

Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα - Σεπτέμβριος 2022

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ Α.Μ: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ

- (1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
- (2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σαν να μην έχουν δοθεί.
- (3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
- (4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).
- (5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά. **Καλή Επιτυχία!**

ΘΕΜΑ 1.

Από ένα σημείο του οδικού δικτύου περνούν αυτοκίνητα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{N_1(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό λ_1 και δίκυκλα σύμφωνα με μια ανεξάρτητη της πρώτης διαδικασία Poisson $\{N_2(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό λ_2 . Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία αφίξεων οχημάτων και των δύο κατηγοριών, με $N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0$.

- (α) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να περάσουν n οχήματα.
- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα τρία πρώτα οχήματα που θα περάσουν από το σημείο να είναι 1 αυτοκίνητο και 2 δίκυκλα, με αυτή τη σειρά.
- (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα στα 5 πρώτα οχήματα που θα περάσουν από το σημείο, τα 2 να είναι αυτοκίνητα.
- (δ) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E[N_1(t) | N(t/2) = k]$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους X_1, X_2, \dots που ακολουθούν συνεχή κατανομή με αδρυστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$ και ροπές $E[X^k] = \mu_k < \infty, k = 1, 2, \dots$. Έστω $S_n = X_1 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$ οι στιγμές γεγονότων με $S_0 = 0$. Θετούμε $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ τον υπολειπόμενο χρόνο έως το επόμενο γεγονός από τη στιγμή t και έστω $h(t) = E[B(t)^2]$ η δεύτερη ροπή της $B(t)$.

- (α) Να διατυπώσετε μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.
- (β) Να υπολογίσετε το όριο $a = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.
- (γ) Αν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ , δείξτε ότι $h(t) = a$ για κάθε $t \geq 0$.

ΘΕΜΑ 3. Έξω από την αίθουσα αφίξεων ενός αεροδρομίου βρίσκεται μια στάση λεωφορείου που μεταφέρει επιβάτες σε έναν απομακρυσμένο χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Επιβάτες φτάνουν στη στάση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Το λεωφορείο έχει άπειρη χωρητικότητα και όταν περάσει από τη στάση παίρνει όλους τους επιβάτες που περιμένουν. Το λεωφορείο πηγαίνει τους επιβάτες στο parking και επιστρέφει για να πάρει τους επόμενους (αν δεν υπάρχει επιβάτης να περιμένει φεύγει άδειο). Ο χρόνος επιβίβασης και αποβίβασης των επιβατών είναι αμελητέος. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς. Ο χρόνος διαδρομής του λεωφορείου από τη στάση στο parking ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Ο χρόνος της διαδρομής από το parking πίσω στη στάση είναι ανεξάρτητος του προηγούμενου και ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με ρυθμό μ .

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα όταν φτάσει το λεωφορείο στη στάση να περιμένουν n επιβάτες, για $n \geq 0$.
- (β) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό επιβατών που περιμένουν στη στάση όταν φτάσει το λεωφορείο.
- (γ) Αν κάθε επιβάτης πληρώνει εισιτήριο r ενώ το κόστος λειτουργίας του λεωφορείου είναι ίσο με c ανά μονάδα χρόνου για όσο διάστημα κινείται, να υπολογίσετε το αναμενόμενο μέσο καθαρό κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

Στοιχειώδη Μοντέλα Γεν. 2022 - Αναλύσεις

ΘΕΜΑ 1

α) $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \Rightarrow E(S_n) = \frac{n}{\lambda}$$

β) Κάθε ομάδα είναι αυτοκίνητο μ.ν.ιθ. $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

κ' δίκωφο μ.ν.ιθ. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$$P(A \Delta \Delta) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2$$

γ) Αρ Αυτοκ $X \sim B\left(5, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^3$$

