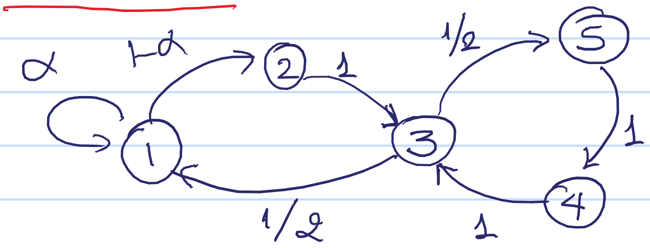
Στοχαστικές Ανελίξεις
Απαντήσεις Διαγωνίσματος Ιουνίου 2014

ΘΕΜΑ 1



(α) Για $\alpha=1$ η κατάσταση 1 είναι απορροφητική, επομένως η αλυσίδα δε μπορεί να είναι αδιαχώριστη.
Για $\alpha=0$ η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 3
Για $0<\alpha<1$ η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική.
Είναι επίσης και θετικά επαναληπτική, αφού είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη.

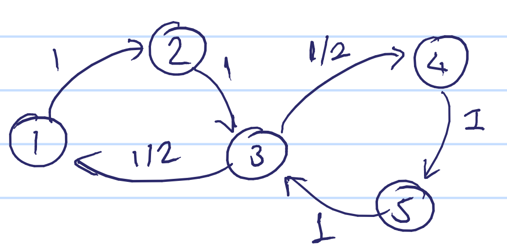
(β) Έστω $0<\alpha<1$. Οι εξισώσεις οριακής κατανομής είναι

$$\left.\begin{aligned}
\pi_1 &= \alpha\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_3\\
\pi_2 &= (1-\alpha)\pi_1\\
\pi_3 &= \pi_2+\pi_4\\
\pi_4 &= \pi_5\\
\pi_5 &= \tfrac{1}{2}\pi_3\\
\pi_1+\dots+\pi_5 &= 1
\end{aligned}\right|
\begin{aligned}
&\Rightarrow \pi_3 \quad 2(1-\alpha)\pi_1\\
&\Rightarrow \pi_2 = -\alpha)\pi_1\\
&\Rightarrow \pi_4=\pi_5=(1-\alpha)\pi_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi_1\left(1+(1-\alpha)+2(1-\alpha)+(1-\alpha)+(1-\alpha)\right)=1$$

$$\Rightarrow (6-5\alpha)\pi_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{6-5\alpha}\\ \pi_2=\pi_4=\pi_5 &= \frac{1-\alpha}{6-5\alpha}\\ \pi_3 &= \frac{2(1-\alpha)}{6-5\alpha}\end{aligned}}$$

(γ) Για $\alpha=1$:



Έστω $f_i = E[\text{χρόνος πρώτης μετάβασης στην } 1 \mid X_0=i]$

Οι f_i , $i=1,\dots,5$ ικανοποιούν τις εξισώσεις παρακάτω:

$$
\begin{array}{l|l}
f_1=0 & \\
f_2=1+f_3 & f_4=1+f_5=2+f_3 \\
f_3=1+\frac{1}{2}f_1+\frac{1}{2}f_4 & f_3=1+\frac{1}{2}(2+f_3) \\
f_4=1+f_5 & \Rightarrow \boxed{f_3=4} \\
f_5=1+f_3 &
\end{array}
$$

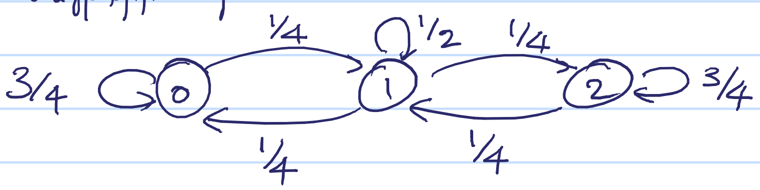
ΘΕΜΑ 2

Έστω X_n ο αριθμός ζευγαριών που βρίσκονται έξω από την κύρια είσοδο το πρωί της μέρας n, με $X_n\in\{0,1,2\}$. Προφανώς έξω από τη βοηθητική είσοδο θα βρίσκονται $2-X_n$ ζευγάρια.

