Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας. Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις.

Γράψτε το ΠΜΣ στο οποίο θα σταλεί ο βαθμός σας. Εάν προέρχεστε από ΠΜΣ όπου το μάθημα «Μαθηματική Λογική» δεν διδάσκεται, γράψτε ΚΑΙ το ΠΜΣ από το οποίο επιθυμείτε να σταλεί βαθμός (ΜΑΘ, ΜΠΛΑ, ΑΛΜΑ)

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

Όνομα:

ΠΜΣ προέλευσης:										
ΠΜΣ βαθμού:										

ΑΜ:													

Βαθμοί

1 (1,5)	2 (1,5)	3 (3)	Σύνολο (6)

Καλη Επιτυχια

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 1α [1,5 μονάδα].

Πόσοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς αληθεύουν;

(I) Ας είναι σ πρόταση της γλώσσας της θεωρίας αριθμών $L_S^{\text{θ.α.}}$ με μόνα σύμβολα το σύμβολο της συνάρτησης του επόμενου S και σύμβολο σταθεράς 0, $\mathfrak{N}_S$ η αντίστοιχη δομή με σύμπαν τους φυσικούς και A_S το γνωστό σύνολο των αξιωμάτων που αναφέρονται στη γλώσσα αυτή. Τότε $\sigma \in \mathrm{Th}\mathfrak{N}_S$ ανν $A_S \vdash \sigma$.

(II) Αν $\mathfrak{N}$ είναι η δομή των φυσικών στην γλώσσα $L^{\text{θ.α.}}$ που περιέχει σύμβολα για τις στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις, τη διάταξη κτλ, τότε υπάρχει διαγνώσιμο σύνολο αξιωμάτων A στη γλώσσα αυτή έτσι ώστε $\sigma \in \mathrm{Th}\mathfrak{N}$ ανν $A \vdash \sigma$.

(III) Υπάρχει αναδρομικά αριθμήσιμο (αλλά όχι αναγκαστικά διαγνώσιμο) σύνολο προτάσεων A στη γλώσσα $L^{\text{θ.α.}}$ έτσι ώστε $\sigma \in \mathrm{Th}\mathfrak{N}$ ανν $A \vdash \sigma$.

(IV) Υπάρχει σύνολο προτάσεων A στη γλώσσα $L^{\text{θ.α.}}$, οι αριθμοί Gödel του οποίου είναι σύνολο ορίσιμο στη δομή $\mathfrak{N}$ (αλλά όχι αναγκαστικά αναδρομικά αριθμήσιμο), έτσι ώστε $\sigma \in \mathrm{Th}\mathfrak{N}$ ανν $A \vdash \sigma$.

(V) Υπάρχει σύνολο προτάσεων A στη γλώσσα $L^{\text{θ.α.}}$ (χωρίς αναγκαστικά το A να έχει κάποια περιοριστική ιδιότητα), έτσι ώστε $\sigma \in \mathrm{Th}\mathfrak{N}$ ανν $A \vdash \sigma$.

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια:

(1) Αληθεύει ακριβώς ένας από τους ισχυρισμούς (I–V).

(2) Αληθεύουν ακριβώς δύο από τους ισχυρισμούς (I–V).

(3) Αληθεύουν ακριβώς τρεις από τους ισχυρισμούς (I–V).

(4) Αληθεύουν ακριβώς τέσσερις από τους ισχυρισμούς (I–V).

(5) Ουδείς αληθεύει.

(6) Αληθεύουν όλοι

Απάντηση: Σωστό είναι το (2). (Το (V) αληθεύει διότι μπορούμε να πάρουμε $A = \mathrm{Th}\mathfrak{N}$· το (I) επίσης αληθεύει.)

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 2 [1,5 μονάδα]. Ορίστε πότε ένα σύνολο τύπων Σ πρωτοτάξιας γλώσσας καλείται ικανοποιήσιμο και πότε συνεπές. Δεχόμενοι ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυρα, αλλά χωρίς να κάνετε χρήση του Θεωρήματος Αξιοπιστίας-Πληρότητας, να αποδείξετε λεπτομερώς μία από τις ακόλουθες προτάσεις (να αναφέρετε ποια αποδεικνύετε):

(1) Σ είναι ικανοποιήσιμο αν είναι συνεπές.

(2) Αν Σ δεν είναι συνεπές τότε δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Απάντηση: Συνεπές καλείται το Σ αν δεν υπάρχει τύπος ϕ έτσι ώστε $\Sigma \vdash \psi \wedge (\neg\psi)$.