δ)
$$N_1(t) = \underbrace{N_1\left(\frac{t}{2}\right) + N_1\left(t/2, t\right]}_{\text{ανεξάρτητα}}$$

$$E\left(N_1(t) \mid N(t/2) = k\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^k E\left[N_1(t) \mid N_1(t/2)=j, N(t/2)=k\right] \cdot P\left[N_1(t/2)=j \mid N(t/2)=k\right]$$

Ομωσ: $E\left[N_1(t) \mid N_1(t/2)=j, N(t/2)=k\right] =$

$$= E\left[N_1(t) \mid N_1(t/2)=j, N_2(t/2)=k-j\right] =$$

$$= E\left[N_1(t) \mid N_1(t/2)=j\right] = j + E\left[N_1(t/2, t) \mid N_1(t/2)=j\right]$$

$$= j + E\left[N_1(t/2, t)\right] = j + \frac{\lambda_1 t}{2}$$

σὺν ανεξαρτησίας τῶν $N_1(t/2)$ καὶ $N_2(t/2)$

καὶ τῶν $N_1(t/2)$ καὶ $N_1(t/2, t)$.

Εἴπωσ $P\left[N_1(t/2)=j \mid N_1(t)=k\right] = \binom{k}{j} \left(\frac{t/2}{t}\right)^j \left(1 - \frac{t/2}{t}\right)^{k-j}$

$$\binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^k, \text{ ἔπειδι } N_1(t/2) \mid N_1(t)=k \sim B\left(k, \frac{t/2}{t}\right)$$

Επομένως: $E\left[N_1(t) \mid N(t/2)=k\right] =$

$$= \sum_{j=0}^k \left(j + \frac{\lambda t}{2}\right) \cdot \binom{k}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^k = k \cdot \frac{1}{2} + \frac{\lambda t}{2} = \frac{k + \lambda t}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

$$(a) h(t) = E[B(t)^2] = \int_0^{\infty} E[B(t)^2 | X_1 = u] dF_X(u)$$

$$E[B(t)^2 | X_1 = u] = \begin{cases} (u-t)^2, & u > t \\ h(t-u), & u \leq t \end{cases}$$

$$h(t) = \int_0^t h(t-u) dF_X(u) + \int_t^{\infty} (u-t)^2 dF_X(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(t) = \delta(t) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u), \quad \delta(t) = \int_t^{\infty} (u-t)^2 dF_X(u).$$

(b) Εφαρμόζουμε το Βασικό Αναδρομικό Ολοίγημα:

$\delta(t)$ πράττειται:

$$\delta(t) = \int_t^{\infty} (u-t)^2 dF_X(u) = \int_0^{\infty} [\max(u-t, 0)]^2 dF_X(u)$$

$$= E[\max(X-t, 0)^2]$$

Όπως η $Z = \max(X-t, 0)$ είναι φθίνουσα ως προς t και $Z \geq 0$ ενόψει και η Z^2 είναι φθίνουσα ως προς $t \Rightarrow E(Z^2) \downarrow_t$

$$\text{Επίσης } \delta(t) = \int_t^{\infty} (u-t)^2 dF_x(t) \leq \int_0^{\infty} (u-t)^2 dF_x(t) \\ = E[(X-t)^2] = E(X^2 - 2tX + t^2) = E(X^2) - t^2 \leq E(X^2) = \mu_2 < \infty$$

$$\text{Επομένως η } \delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t) \text{ όπου}$$

$$\delta_1(t) = \delta(t), \delta_2(t) = 0 \text{ κ' οι } \delta_1(t), \delta_2(t)$$

είναι μη αρνητικές, φθίνουσες κ' φραγμένες συναρτήσεις των t .

$$\text{Τέλος } \int_0^{\infty} |\delta(t)| dt = \int_{t=0}^{\infty} \delta(t) dt =$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} \int_{u=t}^{\infty} (u-t)^2 dF_x(u) dt = \int_{u=0}^{\infty} \int_{t=0}^u (u-t)^2 dt dF_x(u) =$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} \int_{t=0}^u (t-u)^2 dt dF_x(u) = \int_{u=0}^{\infty} \int_{y=0}^u y^2 dy dF_x(u)$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} \frac{u^3}{3} dF_x(u) = \frac{1}{3} E(X^3) = \frac{1}{3} \mu_3 < \infty$$

