Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, αποκλειστικά στο χώρο που προβλέπεται για αυτές.

Χρησιμοποιήστε την τελευταία σελίδα για πρόχειρο (μπορείτε να ζητήσετε και επιπλέον χαρτί) και καταγράψτε τις απαντήσεις σας στον χώρο που προβλέπεται ΜΟΝΟΝ αφού βεβαιωθείτε ότι είναι σωστές.

Διάρκεια: 120 λεπτά. Στη διόρθωση θα δοθεί ιδιαίτερη σημασία στην ακριβή μαθηματική διατύπωση.

Επώνυμο:

Όνομα:

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα

- ☐ ΠΜΣ Τμ. Μαθηματικών
- ☐ ΑΛΜΑ
- ☐ Άλλο, προσδιορίστε:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1 [3]	2 [3]	3 [4]	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 1 [3 μονάδες].

Ας είναι $\mathfrak{A}$ δομή σε πρωτοτάξια γλώσσα L, προτάσεις ϕ, ψ και σύνολο προτάσεων Σ στη γλώσσα L. Θεωρήστε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(1) $\models_{\mathfrak{A}} (\phi \vee \psi)$ αν και μόνον αν $\models_{\mathfrak{A}} \phi$ είτε $\models_{\mathfrak{A}} \psi$
(2) $\Sigma \vdash (\phi \vee \psi)$ αν και μόνον αν $\Sigma \vdash \phi$ είτε $\Sigma \vdash \psi$
(3) $\models_{\mathfrak{A}} (\phi \wedge \psi)$ αν και μόνον αν $\models_{\mathfrak{A}} \phi$ και $\models_{\mathfrak{A}} \psi$
(4) $\Sigma \vdash (\phi \wedge \psi)$ αν και μόνον αν $\Sigma \vdash \phi$ και $\Sigma \vdash \psi$.

Κυκλώστε τους αριθμούς των όποιων από τους παραπάνω ισχυρισμούς είναι λανθασμένοι και δώστε από ένα απλό παράδειγμα για όποιον ή όποιους κυκλώσατε. Μην σχολιάσετε όσους ισχυρισμούς θεωρείτε ως αληθείς. Διευκρίνιση: Η έννοια της τυπικής απόδειξης (συναγωγής) "$\vdash$" εμπεριέχει ως προϋποθέσεις τα λογικά αξιώματα.

Απάντηση: Πρέπει να κυκλωθεί μόνον το (2). Αντιπαράδειγμα: $\Sigma = \emptyset$ Επίσης θεωρούμε ως ϕ μία οποιαδήποτε μη έγκυρη πρόταση, της οποίας η άρνηση δεν είναι έγκυρη επίσης, π.χ. την $\exists x \exists y (x \neq y)$ και ως ψ την $(\neg \phi)$.

Θέμα 2 [3 μονάδες].

Θεωρήστε μία πρωτοβάθμια γλώσσα L με ένα μονοθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο P. Αποδείξτε με σημασιολογικό τρόπο την εγκυρότητα της πρότασης $\exists x(P(x) \to \forall x P(x))$, δηλαδή αποδείξτε ότι η πρόταση αυτή επαληθεύεται σε οποιαδήποτε δομή.

Απάντηση: Θεωρούμε αυθαίρετη δομή $\mathfrak{A}$ και έστω ότι δεν ισχύει ότι $\models_{\mathfrak{A}} \exists x(P(x) \to \forall x P(x))$. Τότε θα έχουμε ότι $\models_{\mathfrak{A}} \forall x(P(x) \land \exists x(\neg P(x)))$. Επομένως θα έχουμε ότι για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$ ισχύει ότι $\models_{\mathfrak{A}} P(a)$ και επίσης ότι $\models_{\mathfrak{A}} \exists x(\neg P(x))$, από τα οποία ευκόλως οδηγούμαστε σε άτοπο.