Η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:

$$
P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}
$$

Για παράδειγμα, αν $X_n=0$ δηλαδή και τα δύο ζεύγη βρίσκονται στη βοηθητική. Τότε για να ισχύει $X_{n+1}=1$ θα πρέπει ο αθλητής να βγει από τη βοηθητική (να πάρει το ένα ζεύγος) και να επιστρέψει από την κύρια, γεγονός που έχει πιθανότητα $1/4$, επομένως $P_{01}=1/4$.
Επίσης $P_{02}=0$ επομένως $P_{00}=3/4$.
Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται παρόμοια.
Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική. Η οριακή κατανομή υπολογίζεται από:

$$
\left.\begin{array}{l}
\pi_0=\frac{3}{4}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1 \\
\pi_2=\frac{3}{4}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_1 \\
\pi_0+\pi_1+\pi_2=1
\end{array}\right\} \Rightarrow \pi_0=\pi_2=\pi_1=1/3
$$

Ο αθλητής τη μέρα n θα τρέξει ξυπόλυτος αν $X_n=0$ και βγει από την κύρια είσοδο ή αν $X_n=2$ και βγει από τη βοηθητική. Επομένως το ποσοστό ημερών που συμβαίνει αυτό σε μεγάλο ορίζοντα προσεγγίζεται από

$\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{2}\pi_3=\frac{1}{3}$.

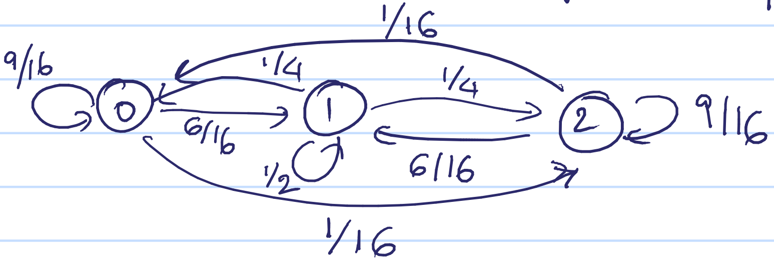
ΘΕΜΑ 3

Έστω X_n ο αριθμός των ενοικιασμένων δωματίων τη μέρα n. Η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα, αν $X_n=0$, τότε την επόμενη μέρα θα ενοικιαστούν και τα δύο δωμάτια με πιθανότητα $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$, δε θα νοικιαστεί κανένα με πιθανότητα $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, κ' θα νοικιαστεί ένα με πιθανότητα $1-\frac{1}{16}-\frac{9}{16}=\frac{6}{16}$

Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται παρόμοια. Το διάγραμμα είναι:



Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και αδιαχώριστη. Η οριακή κατανομή δίνεται από:

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{9}{16}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{16}\pi_2 \\ \pi_2 &= \frac{9}{16}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{16}\pi_0 \\ \pi_0&+\pi_1+\pi_2=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\pi_0=\pi_2$ (συμμετρία)

$\pi_0=\frac{10}{16}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1 \Rightarrow$

$\frac{6}{16}\pi_0=\frac{4}{16}\pi_1 \Rightarrow \pi_0=\pi_2=\frac{2}{3}\pi_1$

$\frac{2}{3}\pi_1+\pi_1+\frac{2}{3}\pi_1=1 \Rightarrow \boxed{\pi_1=\frac{3}{7},\ \pi_0=\pi_2=\frac{2}{7}}$