Ικανοποιήσιμο καλείται το Σ αν υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ δομή και απονομή σ έτσι ώστε:

$$\text{για κάθε τύπο } \phi \in \Sigma, \text{ έχουμε ότι } \models_{\mathfrak{A}} \phi[\sigma].$$

Θα αποδείξουμε το (2). Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν Σ ικανοποιήσιμο τότε συνεπές. Έστω $\mathfrak{A}$ δομή και σ απονομή έτσι ώστε:

$$\text{για κάθε τύπο } \phi \in \Sigma, \text{ έχουμε ότι } \models_{\mathfrak{A}} \phi[\sigma]. \tag{α΄}$$

Έστω, στοχεύοντας σε άτοπο, ότι το Σ δεν είναι συνεπές. Τότε υπάρχει τύπος ψ έτσι ώστε $\Sigma \vdash \psi \wedge (\neg\psi)$. Έστω $\psi_1, \ldots, \psi_n$ απόδειξη του $\psi \wedge (\neg\psi)$ με παραδοχές από το Σ. Δηλαδή:

(I) $\psi_n = \psi \wedge (\neg\psi)$ και

(II) για κάθε $i = 1, \ldots, n$ έχουμε ότι ψ_i είναι λογικό αξίωμα ή $\psi_i \in \Sigma$ ή υπάρχουν $k, l < i$ έτσι ώστε $\psi_l = (\psi_k \to \psi_i)$.

Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο i ότι $\forall i = 1, \ldots, n$:

$$\models_{\mathfrak{A}} \psi_i[\sigma]. \tag{β΄}$$

Έστω επομένως ότι η (β΄) ισχύει $\forall j < i$. Για να αποδείξουμε ότι ισχύει και για i διακρίνουμε τις τρεις περιπτώσεις που απαριθμούνται στο (II). Η περίπτωση όπου το ψ_i είναι λογικό αξίωμα καλύπτεται από την παραδοχή που μας επιτρέπει η εκφώνηση. Η περίπτωση όπου το $\psi_i \in \Sigma$ καλύπτεται από την (α΄), και η περίπτωση τέλος όπου υπάρχουν $k, l < i$ έτσι ώστε $\psi_l = (\psi_k \to \psi_i)$ καλύπτεται από την επαγωγική υπόθεση και τον ορισμό του Tarski για τύπους της μορφής $(\psi_k \to \psi_i)$. Το άτοπο προκύπτει από το (I).

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 3 [3 μονάδες]. Στη Θεωρία Αριθμών ορίζουμε ως τελικώς περιοδικό ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{N}$ για το οποίο ισχύει:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})(\forall x \geq n_0)(x \in X \iff x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } p)$$

Προσοχή: Ο παραπάνω ορισμός είναι διατυπωμένος στη μεταγλώσσα. Έστω $L_A^{\theta.\alpha.}$ η γλώσσα της Θ. Αριθμών με μόνα σύμβολα $0, S, +, <$ και $\mathfrak{N}_A$ η αντίστοιχη «κλασική» δομή. Να αποδείξετε προσεκτικά ότι κάθε τελικώς περιοδικό σύνολο ορίζεται στη δομή $\mathfrak{N}_A$.
Προσοχή: Μη βιαστείτε να απαντήσετε.

Απάντηση: Χάριν συντομίας του συμβολισμού, αν n είναι ένας (σταθεροποιημένος, μεταγλωσσικός) φυσικός αριθμός, τότε με $\underline{n}$ συμβολίζουμε τον όρο

$$\underbrace{S \cdots S}_{n \text{ φορές}} 0$$

της γλώσσας $L_A^{\theta.\alpha.}$ (ό όρος αυτός δεν περιέχει παρά μόνο τα σύμβολα S και 0). Επίσης αν u όρος της γλώσσας $L_A^{\theta.\alpha.}$, τότε με $n \times u$ συμβολίζουμε τον όρο

$$\underbrace{u + u + \cdots + u}_{n \text{ φορές}}$$

της γλώσσας $L_A^{\theta.\alpha.}$ (ο όρος αυτός περιέχει μόνον τα σύμβολα του όρου u).

Έστω ένα (σταθεροποιημένο) τελικώς περιοδικό σύνολο A και έστω n_0, p οι (σταθεροποιημένοι) φυσικοί που αναφέρονται στο μεταγλωσσικό ορισμό των τελικώς περιοδικών συνόλων. Έστω επίσης ότι τα (σταθεροποιημένα) στοιχεία του A που είναι $\leq n_0$ είναι τα $n_1, \ldots, n_k$ (όπου k επίσης σταθεροποιημένος φυσικός). Ο τύπος ϕ με μία ελεύθερη μεταβλητή x που ορίζει το A στη δομή $\mathfrak{N}_A$ είναι ο:

$$(x = \underline{n_1}) \vee \cdots \vee (x = \underline{n_k}) \vee \big(\underline{n_0} \leq x \wedge \exists y(x = p \times y)\big)\,.$$

Παρατήρηση: Ασθενέστερος και πιο συνηθισμένος μεταγλωσσικός ορισμός για τα τελικώς περιοδικά σύνολα (ισοδύναμος με του Enderton) είναι ο:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\exists p \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N})(\forall x \geq n_0)(x \in X \iff x = z + \text{ πολλαπλάσιο του } p).$$

Στην περίπτωση που δοθεί αυτός ο ορισμός, σταθεροποιούμε και το z και ο τύπος γίνεται:

$$(x = \underline{n_1}) \vee \cdots \vee (x = \underline{n_k}) \vee \big(\underline{n_0} \leq x \wedge \exists y(x = \underline{z} + p \times y)\big)\,.$$

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο