένος, τότε για κάθε $g \in Y^*$ το $g \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές (ως σύνθεση συνεχών γραμμικών συναρτήσεων), δηλαδή $g \circ T \in X^*$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, με την υπόθεση $g \in Y^* \Longrightarrow g \circ T \in X^*$ δείχνουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος: έστω $x_n \to x$ στον X και $Tx_n \to y$ στον Y.

Αν $g \in Y^*$, από τη μία μεριά έχουμε

$$Tx_n \to y \Longrightarrow g(Tx_n) \to g(y),$$

και από την άλλη, αφού $g \circ T \in X^*$ και $x_n \to x$, έχουμε

$$g(Tx_n) = (g \circ T)(x_n) \to (g \circ T)(x) = g(Tx).$$

Δηλαδή,

$$g(y) = g(Tx), \quad g \in Y^*$$

και αφού ο Y^* διαχωρίζει τα σημεία του Y, παίρνουμε $y = Tx$. Έπεται ότι ο T έχει κλειστό γράφημα.

18. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί τελεστής. Αν $x_0 \in X$, $y_0 = T(x_0)$ και $y_n \to y_0$, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_n \in X$ με $T(x_n) = y_n$ και $x_n \to x_0$.*

Υπόδειξη. Ο T είναι φραγμένος και επί τελεστής μεταξύ χώρων Banach, άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $T(x) = y$ και $\|x\| \leqslant M\|y\|$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $u_n \in X$ ώστε $T(u_n) = y_n - y_0$ και $\|u_n\| \leqslant M\|y_n - y_0\|$. Αφού $y_n \to y_0$, συμπεραίνουμε ότι $u_n \to 0$. Ορίζουμε $x_n = x_0 + u_n$. Τότε, $T(x_n) = T(x_0) + T(u_n) = y_0 + (y_n - y_0) = y_n$ και $x_n = x_0 + u_n \to x_0$.

19. *Έστω X χώρος Banach, (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$. Θεωρούμε μια ακολουθία (f_n) στον X^* και $f \in X^*$ για τις οποίες ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι για τις $f_n : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ομοιόμορφου φράγματος. Ο X είναι χώρος Banach και για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φραγμένη (γιατί συγκλίνει). Άρα, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|f_n\| \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $\|f\| \leqslant M$ (βλέπε Άσκηση 1), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_n(x) \to f(x)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n - x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leqslant |f_n(x_n - x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leqslant M\|x_n - x\| + |f_n(x) - f(x)| \to 0,\end{aligned}$$

δηλαδή, $f_n(x_n) \to f(x)$.

20. *Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $T : X \times Y \to Z$ απεικόνιση με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ο $T_x : Y \to Z$ με $T_x(y) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$, ο $T^y : X \to Z$ με $T^y(x) = T(x, y)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$\|T(x, y)\| \leqslant M\|x\|\|y\|, \quad x \in X, y \in Y.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια τελεστών $\{T_x : x \in B_X\}$. Κάθε $T_x : Y \to Z$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\sup\{\|T_x(y)\| : x \in B_X\} = \sup\{\|T_y(x)\| : x \in B_X\} = \|T_y\| < \infty.$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_x\| \leqslant M$ για κάθε $x \in B_X$. Τότε,

$$\|T(x, y)\| = \|T_x(y)\| \leqslant M\|y\| \quad \text{για κάθε } y \in Y,\ x \in B_X.$$

Έστω $x \neq 0$ στον X. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για το $x_1 = \frac{x}{\|x\|} \in B_X$ παίρνουμε

$$\|T(x, y)\| = \|T_y(\|x\|x_1)\| = \|x\|\,\|T_y(x_1)\| = \|x\|\,\|T(x_1, y)\| \leqslant M\|x\|\,\|y\|.$$

Η ανισότητα ισχύει προφανώς αν $x = 0$ ($T(0, y) = T_y(0) = 0$).

21. (α) *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι αν ο T είναι ανοικτή απεικόνιση τότε είναι επί.*

(β) *Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα και $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με $f \neq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ανοικτή απεικόνιση και $f(X) = \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $T(0) = 0$ και ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, το σύνολο $T(B_X(0, 1))$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y και περιέχει το 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$T(X) \supseteq T(B_X(0, 1)) \supseteq B_Y(0, \delta).$$

Ο $T(X)$ είναι υπόχωρος του Y με μη κενό εσωτερικό, άρα $T(X) = Y$. Δηλαδή, ο T είναι επί.

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιος ώστε $f(B_X(0, 1)) \supseteq (-r, r)$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι επί (χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της f) και ότι είναι ανοικτή απεικόνιση (μιμηθείτε το τελευταίο βήμα της απόδειξης του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης).

Αφού $f \neq 0$, υπάρχει $z \in X \setminus \{0\}$ με $f(z) = s > 0$ (εξηγήστε γιατί). Θέτουμε $r = \frac{s}{\|z\|}$. Για κάθε $t \in (-r, r)$ έχουμε $x_s := \frac{t}{r}\frac{z}{\|z\|} \in B_X(0,1)$ και

$$f(x_s) = \frac{t}{r}\frac{f(z)}{\|z\|} = \frac{ts}{r\|z\|} = t.$$

Άρα, $t \in f(B_X(0,1))$.