Επομένως το ποσοστό ημερών που είναι ενοικιασμένα 0 δωμάτια είναι $\frac{2}{7}$, 1 δωμάτιο $\frac{3}{7}$ και 2 δωμάτια $\frac{2}{7}$. Τα αντίστοιχα ημερήσια έσοδα σε κάθε κατάσταση είναι 0, 70, και 140. Επομένως το αναμενόμενο έσοδο ανά ημέρα είναι ίσο με

$$0 \cdot \frac{2}{7} + 70 \cdot \frac{3}{7} + 140 \cdot \frac{2}{7} = \frac{490}{7} = 70.$$

ΘΕΜΑ 4

(α) Έστω $X(t)$ η αίθουσα που βρίσκεται ο αναγνώστης τη χρονική στιγμή t, όπου
$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{μεγάλη αίθουσα} \\ 1 & \text{πρώτη μικρή αίθουσα} \\ 2 & \text{δεύτερη -"- -"-} \end{cases}$$

Η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με:

T_i = χρόνος παραμονής στην κατάσταση i, $T_i \sim Exp(q_i)$.

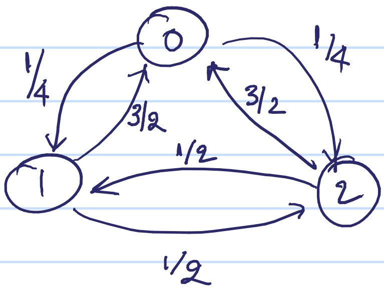
Έχουμε $E(T_0) = \frac{1}{q_0} = 2 \Rightarrow q_0 = 1/2$

$E(T_1) = E(T_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow q_1 = q_2 = 2.$

Επίσης $P_{01} = P_{02} = 1/2$, $P_{10} = \frac{3}{4}$, $P_{12} = \frac{1}{4}$, $P_{20} = \frac{3}{4}$, $P_{21} = \frac{1}{4}$

Επομένως οι ρυθμοί μετάβασης δίνονται από $q_{ij} = q_i \cdot P_{ij}$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$



(β) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη, επομένως θετικά επαναληπτική.
Η οριακή κατανομή δίνεται από τις εξισώσεις ολικής ισορροπίας:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \cdot 2 &= P_0 \cdot \frac{1}{4} + P_2 \cdot \frac{1}{2} \\ P_2 \cdot 2 &= P_0 \cdot \frac{1}{4} + P_0 \cdot \frac{1}{2} \\ P_0 + P_1 + P_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$P_1 = P_2 \Rightarrow P_1 \cdot \frac{3}{2} = P_0 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$

$P_1 = P_2 = \frac{1}{6} P_0 \Rightarrow P_0 + \frac{1}{6} P_0 + \frac{1}{6} P_0 = 1 \Rightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{P_0 = \frac{3}{4}, \; P_1 = P_2 = 1/8}$

(γ) Ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση j, $\sigma_j = E(S_{jj})$, είναι ίσος με

$\sigma_j = \frac{1}{p_j q_j}$. Εδώ για την κατάσταση 0, $\sigma_0 = \frac{1}{p_0 q_0} = \frac{1}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$ hrs.

Ο χρόνος S_{jj} ορίζεται ως

$$S_{jj} = \min\{t>0 : X(t)=j \mid X(0)=j\}$$

δηλ. ο χρόνος μέχρι την επόμενη επάνοδο στην κατάσταση j, αν για $t=0$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j. Ο χρόνος S_{jj} επομένως περιλαμβάνει το χρόνο παραμονής στην j ($\sim Exp(q_j)$) και το χρόνο από την αναχώρηση από j μέχρι την επάνοδο, έστω τ_j.

Επομένως $E(S_{jj}) = \sigma_j = \frac{1}{q_j} + \tau_j \Rightarrow \tau_j = \sigma_j - \frac{1}{q_j} = \frac{1}{p_j q_j} - \frac{1}{q_j}$

Εδώ για $j=0$: $\tau_0 = \frac{8}{3} - \frac{1}{1/2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ hrs