Επομένως ισχύουν οι κανόνες συνδυασμού των Βασικών Ανεξαρτητών Θεωρημάτων και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{\int_0^{\infty} \delta(t) dt}{E(X_1)} = \frac{\mu_3}{3\mu_1} = a$$

(γ) Όταν η διαδικασία είναι Poisson η κατανομή της X είναι $\text{Exp}(\lambda)$, επομένως $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$, $E(X^3) =$

$$\int x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int \frac{x^3 \lambda^4 e^{-\lambda x} 3!}{3! \lambda^3} dx = \frac{3!}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$$

και το a παίρνει την τιμή $\frac{E(X^3)}{3E(X)} = \frac{\frac{6}{\lambda^3}}{\frac{3}{\lambda}} = \frac{2}{\lambda^2}$

δηλαδή $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Όπως στην περίπτωση της διαδικασίας Poisson, η ανανεωτική συνάρτηση έχει κλειστό τύπο $m_x(t) = \lambda t$, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο για τη γενική γύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$h(t) = \delta(t) + \int_0^t \delta(t-u) dm_x(u) = \delta(t) + \int_0^t \delta(t-u) \lambda du \quad \left[\begin{array}{l} \text{θετούμε} \\ y = t-u \end{array} \right]$$

$$h(t) = \delta(t) + \lambda \int_0^t \delta(y) dy \quad (*)$$

Επιπλέον επειδή $X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow dF_X(u) = f_X(u)du = \lambda e^{-\lambda u} du$ ισχύει

$$f(t) = \int_t^{\infty} (u-t)^2 dF_X(u) = \int_t^{\infty} (u-t)^2 \lambda e^{-\lambda u} du = \left(\begin{array}{l} \text{θετουμε} \\ s = u-t \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{\infty} s^2 \lambda e^{-\lambda(s+t)} ds = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} s^2 \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} E(X^2) = \frac{2e^{-\lambda t}}{\lambda^2}$$

$$\text{Επίσης } \int_0^t f(y) dy = \int_0^t \frac{2e^{-\lambda y}}{\lambda^2} dy = \frac{2}{\lambda^3} \int_0^t \lambda e^{-\lambda y} dy =$$

$$= \frac{2}{\lambda^3} F_X(t) = \frac{2}{\lambda^3} (1 - e^{-\lambda t})$$

Αναπαράγωγες συν (*)

$$h(t) = \frac{2e^{-\lambda t}}{\lambda^2} + \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{2}{\lambda^2} = a \quad \forall t.$$

Εκτός από την αναρκετή απόδειξη, το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει άμεσα ε' από την αμνημονι ιδιότητα της εκθετικής κατανομής. Πραγματικά, από την αμνημονι ιδιότητα προκύπτει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος $B(t)$ μέχρι την επόμενη ανανέωση ακολουθεί εκθετική κατανομή $B(t) \sim \text{Exp}(\lambda)$, επομένως

$$h(t) = E(B(t)^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

ΘΕΜΑ 3

Έστω $Z(t)$ ο αριθμός επιβαίων που περιμένουν στη στάση τη χρονική στιγμή t . Η $\{Z(t), t \geq 0\}$ είναι αναγεννητική διαδικασία με χρόνους αναγέννησης S_1, S_2, \dots , όπου S_n ο χρόνος της $n^{\text{οσ}ης}$ αναχώρησης του λεωφορείου στη στάση. Η αναγεννητική ιδιότητα της $\{Z(t)\}$ ισχύει επειδή οι αφίξεις λεγών ακαθόλου διαδικασίας Poisson, επομένως ο χρόνος άφιξης του πρώτου λεγού μετά από την $n^{\text{οσ}η}$ αναχώρηση εν λεωφορείου ακολουθεί $\text{Exp}(\lambda)$ κατανομή k' είναι ανεξάρτητος του χρόνου που μεσολάβησε από την άφιξη του προηγούμενου λεγού (αμνήμων ιδιότητα).