22. *Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $f : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ για κάθε $x = (x_k) \in c_{00}$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές αν και μόνο αν $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, και σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τη νόρμα $\|f\|$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \infty$. Τότε, για κάθε $x \in c_{00}$ έχουμε

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot |x_k| \leqslant \|x\|_\infty \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

(εδώ το άθροισμα έχει πεπερασμένους όρους και χρησιμοποιούμε απλώς την τριγωνική ανισότητα) δηλαδή η f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και $\|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right| \leqslant M\|x\|_\infty$$

για κάθε $x \in c_{00}$. Θεωρώντας $N \in \mathbb{N}$ και το $x_N = (\mathrm{sgn}(a_1), \ldots, \mathrm{sgn}(a_N), 0, \ldots) \in c_{00}$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| = \left|\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathrm{sgn}(a_k)\right| = |f(x_N)| \leqslant M\|x_N\|_\infty \leqslant M.$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |a_k| \leqslant M < \infty.$$

Όπως πριν, βλέπουμε ότι $\|f\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, και

$$\|f\| \geqslant |f(x_N)| = \sum_{k=1}^{N} |a_k|$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\|f\| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$. Αν λοιπόν το f είναι φραγμένο, τότε $\|f\| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$.

23. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Έστω Z υπόχωρος του Y. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν ο Z είναι χώρος Banach τότε ο υπόχωρος $T^{-1}(Z)$ του X είναι χώρος Banach.*

(β) *Αν ο Z είναι πυκνός στον Y τότε ο $T^{-1}(Z)$ είναι πυκνός στον X.*

Υπόδειξη. (α) Ο Z είναι πλήρης, άρα είναι κλειστός υπόχωρος του Y. Αφού ο T είναι συνεχής γραμμική απεικόνιση, ο $T^{-1}(Z)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X. Αφού ο X είναι πλήρης, έπεται ότι και ο $T^{-1}(Z)$ είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach.

(β) Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι $\overline{T^{-1}(Z)} \neq X$. Τότε υπάρχει μη κενό ανοικτό $U \subseteq X$ τέτοιο ώστε $T^{-1}(Z) \cap U = \emptyset$. Έπεται ότι $Z \cap T(U) = \emptyset$ (αν είχαμε $T(u) = z \in Z$ για κάποιο $u \in U$ τότε θα είχαμε $u \in T^{-1}(Z) \cap U$, άτοπο). Όμως ο Z είναι πυκνός στον Y και το $T(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Y ως εικόνα του U μέσω της ανοικτής απεικόνισης T), άρα $Z \cap T(U) = \emptyset$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

24. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \to X$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ της $B_X(0,1)$ και ορίζουμε $T : \ell_1 \to X$ με

$$T(s) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n, \qquad s = (s_n) \in \ell_1.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος: για κάθε $s = (s_n) \in \ell_1$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|s_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| \cdot \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < \infty,$$

και αφού ο X είναι χώρος Banach αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$ συγκλίνει στον X. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα, και η προηγούμενη ανισότητα δείχνει ότι

$$\|T(s)\| = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} s_n x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |s_n| \cdot \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| = \|s\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.

Μένει να δείξουμε ότι ο T είναι επί. Έστω $x \in B_X(0,1)$. Υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, αν θέσουμε $u_n = \frac{n-1}{n} e_{k_n}$ έχουμε $u_n \in B_{\ell_1}(0,1)$ και $T(u_n) = \frac{n-1}{n} x_{k_n} \to x$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$B_X(0,1) \subseteq \overline{T(B_{\ell_1}(0,1))}.$$

Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα του δεύτερου βήματος της απόδειξης του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης βλέπουμε ότι

$$B_X(0,1/2) \subseteq T(B_{\ell_1}(0,1)) \subseteq T(\ell_1),$$

και έπεται ότι $T(\ell_1) = X$.

25. *Έστω $T : c_0 \to c_0$ ο γραμμικός τελεστής με $T(x) = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.*

(α) *Είναι ο T φραγμένος τελεστής;*

(β) *Είναι ο T ανοικτή απεικόνιση;*

(γ) *Είναι το $T(c_0)$ πυκνό υποσύνολο του c_0;*

Υπόδειξη. (α) Αν $x = (x_k) \in c_0$ και $\|x\|_\infty \leqslant 1$, έχουμε $|x_k| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $\frac{|x_k|}{k} \leqslant |x_k| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\|T(x)\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x_k|}{k} : k \in \mathbb{N}\right\} \leqslant 1.$$

Έπεται ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$.

(β) Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$: αν $T(x) = 0$ τότε $\frac{x_k}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $x_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x = 0$. Αφού $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, ο T είναι $1-1$. Ας υποθέσουμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση. Τότε θα είναι επί: πράγματι, έχουμε $0 \in T(B(0,1))$ και αφού υποθέσαμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(0,\delta) \subseteq T(B(0,1)) \subseteq T(c_0)$, το οποίο δείχνει ότι $T(c_0) = c_0$ (υπόχωρος του c_0 με μη κενό εσωερικό). Αφού ο T είναι επίσης $1-1$ και φραγμένος, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης είναι ισομορφισμός. Δηλαδή, ο T^{-1} είναι φραγμένος. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: έχουμε $T^{-1}(e_k) = ke_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\frac{\|T^{-1}(e_k)\|_\infty}{\|e_k\|_\infty} = \frac{\|ke_k\|_\infty}{\|e_k\|_\infty} = k \to \infty.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $c_{00} \subseteq T(c_0)$. Αν $y = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, \dots) \in c_{00}$, τότε $y = T(x)$ όπου $x = (y_1, 2y_2, \dots, Ny_N, 0, \dots) \in c_0$. Άρα,

$$\overline{T(c_0)} \supseteq \overline{c_{00}} = c_0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο $T(c_0)$ είναι πυκνό υποσύνολο του c_0.

