Λογική Ι (Θεωρητικά Μαθ.) - Μαθηματική Λογική (ΜΠΛΑ)
Ενδιάμεση Εξέταση Μάιος 2012

Θέμα 1.1. Έστω $\Sigma_i, i = 1, \ldots, \infty$ μία άπειρη (αριθμήσιμη) ακολουθία συνόλων τύπων πρωτοβάθμιας γλώσσας, έτσι ώστε για κάθε i, (α) $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ και (β) το Σ_i είναι συντακτικά ανεξάρτητο, δηλαδή κανένα από τα στοιχεία του Σ_i δεν αποδεικνύεται λαμβάνοντας ως μη λογικά αξιώματα το υπόλοιπα στοιχεία του Σ_i, συμβολικά:

$$(\forall \phi \in \Sigma_i)(\Sigma_i \setminus \{\phi\} \nvdash \phi).$$

Να αποδείξετε ότι συντακτικά ανεξάρτητο είναι και το $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ (μη χρησιμοποιήσετε το θεώρημα ορθότητας-πληρότητας, ούτε το θεώρημα συμπάγειας).

Λύση. Έστω

$$\phi \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \tag{1}$$

και έστω

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \setminus \{\phi\} \vdash \phi. \tag{2}$$

Άρα, από (2), και επειδή μία τυπική απόδειξη χρησιμοποιεί εξ ορισμού πεπερασμένα μη λογικά αξιώματα, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο Σ' έτσι ώστε

$$\Sigma' \vdash \phi \tag{3}$$

και επιπλέον

$$\Sigma' \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \setminus \{\phi\}. \tag{4}$$

Επειδή όμως $\forall i, \Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$, συμπεραίνουμε από τις (4) και (1) ότι $\exists i_0$ έτσι ώστε

$$\Sigma' \subseteq \Sigma_{i_0} \setminus \{\phi\}$$

και

$$\phi \in \Sigma_{i_0}. \tag{5}$$

Οπότε από (3) προκύπτει ότι

$$\Sigma_{i_0} \setminus \{\phi\} \vdash \phi. \tag{6}$$

Οι σχέσεις όμως (5) και (6) αντιβαίνουν στη συντακτική ανεξαρτησία του Σ_{i_0}.

Θέμα 1.2. Έστω πάλι $\Sigma_i, i = 1, \ldots, \infty$ μία άπειρη (αριθμήσιμη) ακολουθία συνόλων τύπων πρωτοβάθμιας γλώσσας, έτσι ώστε για κάθε i, (α) $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ και (β) το Σ_i είναι σημασιολογικά ανεξάρτητο, δηλαδή κανένα από τα στοιχεία του Σ_i δεν είναι λογική συνέπεια των υπόλοιπων στοιχείων του Σ_i, συμβολικά:

$$(\forall \phi \in \Sigma_i)(\Sigma_i \setminus \{\phi\} \not\models \phi).$$

Να αποδείξετε ότι σημασιολογικά ανεξάρτητο είναι και το $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ (χρησιμοποιήστε συμπάγεια, αλλά όχι πληρότητα)

Λύση. Έστω

$$\phi \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \tag{7}$$

και έστω

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \setminus \{\phi\} \models \phi. \tag{8}$$

Από (8) και εξ ορισμού της λογικής συνεπαγωγής προκύπτει ότι το σύνολο

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \setminus \{\phi\} \cup \{\neg\phi\}$$

δεν είναι ικανοποιήσιμο, άρα από το θεώρημα συμπάγειας υπάρχει πεπερασμένο μη ικανοποιήσιμο υποσύνολο $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \neg\phi\}$ του $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \setminus \{\phi\} \cup \{\neg\phi\}$ ώστε

$$\phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i \setminus \{\phi\}. \tag{9}$$

Επειδή όμως $\forall i, \Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$, συμπεραίνουμε από τις (9) και (7) ότι $\exists i_0$ έτσι ώστε

$$\phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \in \Sigma_{i_0} \setminus \{\phi\}$$

και

$$\phi \in \Sigma_{i_0}. \tag{10}$$

Οπότε, επειδή $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}, \neg\phi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο, το ίδιο ισχύει και για το σύνολο $\Sigma_{i_0} \setminus \{\phi\} \cup \{\neg\phi\}$. Οπότε από τον ορισμό της λογικής συνεπαγωγής προκύπτει ότι

$$\Sigma_{i_0} \setminus \{\phi\} \models \phi. \tag{11}$$

Οι σχέσεις όμως (10) και (11) αντιβαίνουν στη σημασιολογική ανεξαρτησία του Σ_{i_0}.

Θέμα 2. Έστωσαν Σ σύνολο προτάσεων και $\phi_i, i = 0, \ldots, n$ προτάσεις πρωτοβάθμιας γλώσσας έτσι ώστε η πρόταση:

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi_0$$

είναι έγκυρη και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο. Να αποδείξετε (χωρίς χρήση συμπάγειας) ότι το ίδιο ισχύει για κάποιο από τα σύνολα

$$\Sigma \cup \{\phi_0\}, \Sigma \cup \{\neg\phi_1\}, \ldots, \Sigma \cup \{\neg\phi_n\}.$$

Λύση. Έστω ότι το προς απόδειξη δεν ισχύει. Τότε για $i = 0, \ldots, n$ υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα $T_i \subset \Sigma$, ώστε τα σύνολα

$$T_0 \cup \{\phi_0\}, T_1 \cup \{\neg\phi_1\}, \ldots, T_n \cup \{\neg\phi_n\}$$

δεν είναι ικανοποιήσιμα. Οπότε μη ικανοποιήσιμα είναι και τα σύνολα

$$\bigcup_{i=0}^{n} T_i \cup \{\phi_0\}, \bigcup_{i=0}^{n} T_i \cup \{\neg\phi_1\}, \ldots, \bigcup_{i=0}^{n} T_i \cup \{\neg\phi_n\}. \tag{12}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι μη ικανοποιήσιμο είναι και το $\bigcup_{i=0}^{n} T_i$, οπότε θα έχουμε τελειώσει διότι το $\bigcup_{i=0}^{n} T_i$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Σ και εξ υποθέσεως είναι ικανοποιήσιμο. Πράγματι έστω ότι υπάρχει ερμηνεία $\mathfrak{A}$ ώστε

$$\mathfrak{A} \models \bigcup_{i=0}^{n} T_i. \tag{13}$$

Επειδή κατά την υπόθεση του θέματος, η πρόταση

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \to \phi_0 \equiv (\neg\phi_1) \vee \cdots \vee (\neg\phi_n) \vee \phi_0$$

είναι έγκυρη, συμπεραίνουμε ότι θα είναι αληθής στην ερμηνεία $\mathfrak{A}$ μία τουλάχιστον εκ των $\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_n, \phi_0$. Συμπεραίνουμε από την (13) ότι ένα τουλάχιστον από τα σύνολα

$$\bigcup_{i=0}^{n} T_i \cup \{\phi_0\}, \bigcup_{i=0}^{n} T_i \cup \{\neg\phi_1\}, \ldots, \bigcup_{i=0}^{n} T_i \cup \{\neg\phi_n\}$$

είναι ικανοποιήσιμο, άτοπο με βάση την (12)

.

Θέμα 3. Θεωρούμε την ερμηνεία $\mathfrak{R}_{\pi o \lambda} = \langle \mathbb{R}, <, \cdot, 1 \rangle$ (λείπει η πρόσθεση, αλλά υπάρχει ο πολλαπλασιασμός) και την ερμηνεία $\mathfrak{R}_{\pi \rho o \sigma \vartheta} = \langle \mathbb{R}, <, +, 0 \rangle$ (λείπει ο πολλαπλασιασμός, αλλά υπάρχει η πρόσθεση). Να αποδείξετε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ δεν είναι ορίσιμο σε καμία από τις ερμηνείες αυτές.

Λύση. Οι απεικονίσεις $x \mapsto x^3$ και $x \mapsto (1/2)x$ είναι αυτομορφισμοί των ερμηνειών $\mathfrak{R}_{\pi o \lambda} = \langle \mathbb{R}, <, \cdot, 1 \rangle$ και $\mathfrak{R}_{\pi \rho o \sigma \vartheta} = \langle \mathbb{R}, <, +, 0 \rangle$, αντίστοιχα. Αμφότερες όμως οι απεικονίσεις αυτές δεν διατηρούν το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$, δηλαδή δεν ισχύει ότι $x \in \mathbb{N}$ ανν $x^3 \in \mathbb{N}$, ούτε $x \in \mathbb{N}$ ανν $(1/2)x \in \mathbb{N}$. Άρα το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν ορίζεται σε οποιαδήποτε από αυτές τις δύο ερμηνείες.

Σημείωση. Το κάθε θέμα θα βαθμολογηθεί με άριστα το 3. Επιπλέον, σε κάθε θέμα που δεν περιέχει λάθη *ούτε περιττολογίες* θα δοθεί μισή πρόσθετη μονάδα, ακόμη και εάν είναι μερικώς ανεπτυγμένο (ή και ολότελα κενό).

Καλη Επιτυχια