Η διαδικασία αναχώρησης των λεωφορείων από τη στάση είναι ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους X_1, X_2, \dots αιζμ όπου $X = T_1 + T_2$, και T_1, T_2 αιζμ $\sim \text{Exp}(\mu)$ οι χρόνοι διαδρομής από τη στάση στο parking και επιστροφής, αντίστοιχα. Επομένως $X \sim \text{Erlang}(2, \mu)$.

α) Ο αριθμός λεγών που περιμένουν στη στάση όταν φτάνει το λεωφορείο N είναι ίσος με τον αριθμό αφίξεων στη διάρκεια του ενδιάμεσου χρόνου X .

Επομένως δεσφειύοντασ ωσ προς τη διαίρετα του X :

$$P(N=n) = \int_0^{\infty} P(N=n|X=t) dF_X(t).$$

Επειδ η αριθμησ ηεγαζιών είναι με διαδικατωτα Poisson(λ),

$$P(N=n|X=t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Επίτωσ $dF_X(t) = f_X(t) dt = \frac{\mu^2 t e^{-\mu t}}{2} dt$ ενομέρωσ

$$P(N=n) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!} \frac{1}{2} \mu^2 t e^{-\mu t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^n \mu^2}{2 n!} \int_0^{\infty} t^{n+1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^n \mu^2}{2 n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(\lambda+\mu)^{n+2}} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^{n+2} t^{n+1} e^{-(\lambda+\mu)t}}{(n+1)!} dt}_1$$

$$= \frac{n+1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 = \binom{n+2-1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2$$

δηλαδη η N ακολουθεί αρνητικη διωνυμικη : αριθμωσ ανωτικων μέχρι τησ δυο ηρωτησ επιτυχίωσ, με $p = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

(b) Για τον $E(N)$:

$$E(N) = \int_0^{\infty} E(N|X=t) dF_X(t) = \int_0^t \lambda t dF_X(t) = \lambda \int_0^t t dF_X(t) = \\ = \lambda E(X) = \lambda \cdot \frac{2}{\mu} .$$

(γ) Από το στοιχείωδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστος, προκύπτει ότι το μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου είναι ίσο με

$$g = \frac{E(C)}{E(X)} , \text{ όπου } C \text{ το κέρδος στη διάρκεια}$$

ενός κύκλου της ανανεωτικής διαδικασίας, δηλαδή στο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών αναχωρήσεων, κ' X το μήκος του κύκλου για το οποίο είδαμε ότι $X \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$.

Το κέρδος ενός κύκλου είναι ίσο με τα έσοδα $r \cdot N$ μείον τα έξοδα cX : $C = rN - cX$

$$\text{Επομένως } E(C) = rE(N) - cE(X) = r\lambda \frac{2}{\mu} - c \frac{2}{\mu} = \frac{2(r\lambda - c)}{\mu}$$

$$\text{και } g = \frac{E(C)}{E(X)} = r\lambda - c .$$

Ο τώπος για το μέσο κόστος θα μπορούσε να υπολογιστεί και απευθείας χωρίς

των εφαρμογών του ανανεωτικού θεωρήματος
επιβή στο συγκεκριμένο πρόβλημα τα κόστη
δεν σχετίζονται με τον ανανεωτικό κύκλο.

Συγκεκριμένα, αφού έρχονται κατά μέσο όρο
 λ πελάτες/μονάδα χρόνου στη στάση και
όλοι κάποια στιγμή φιλάνουν στο λεωφορείο,
επομένως πληρώνουν εισιτήριο, το μέσο
έσοδο του λεωφορείου ανά μονάδα χρόνου
είναι ίσο με $r\lambda$. Επίσης το μέσο κόστος
λειτουργίας ανά μονάδα χρόνου είναι C ,
επομένως το καθαρό κέρδος ανά μονάδα
χρόνου είναι ίσο με $r\lambda - C$.