26. *Μια ακολουθία (x_n) σε ένα χώρο X με νόρμα λέγεται ασθενώς Cauchy αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ για κάθε $f \in X^*$. Αποδείξτε ότι κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία σε ένα χώρο με νόρμα είναι φραγμένη.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $f \in X^*$ η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Το ζητούμενο έπεται από γνωστή εφαρμογή της αρχής ομοιόμορφου φράγματος.

27. *Έστω $T : (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ γραμμικός τελεστής με την εξής ιδιότητα: αν $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$ τότε $(Tf_n)(t) \to (Tf)(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.*

Υπόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T έχει κλειστό γράφημα. Θεωρούμε $(f_n, Tf_n) \in \Gamma(T)$ τέτοια ώστε

$$(f_n, Tf_n) \to (f, g) \in \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1].$$

Έχουμε $f_n \to f$ και $Tf_n \to g$ ομοιόμορφα. Από την υπόθεση, για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $(Tf_n)(t) \to (Tf)(t)$. Όμως, $Tf_n \to g$ κατά σημείο, άρα $(Tf_n)(t) \to g(t)$.

Έπεται ότι $(Tf)(t) = g(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή $Tf = g$. Άρα, $(f,g) = (f, Tf) \in \Gamma(f)$, το οποίο αποδεικνύει ότι το $\Gamma(T)$ είναι κλειστό.

28. *Αποδείξτε ότι ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι χώρος Banach. Αν $\mathrm{I} : (\ell_1, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής, εξετάστε αν οι I και I^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$ και $x = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$ (δηλαδή $x_k = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$). Τότε, $x_n \in c_{00} \subset \ell_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $x \in \ell_\infty \setminus \ell_1$ διότι $\sum_{k=1}^\infty |x_k| = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$. Παρατηρούμε ότι $\|x - x_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0$.

Αφού $x_n \in \ell_1$ και $x_n \to x \notin \ell_1$, ο ℓ_1 δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞. Συνεπώς, ο $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.

Ο $\mathrm{I} : (\ell_1, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_1, \|\cdot\|_1$ δεν είναι φραγμένος. Για την ακολουθία (x_n) που ορίσαμε παραπάνω, έχουμε

$$\frac{\|\mathrm{I}(x_n)\|_1}{\|x_n\|_\infty} = \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_\infty} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \to \infty.$$

Ο $\mathrm{I}^{-1} : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \to (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ είναι φραγμένος: για κάθε $x = (x_k) \in \ell_1$ έχουμε

$$\|\mathrm{I}^{-1}(x)\|_\infty = \|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} \leqslant \sum_{k=1}^\infty |x_k| = \|x\|_1,$$

άρα $\|\mathrm{I}^{-1}\| \leqslant 1$.

29. *Αποδείξτε ότι ο γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{C}[0,2] \to \mathcal{C}[0,1]$ με $Tf = f\big|_{[0,1]}$ είναι φραγμένος και υπολογίστε τη νόρμα του. Είναι ο T ανοικτή απεικόνιση;*

Υπόδειξη. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα και

$$\|Tf\|_\infty = \|f\big|_{[0,1]}\|_\infty = \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} \leqslant \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 2\} = \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,2]$. Άρα, ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Για τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$ στο $[0,2]$ έχουμε $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$. Έπεται ότι $\|T\| = 1$.

Δείχνουμε ότι ο T είναι επί: αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, μπορούμε να την επεκτείνουμε συνεχώς στο $[0,2]$ θέτοντας $f(t) = g(t)$ για $t \in [0,1]$ και $f(t) = g(1)$ για $t \in [1,2]$. Τότε, $Tf = f\big|_{[0,1]} = g$.

Αφού οι $\mathcal{C}[0,2]$ και $\mathcal{C}[0,1]$ είναι χώροι Banach και ο T είναι φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης συμπεραίνουμε ότι ο T είναι ανοικτή απεικόνιση.

30. *Έστω $T : \ell_1 \to \ell_2$ φραγμένος γραμμικός και 1-1 τελεστής. Εξετάστε αν είναι δυνατόν ο $T(\ell_1)$ να είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_2.*

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει φραγμένος και 1-1 γραμμικός τελεστής $T : \ell_1 \to \ell_2$ τέτοιος ώστε ο $H = T(\ell_1)$ να είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_2. Αφού ο T είναι 1-1, ο H είναι απειροδιάστατος υπόχωρος του ℓ_2 (εξηγήστε γιατί). Αφού είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_2, ο H είναι χώρος Ĥιλβερτ με τη νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο του ℓ_2. Είναι επίσης διαχωρίσιμος, ως υπόχωρος του ℓ_2. Έπεται ότι ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2.

Ο $T : \ell_1 \to H$ είναι φραγμένος 1-1 και επί γραμμικός τελεστής. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης είναι ισομορφισμός. Έχουμε λοιπόν ότι ο ℓ_1 είναι ισόμορφος με τον H. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: για παράδειγμα, ο ℓ_1^* δεν είναι διαχωρίσιμος (είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_∞) ενώ ο H^* είναι διαχωρίσιμος (αφού ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2, ο H^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_2). Όμως στην Άσκηση 4.28 είδαμε ότι αν δύο χώροι με νόρμα είναι ισόμορφοι τότε οι δυϊκοί τους χώροι είναι επίσης ισόμορφοι.

31. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geqslant \delta\|x\|$ για κάθε $x \in X$.*

(β) *Ο T είναι 1-1 και ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Αν $Tx = 0$ τότε $\delta\|x\| \leqslant \|Tx\| = 0$, άρα $\|x\| = 0$ και $x = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, το οποίο δείχνει ότι ο T είναι $1-1$. Έστω τώρα $y_n \in T(X)$ και $y \in Y$ ώστε $y_n \to y$. Υπάρχουν $x_n \in X$ τέτοια ώστε $y_n = Tx_n$ και, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|Tx_m - Tx_n\| = \frac{1}{\delta}\|y_m - y_n\|.$$

Όμως η (y_n) είναι συγκλίνουσα, άρα είναι βασική, και από την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι η (x_n) είναι βασική στον X. Ο X είναι χώρος Banach, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Από τη συνέχεια του T παίρνουμε $y_n = Tx_n \to Tx$, και αφού $y_n \to y$ έπεται ότι $y = Tx \in T(X)$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y.

(β) $\Rightarrow$ (α): Ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach Y, άρα είναι χώρος Banach κι αυτός. Ο $T : X \to T(X)$ είναι φραγμένος $1-1$ και επί γραμμικός τελεστής, άρα το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δείχνει ότι ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι φραγμένος. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|Tx\|,$$

δηλαδή ισχύει το (α) με $\delta = 1/\|T^{-1}\|$.

32. *Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής με τις εξής ιδιότητες: (α) ο T είναι επί, (β) υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $\|T(x)\| \geqslant \rho\|x\|$ για κάθε $x \in X$.*

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη. Από το (β) βλέπουμε ότι ο T είναι $1-1$: αν $T(x) = 0$ τότε $\rho\|x\| \leqslant \|T(x)\| = 0$, άρα $\|x\| = 0$, δηλαδή $x = 0$. Επίσης, ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένος: έστω $y \in Y$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $T(x) = y$. Τότε,

$$\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{\rho}\|T(x)\| = \frac{1}{\rho}\|y\|,$$

δηλαδή $\|T^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\rho}$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, ο $T = (T^{-1})^{-1}$ είναι φραγμένος.

33. *Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή* $I : (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$. *Αποδείξτε ότι ο* I *είναι φραγμένος, ο* I^{-1} *δεν είναι φραγμένος, και συμπεράνατε ότι ο* $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ *δεν είναι χώρος Banach.*

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι ο I είναι φραγμένος προκύπτει άμεσα από την

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty,$$

η οποία ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{C}[0,1]$. Το γεγονός ότι ο I^{-1} δεν είναι φραγμένος προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν $f_n(t) = n - n^2 t$ στο $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ και $f_n(t) = 0$ στο $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ τότε $\|f_n\|_\infty = n$ ενώ $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες. Αν ο $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1)$ ήταν χώρος Banach τότε από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης ο I θα ήταν ισομορφισμός, δηλαδή ο I^{-1} θα ήταν φραγμένος.

34. *Αν* $x = (x_k)$ *και* $y = (y_k)$ *είναι δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών, ορίζουμε*

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

αν βέβαια η σειρά συγκλίνει. Έστω $1 < p < +\infty$, q *ο συζυγής εκθέτης του* p *και* $x_n = (x_{nk})$ *μια ακολουθία στον* ℓ_p. *Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε* $y \in \ell_q$, $\langle x_n, y \rangle \to 0$.

(β) *Υπάρχει* $K > 0$ *ώστε* $\|x_n\|_p \leqslant K$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *και* $x_{nk} \to 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $f \in \ell_p^*$. Υπάρχει $y \in \ell_q$ ώστε $f(x) = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x \in \ell_p$. Άρα,

$$f(x_n) = \langle x_n, y \rangle \to 0$$

από την υπόθεση. Ειδικότερα, για κάθε $f \in \ell_p^*$ η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι φραγμένη, και από γνωστή εφαρμογή της αρχής ομοιόμορφου φράγματος η (x_n) είναι φραγμένη: υπάρχει $K > 0$ ώστε $\|x_n\|_p \leqslant K$ για κάθε n. Για το δεύτερο ζητούμενο, σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε την υπόθεση με $y = e_k$: έχουμε

$$x_{nk} = \langle x_n, e_k \rangle \to 0.$$

(β) $\Rightarrow$ (α): Έστω $y \in \ell_q$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{1/q} \leqslant \varepsilon.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y\rangle| &\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + \sum_{k=k_0+1} |x_{nk}| \cdot |y_k| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_{nk}|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + \|x_n\|_p \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} |x_{nk}| \cdot |y_k| + K\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{n\to\infty} x_{nk} = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, k_0$, αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_n |\langle x_n, y\rangle| \leqslant K\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι $\langle x_n, y\rangle \to 0$.

