

## Στοχαστικές Ανελιξίες - Ιούλιος 2014

### ΟΔΗΓΙΕΣ

- (1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
- (2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί.
- (3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται.
- (4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού.
- (5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.

**Καλή Επιτυχία!**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.** Δίνεται μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  και πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος

$$p_{11} = \alpha, p_{12} = 1 - \alpha, p_{35} = p_{31} = \frac{1}{2}, p_{23} = p_{43} = p_{54} = 1,$$

όπου  $\alpha \in [0, 1]$ . Οι υπόλοιπες πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι μηδενικές.

- (α) Για ποιες τιμές του  $\alpha$  η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική;
- (β) Για τις τιμές του  $\alpha$  που βρέθηκαν στο ερώτημα (α), να υπολογιστεί η οριακή κατανομή.
- (γ) Για  $\alpha = 1$  να βρεθεί ο αναμενόμενος χρόνος πρώτης μετάβασης από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 1.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.** Ένας αθλητής βγαίνει κάθε πρωί από το σπίτι του για τρέξιμο. Το σπίτι έχει δύο πόρτες, την κύρια και τη βοηθητική. Ο αθλητής είναι εξ ίσου πιθανό να βγει από οποιαδήποτε από τις δύο πόρτες και να επιστρέψει σε οποιαδήποτε από τις δύο πόρτες. Έχει δύο ζευγάρια παπούτσια για τρέξιμο, που τα αφήνει έξω από το σπίτι. Όταν φεύγει το πρωί, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι παπούτσια στην πόρτα από την οποία βγαίνει τα φοράει, διαφορετικά τρέχει ξυπόλητος. Όταν επιστρέφει στο σπίτι αφήνει τα παπούτσια που φοράει (αν φοράει) στην πόρτα που επιστρέφει.

Να βρεθεί το ποσοστό των ημερών που ο αθλητής τρέχει ξυπόλητος.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.** Ένα μικρός ξενώνας έχει δύο δωμάτια που ο ιδιοκτήτης ενοικιάζει χωριστά το ένα από το άλλο. Αν κάποια μέρα είναι και τα δύο δωμάτια νοικιασμένα, τότε την επόμενη μέρα κάθε δωμάτιο έχει πιθανότητα ίση με  $3/4$  να ενοικιαστεί (ανεξάρτητα από το άλλο). Αν κάποια μέρα είναι νοικιασμένο μόνο ένα δωμάτιο, τότε την επόμενη μέρα κάθε δωμάτιο έχει πιθανότητα  $1/2$  να ενοικιαστεί, ενώ αν μια μέρα κανένα δωμάτιο δεν είναι νοικιασμένο, τότε την άλλη μέρα κάθε δωμάτιο έχει πιθανότητα  $1/4$  να ενοικιαστεί.

Η τιμή ενοικίασης ενός δωματίου για μια μέρα είναι 70 ευρώ.

Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο ημερήσιο έσοδο του ιδιοκτήτη.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.** Μια βιβλιοθήκη έχει μια μεγάλη αίθουσα βιβλίων και δύο μικρές. Ένας αναγνώστης περνάει όλο του τον καιρό στις 3 αίθουσες. Ο χρόνος παραμονής του στη μεγάλη αίθουσα ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 ώρες, ενώ σε κάθε μικρή αίθουσα εκθετική κατανομή με μέση τιμή 30 λεπτά. Από τη μεγάλη αίθουσα πηγαίνει σε κάθε μια από τις μικρές με ίσες πιθανότητες, ενώ από κάθε μικρή αίθουσα πηγαίνει στη μεγάλη με πιθανότητα  $3/4$  και στην άλλη μικρή με πιθανότητα  $1/4$ .

(α) Να μοντελοποιηθεί η κίνηση του αναγνώστη ως μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου και να γραφεί ο πίνακας ρυθμών μετάβασης.

(β) Ναδειχθεί ότι η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική και να υπολογιστεί η οριακή κατανομή.

(γ) Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος από τη στιγμή που ο αναγνώστης φεύγει από τη μεγάλη αίθουσα μέχρι την επόμενη φορά που θα επιστρέψει σε αυτήν.