Θέμα 3 Έστω L μία πεπερασμένη πρωτοβάθμια γλώσσα με ισότητα που περιέχει ως μόνα μη λογικά σύμβολα αποκλειστικά κατηγορηματικά σύμβολα. Έστωσαν ακόμη ϕ πρόταση η οποία είναι της μορφής $\forall x\psi(x)$, όπου ψ είναι τύπος χωρίς ποσοδείκτες, και $\mathfrak{A}$ δομή (ερμηνεία) της L.
3α [1 μονάδα]. Ισχύει ότι αν για κάποια δομή $\mathfrak{B}$ έχουμε ότι $\models_{\mathfrak{B}} \phi$, τότε για κάθε υποδομή $\mathfrak{B}'$ της $\mathfrak{B}$, έχουμε ότι $\models_{\mathfrak{B}'} \phi$; Απαντήστε μονολεκτικά, χωρίς οποιαδήποτε εξήγηση.
3β [3 μονάδες]. Αποδείξτε ότι αν $\models_{\mathfrak{F}} \phi$ για κάθε πεπερασμένη υποδομή $\mathfrak{F}$ της $\mathfrak{A}$, τότε $\models_{\mathfrak{A}} \phi$. Υπόδειξη: Εμπλουτίστε τη γλώσσα L εισάγοντας μία σταθερά c_a για κάθε στοιχείο του $a \in |\mathfrak{A}|$, συμβολίστε με L' την εμπλουτισμένη γλώσσα, θεωρήστε το σύνολο Σ των ατομικών προτάσεων της L' ή αρνήσεων τους, οι οποίες επαληθεύονται στην $\mathfrak{A}$ όταν θεωρούμε ως ερμηνεία των νέων σταθερών c_a το a, και τέλος εφαρμόστε Θ. Συμπάγειας στο $\Sigma \cup \{\phi\}$.

Απάντηση: Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι καταφατική. Για το δεύτερο, θα αποδείξουμε πρώτα ότι ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο Π του $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Δεχόμαστε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\phi \in \Pi$. Έστω $\{c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}\}$ οι σταθερές που εμφανίζονται στο Π. Θεωρούμε πεπερασμένη υποδομή $\mathfrak{F}$ της $\mathfrak{A}$ στην αρχική γλώσσα L έτσι ώστε το $|\mathfrak{F}| = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (είναι δυνατό αφού η L έχει μόνο κατηγορηματικά σύμβολα). Για να θεωρηθεί η $\mathfrak{F}$ ως δομή στην εμπλουτισμένη γλώσσα L', ερμηνεύουμε τις σταθερές $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ ως $a_1, \ldots, a_n$, αντίστοιχα, και τις υπόλοιπες σταθερές της L' αυθαίρετα. Εξ υποθέσεως $\models_{\mathfrak{F}} \phi$. Επίσης επειδή τα στοιχεία του Π πλην της ϕ είναι ατομικές προτάσεις, ή αρνήσεις τους, και περιέχουν μόνο τα τα $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ από τα νέα σύμβολα της L' και επειδή $\mathfrak{F}$ υποδομή της $\mathfrak{A}$ στη γλώσσα L, συμπεραίνουμε ότι $\models_{\mathfrak{F}} \Pi$. Άρα πράγματι το Π είναι ικανοποιήσιμο. Από το Θεώρημα Συμπάγειας τώρα έχουμε ότι το $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Έστω $\mathfrak{B}$ δομή της γλώσσας L' έτσι ώστε $\models_{\mathfrak{B}} \Sigma \cup \{\phi\}$. Άρα $\models_{\mathfrak{B}} \phi$. Επειδή τώρα η γλώσσα L' περιέχει ένα σύμβολο σταθεράς c_a για κάθε $a \in A$ και επειδή $c_a^{\mathfrak{A}} = a$ και επειδή τέλος το Σ περιέχει όλες τις ατομικές προτάσεις ή αρνήσεις τους της γλώσσας L' που επαληθεύονται στην $\mathfrak{A}$ συμπεραίνουμε ότι η δομή $\mathfrak{B}$ περιέχει ως υποδομή ένα ισομορφικό αντίγραφο $\mathfrak{A}'$ της $\mathfrak{A}$ για τη γλώσσα L. Από το πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι $\models_{\mathfrak{A}'} \phi$. Άρα λόγω ισομορφίας, $\models_{\mathfrak{A}} \phi$.