35. *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T_n : X \to Y$ ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T_n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(β) *Αν $x_n \in X$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον X, τότε $T_n(x_n) \to 0$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x_n \in X$ ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ να συγκλίνει. Τότε, $x_n \to 0$. Συνεπώς,

$$\|T_n(x_n)\| \leqslant \|T_n\| \cdot \|x_n\| \leqslant M\|x_n\| \to 0.$$

Άρα, $T_n(x_n) \to 0$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (α). Τότε, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_m) φυσικών αριθμών ώστε $\|T_{k_m}\| > m^4$. Άρα υπάρχουν $u_{k_m} \in S_X$ ώστε $\|T_{k_m}(u_{k_m})\| > m^4$, $m \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) στον X θέτοντας $x_n = \frac{1}{m^2} u_{k_m}$ αν $n = k_m$ και $x_n = 0$ αλλιώς. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|u_{k_m}\|}{m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty$$

άρα, η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (διότι, συγκλίνει απολύτως και ο X είναι χώρος Banach). Από το (β) ισχύει $T_n(x_n) \to 0$. Όμως,

$$\|T_{k_m}(x_{k_m})\| = \frac{1}{m^2}\|T_{k_m}(u_{k_m})\| > \frac{m^4}{m^2} = m^2 \to +\infty.$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα ισχύει το (α).

36. *Έστω X χώρος με νόρμα, $f_1, \dots, f_n \in X^*$ και $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \dots, n$.*

(β) *Υπάρχει* $M \geqslant 0$ *ώστε*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| \leqslant M \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\|$$

για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) ⇒ (β) Για κάθε $\alpha_1, \ldots . \alpha_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_0)\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\| \, \|x_0\|,$$

και το ζητούμενο έπεται με $M = \|x_0\|$.

(β) ⇒ (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $f_1, \ldots, f_m$ παράγουν τον $\mathrm{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$ για κάποιον $1 \leqslant m \leqslant n$. Τότε, η απεικόνιση $T : X \to \mathbb{R}^m$ με $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ είναι γραμμική, συνεχής και επί.

Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$T((M+1)B_X) \supseteq \delta B_{\ell_2^n}.$$

Δηλαδή, το $T((M+1)B_X)$ είναι κυρτό και έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω ότι $(c_1, \ldots, c_m) \notin T((M+1)B_X)$. Τότε, υπάρχει μη μηδενικό $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i$$

για κάθε $x \in (M+1)B_X$, δηλαδή

$$(M+1) \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i \leqslant M \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\|,$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση: έχουμε $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i \neq 0$.

Άρα, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $f_j(x_0) = c_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Έστω $m < s \leqslant n$. Τότε, υπάρχουν $r_1, \ldots, r_m$ ώστε $f_s = \sum_{i=1}^{m} r_i f_i$. Από την υπόθεση,

$$\left|c_s - \sum_{i=1}^{m} r_i c_i\right| \leqslant M \cdot \left\|f_s - \sum_{i=1}^{m} r_i f_i\right\| = 0,$$

άρα

$$c_s = \sum_{i=1}^{m} r_i c_i = \sum_{i=1}^{m} r_i f_i(x_0) = f_s(x_0).$$

Δηλαδή, $f_j(x_0) = c_j$ για $j = 1, 2, \ldots, n$.

37. *Έστω* X *χώρος Banach και* (x_k) *ακολουθία στον* X *με την εξής ιδιότητα: για κάθε* $x^* \in X^*$ *ισχύει* $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < +\infty$. *Αποδείξτε ότι: για κάθε* $t = (t_k) \in c_0$ *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε τον τελεστή $T_n : X^* \to \ell_1$ με

$$T_n(x^*) = (x^*(x_1), \dots, x^*(x_n), 0, \dots).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|T_n(x^*)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x^*\| \cdot \|x_k\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\right) \|x^*\|$$

για κάθε $x^* \in X^*$, άρα οι T_n είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$ η ακολουθία $(T_n(x^*))$ είναι φραγμένη στον ℓ_1: πράγματι,

$$\sup_n \|T_n(x^*)\|_{\ell_1} = \sup_n \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < \infty$$

Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος υπάρχει $M > 0$ ώστε $\sup_n \|T_n\| \leqslant M$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant M\|x^*\|.$$

Έστω τώρα $t = (t_k) \in c_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$ είναι βασικά, απ' όπου έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ συγκλίνει. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και αφού $t_k \to 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|t_k| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $k \geqslant n_0$. Αν τώρα $n > m \geqslant n_0$ θεωρούμε το $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} t_k x_k$ και βρίσκουμε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $|x^*(s_n - s_m)| = \|s_n - s_m\|$. Δηλαδή,

$$\|s_n - s_m\| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} t_k x^*(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |t_k| \cdot |x^*(x_k)| \leqslant \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} |x^*(x_k)|.$$

Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ παίρνουμε

$$\|s_n - s_m\| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \leqslant \varepsilon M\|x^*\| = \varepsilon M.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η (s_n) είναι βασική ακολουθία.

38. *Έστω X χώρος Banach και έστω $T : X \to X$ και $S : X^* \to X^*$ γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $x^* \in X^*$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^*(Tx) = (Sx^*)(x)$. Τότε, οι T και S είναι φραγμένοι τελεστές.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι ο S έχει κλειστό γράφημα: υποθέτουμε ότι $(x_n^*, S(x_n^*)) \to (x^*, z^*)$ για κάποια $x_n^*, x^*, z^* \in X^*$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$x_n^*(Tx) = (Sx_n^*)(x) \to z^*(x)$$

και

$$x_n^*(Tx) \to x^*(Tx) = (Sx^*)(x).$$

Δηλαδή,

$$z^*(x) = (Sx^*)(x)$$

για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $z^* = S(x^*)$. Δηλαδή $(x^*, z^*) = (x^*, S(x^*))$, το οποίο δείχνει ότι ο S έχει κλειστό γράφημα. Άρα, ο S είναι φραγμένος.

Δείχνουμε τώρα ότι ο T έχει κλειστό γράφημα: υποθέτουμε ότι $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ για κάποια $x_n, x, y \in X$. Έστω $x^* \in X^*$. Αφού $x_n \to x$ στον X, έχουμε $(Sx^*)(x_n) \to (Sx^*)(x)$ δηλαδή $x^*(Tx_n) \to x^*(Tx)$. Αφού $Tx_n \to y$, έχουμε $x^*(Tx_n) \to x^*(y)$. Δηλαδή, $x^*(y) = x^*(Tx)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Έπεται ότι $Tx = y$, άρα ο T έχει κλειστό γράφημα, οπότε είναι φραγμένος.

39. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ ορίζεται μέσω της $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Ο T^* είναι 1-1 αν και μόνο αν $\overline{T(X)} = Y$.*

(β) *Ο T είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T^* είναι επί.*

(γ) *Ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T είναι επί.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι ο T^* είναι 1-1. Αν $\overline{T(X)} \neq Y$, υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $y^* \neq 0$ και $y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$. Όμως τότε, $[T^*(y^*)](x) = y^*(Tx) = 0$ για κάθε $x \in X$, άρα $T^*(y^*) = 0$, δηλαδή $y^* = 0$ αφού ο T^* είναι 1-1. Αυτό είναι άτοπο.

Αντίστροφα, αν $\overline{T(X)} = Y$ και $T^*(y^*) = 0$, τότε $y^*(Tx) = [T^*(y^*)](x) = 0$ για κάθε $x \in X$, και λόγω της συνέχειας του y^*, $y^*(y) = 0$ για κάθε $y \in \overline{T(X)} = Y$, δηλαδή $y^* = 0$. Άρα, ο T^* είναι 1-1.

(β) Υποθέτουμε ότι ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Τότε, ο $T(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του Y. Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $y_1^* : T(X) \to \mathbb{K}$ με $y_1^* = x^* \circ T^{-1}$. Το y_1^* είναι φραγμένο, και από το θεώρημα Hahn–Banach επεκτείνεται σε ένα $y^* \in Y^*$. Τότε, $[T^*(y^*)](x) = y^*(Tx) = y_1^*(Tx) = x^*(x)$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $T^*(y^*) = x^*$. Άρα, ο T^* είναι επί.

Αντίστροφα, αν ο T^* είναι επί, από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης υπάρχει $r > 0$ ώστε $T^*(B_{Y^*}) \supseteq rB_{X^*}$. Τότε, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|Tx\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |y^*(Tx)| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |T^*(y^*(x)| \geqslant \sup_{x^* \in rB_{X^*}} |x^*(x)| = r\|x\|.$$

Αυτό δείχνει ότι ο $T : X \to T(X)$ είναι ισομορφισμός.

(γ) Αν ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση, υπάρχει $r > 0$ ώστε $\|T^*(y^*)\| \geqslant r\|y^*\|$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Δείχνουμε ότι $\overline{T(B_X)} \supseteq rB_Y$ (υποθέτουμε το αντίθετο και καταλήγουμε σε άτοπο με διαχωριστικό θεώρημα) και, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης, δείχνουμε ότι $T(B_X) \supseteq (r/2)B_Y$. Έπεται ότι $T(X) = Y$. Για το αντίστροφο, δουλεύουμε όπως στο (β).

40. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν οι Y και X/Y είναι χώροι Banach, τότε ο X είναι χώρος Banach.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στον X. Αν $Q : X \to X/Y$ είναι η φυσιολογική απεικόνιση $Q(x) = [x]$, έχουμε δει ότι $\|Q(x_n) - Q(x_m)\|_0 \leqslant \|x_n - x_m\|$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα η (Qx_n) είναι ακολουθία Cauchy στον X/Y. Αφού ο X/Y είναι πλήρης, υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $= \|Q(x_n - x_0)\|_0 = \|Q(x_n) - Q(x_0)\|_0 \to 0$. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_0$ μπορούμε τότε να βρούμε $y_n \in Y$ ώστε $\|x_n - x_0 - y_n\| \to 0$. Αφού η $(x_n - x_0)$ είναι ακολουθία Cauchy στον X, έπεται ότι η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον Y. Ο Y είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in Y$ ώστε $y_n \to y_0$. Τότε,

$$x_n = (x_n - x_0 - y_n) + x_0 + y_n \to x_0 + y_0.$$

41. *Έστω X χώρος Banach και έστω Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον Z. Είναι οι X/Y και X/Z ισόμορφοι;*

Υπόδειξη. Θεωρήστε τους $X = \ell_2$, $Y = \{x \in \ell_2 : x_1 = 0\}$ και $Z = \{x \in \ell_2 : x_1 = x_2 = 0\}$. Ο $T : Y \to Z$ με $T(0, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, 0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ (δηλαδή, $Te_n = e_{n+1}$, $n \geqslant 2$) είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Όμως, $\dim(X/Y) = 1$ και $\dim(X/Z) = 2$. Άρα, δεν υπάρχει (γραμμικός) ισομορφισμός μεταξύ των X/Y και X/Z.

42. *Έστω X γραμμικός χώρος και έστω Y υπόχωρος του X. Ένας γραμμικός τελεστής $P : X \to Y$ λέγεται προβολή επί του Y αν, για κάθε $y \in Y$, $P(y) = y$.*

Υποθέτουμε ότι ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και ότι υπάρχει συνεχής προβολή $P : X \to Y$. Θέτουμε $Z = \mathrm{Ker}(P)$ και θεωρούμε τον $Y \oplus Z = (Y \times Z, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|(y,z)\|_1 = \|y\| + \|z\|$, για κάθε $(y,z) \in Y \times Z$.

(α) *Δείξτε ότι ο $Y \oplus Z$ είναι ισόμορφος με τον X.*

(β) *Δείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z και ο X/Z είναι ισόμορφος με τον Y.*

Υπόδειξη. (α) Ο τελεστής $T : Y \oplus Z \to X$ με $T(y,z) = y + z$ είναι γραμμικός, 1-1 και επί. Για το 1-1 παρατηρήστε ότι αν $y + z = 0$ τότε $y = P(y+z) = 0$, οπότε και $z = 0$. Για το επί, παρατηρήστε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται στη μορφή $x = Px + (x - Px)$, όπου $y = Px \in Y$ και $P(x - Px) = y - Py = 0$ δηλαδή $z = x - Px \in \mathrm{Ker}(P) = Z$.

Παρατηρήστε ότι $\|T(y,z)\| = \|y + z\| \leqslant \|y\| + \|z\| = \|(y,z)\|_1$, άρα $\|T\| \leqslant 1$. Επίσης, αν $x = y + z$ τότε

$$\|y\| = \|P(y+z)\| \leqslant \|P\| \cdot \|y + z\| = \|P\| \cdot \|x\|$$

και

$$\|z\| = \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant (1 + \|P\|)\|x\|.$$

Άρα,

$$\|(y,z)\|_1 = \|y\| + \|z\| \leqslant (1 + 2\|P\|)\|x\|,$$

το οποίο αποδεικνύει την $\|T^{-1}\| \leqslant 1 + 2\|P\|$. Έπεται ότι ο T είναι ισομορφισμός.

(β) Η απεικόνιση $Q_z : X/Y \to Z$ με $Q_z(x+Y) = x - Px$ είναι ισομορφισμός. Επίσης, η απεικόνιση $Q_y : X/Z \to Y$ με $Q_y(x + Z) = Px$ είναι ισομορφισμός.

43. *Έστω X χώρος Banach και Y, Z κλειστοί υπόχωροι του X με $X = Y + Z$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Αποδείξτε ότι ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $T : Z \to X/Y$ με $T(z) = z + Y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής, και

$$\|T(z)\|_{X/Y} = \|z + Y\|_{X/Y} = \inf\{\|z - y\| : y \in Y\} \leqslant \|z\|$$

για κάθε $z \in Z$, άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leqslant 1$. Παρατηρούμε ότι $T(z) = z + Y = 0 + Y$ αν και μόνο αν $z \in Y$. Όμως τότε $z \in Y \cap Z = \{0\}$, δηλαδή $z = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι $1-1$. Επίσης, ο T είναι επί: αν $x + Y \in X/Y$, τότε το x γράφεται στη μορφή $x = y + z$ για κάποια $y \in Y$ και $z \in Z$, άρα $x + Y = z + y + Y = z + Y = T(z)$. Δηλαδή, $X/Y = T(Z)$.

Αφού οι X/Y και Z είναι χώροι Banach, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης συμπεραίνουμε ότι ο T είναι ισομορφισμος. Άρα, ο X/Y είναι ισόμορφος με τον Z.

44. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης του X. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές και $f|_Y \in Y^*$, να δείξετε ότι $f \in X^*$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $z_1, \dots, z_n \in X$ ώστε κάθε $x \in X$ να γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = y + z$ όπου $y \in Y$ και $z \in Z := \text{span}\{z_1, \dots, z_n\}$.

Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Y$ και την $\tau : X/Y \to Z$ με $\tau(x + Y) = z$, όπου $x = y + z$. Η τ είναι συνεχής διότι $\dim(X/Y) = n < \infty$. Παρατηρούμε ότι η $P = \tau \circ Q$ ικανοποιεί την $P(x) = (\tau \circ Q)(y + z) = \tau(z + Y) = z$ για κάθε $x = y + z \in X$. Επίσης, η P είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών απεικονίσεων.

Δείχνουμε τώρα τη συνέχεια της f στο 0: έστω $x_n = y_n + z_n \to 0$. Τότε, $z_n = P(x_n) \to 0$ αφού η P είναι συνεχής. Η $f|_Z$ είναι συνεχής (διότι $\dim(Z) = n < \infty$), άρα $f(z_n) \to 0$. Επίσης, $y_n = x_n - z_n \to 0 - 0 = 0$ και, αφού η $f|_Y$ είναι συνεχής, $f(y_n) \to 0$. Έπεται ότι $f(x_n) = f(y_n) + f(z_n) \to 0 + 0 = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, έπεται ότι $f \in X^*$.

45. *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε διανυσματικό υπόχωρο Y του X, ορίζουμε*

$$N(Y) = \{f \in X^* : f(y) = 0 \text{ για κάθε } y \in Y\}.$$

(i) *Αποδείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X^*.*

(ii) *Αποδείξτε ότι αν Y_1, Y_2 είναι κλειστοί διανυσματικοί υπόχωροι του X και $Y_1 \neq Y_2$, τότε $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.*

Υπόδειξη. (i) Έστω $f, g \in N(Y)$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε $f(y) = g(y) = 0$, άρα

$$(af + bg)(y) = af(y) + bg(y) = 0,$$

άρα $af + bg \in N(Y)$. Έπεται ότι ο $N(Y)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X^*.

Έστω τώρα $f_n \in N(Y)$ και $f \in X^*$ ώστε $f_n \to f$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε $0 = f_n(y) \to f(y)$, άρα $f(y) = 0$. Αφού $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y$ έχουμε $f \in N(Y)$. Έπεται ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.

(ii) Αφού $Y_1 \neq Y_2$, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι υπάρχει $z \in Y_1 \setminus Y_2$. Αφού ο Y_2 είναι κλειστός υπόχωρος του X, από γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος Hahn-Banach μπορούμε να βρούμε $f \in X^*$ τέτοιο ώστε $f(z) \neq 0$ και $f(y) = 0$ για κάθε $y \in Y_2$. Τότε, $f \in N(Y_2)$ και $f \notin N(Y_1)$ (διότι $z \in Y_1$ και $f(z) \neq 0$). Άρα, $N(Y_1) \neq N(Y_2)$.

46. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y κλειστός υπόχωρος του X. Ο μηδενιστής του Y είναι το*

$$N(Y) = \{f \in X^* : \ \forall y \in Y \ f(y) = 0\}.$$

(α) *Αποδείξτε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^* και ο $X^*/N(Y)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y^*. Η ισομετρία είναι ο $T : X^*/N(Y) \to Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$.*
(β) *Αποδείξτε ότι ο $(X/Y)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $N(Y)$. Η ισομετρία είναι ο $S : (X/Y)^* \to N(Y)$ με $S(g) = g \circ Q$, όπου $Q : X \to X/Y$ η φυσιολογική απεικόνιση.*

Υπόδειξη. (α) Στην προηγούμενη άσκηση ελέγξαμε ότι ο $N(Y)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*. Ορίζουμε $T : X^*/N(Y) \to Y^*$ με $T(f + N(Y)) = f|_Y$. Ο T είναι καλά ορισμένος: αν $g \in f + N(Y)$ τότε $g - f \in N(Y)$, άρα $(g - f)|_Y \equiv 0$, δηλαδή, $f|_Y = g|_Y$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Δείχνουμε ότι είναι επί: έστω $h \in Y^*$. Από το θεώρημα Hahn–Banach υπάρχει επέκταση $f \in X^*$ της h. Τότε, $T(f + N(Y)) = f|_Y = h$.

Ο T είναι ισομετρία: έστω $f \in X^*$. Για κάθε $g \in N(Y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|f - g\| &= \sup\{|(f - g)(x)| : x \in B_X\} \geqslant \sup\{|(f - g)(y)| : y \in B_Y\} \\ &= \sup\{|f(y)| : y \in S_Y\} = \|f|_Y\| = \|T(f + N(Y))\|. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f + N(Y)\|_0 = \inf\{\|f - g\| : g \in N(Y)\} \geqslant \|T(f + N(Y))\|.$$

Από την άλλη πλευρά, η $f|_Y$ έχει επέκταση $f_0 \in X^*$ με $\|f_0\| = \|f|_Y\|$. Από την $f - f_0 \in N(Y)$ παίρνουμε

$$\|f + N(Y)\|_0 \leqslant \|f_0\| = \|f|_Y\| = \|T(f + N(Y))\|.$$

(β) Θεωρούμε την φυσιολογική απεικόνιση $Q : X \to X/Y$ και ορίζουμε $T : (X/Y)^* \to N(Y)$ με $T(g) = g \circ Q$. Ο T είναι καλά ορισμένος: έστω $g \in (X/Y)^*$. Αν $y \in Y$ τότε $Q(y) = [0]$, άρα $T(g)(y) = g([0]) = 0$. Δηλαδή, $T(g) \in N(Y)$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής. Δείχνουμε ότι είναι επί: έστω $f \in N(Y)$. Ορίζουμε $g : X/Y \to \mathbb{K}$ με $g(x + Y) = f(x)$ (η g είναι καλά ορισμένη, αφού αν $x_1 \in x + Y$ τότε $f(x_1) = f(x)$). Τότε $T(g)(x) = g(Q(x)) = g(x + Y) = f(x)$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή $T(g) = f$.

Ο T είναι ισομετρία: παρατηρούμε πρώτα ότι $\|T(g)\| = \|g \circ Q\| \leqslant \|Q\| \cdot \|g\| \leqslant \|g\|$ για κάθε $g \in (X/Y)^*$. Για την αντίστροφη ανισότητα,

$$\begin{aligned} \|g\| &= \sup\{|g(x + Y)| : \|x + Y\|_0 < 1\} \leqslant \sup\{|(g \circ Q)(z)| : \|z\| < 1\} \\ &= \sup\{|[T(g)](z)| : \|z\| < 1\} = \|T(g)\|, \end{aligned}$$

αφού, αν $\|x + Y\|_0 < 1$ τότε υπάρχει $y \in Y$ ώστε $\|x + y\| < 1$ και, αν θέσουμε $z = x + y$ έχουμε $[T(g)](z) = (g \circ Q)(z) = g(x + Y)$.