

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Τελική εξέταση, 13 Ιουνίου 2016

Θέμα 1ο (4 βαθμοί) Σε ένα εστιατόριο καταφθάνουν εσωτερικές παραγγελίες πελατών και εξωτερικές παραγγελίες για παράδοση κατ' οίκον (delivery) με ρυθμούς 5 και 15 παραγγελίες ανά ώρα αντίστοιχα, σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

- (1) Η δεσμευμένη πιθανότητα στην πρώτη μισή ώρα λειτουργίας του εστιατορίου να έφθασαν 2 εσωτερικές παραγγελίες, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα λειτουργίας του εστιατορίου έφθασαν 7 εσωτερικές και 13 εξωτερικές παραγγελίες.
- (2) Η πιθανότητα από 10 διαδοχικές παραγγελίες, η πρώτη και η τέταρτη μόνο να προέρχονται από εσωτερικούς πελάτες.
- (3) Η δεσμευμένη πιθανότητα σε μια ώρα λειτουργίας να υπάρχουν k εσωτερικές παραγγελίες πελατών, δεδομένου ότι στην ίδια ώρα έχουν έρθει συνολικά 35 παραγγελίες.
- (4) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης της πρώτης εσωτερικής παραγγελίας, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα λειτουργίας του καταστήματος έφθασαν συνολικά 35 παραγγελίες.

Θέμα 2ο (3 βαθμοί): Μια μηχανή επεξεργασίας προϊόντων λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Κάθε κύκλος λειτουργίας της διαιρείται σε δυο περιόδους. Η πρώτη περίοδος είναι η περίοδος παραλαβής παραγγελιών, της οποίας η χρονική διάρκεια ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και η δεύτερη περίοδος είναι η περίοδος διεκπεραίωσης παραγγελιών. Κατά την περίοδο παραλαβής, οι παραγγελίες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού μ , αλλά δεν γίνεται καμιά διεκπεραίωση παραγγελίας. Κατά την περίοδο της διεκπεραίωσης δεν φθάνουν νέες παραγγελίες, αλλά οι παραγγελίες που έχουν φθάσει κατά την περίοδο παραλαβής, αρχίζουν να εξυπηρετούνται μία-μία. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο ν . Η περίοδος διεκπεραίωσης τελειώνει όταν διεκπεραιωθούν όλες οι παραγγελίες που έχουν συσσωρευθεί κατά την περίοδο παραλαβής. Το σύστημα έχει κέρδος k για κάθε παραγγελία που διεκπεραιώνει και κόστος h για κάθε χρονική μονάδα διεκπεραίωσης παραγγελιών.

- (1) Υπολογίστε την πιθανότητα σε μια περίοδο παραλαβής ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος να φθάσουν n παραγγελίες.
- (2) Υπολογίστε τη μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος.
- (3) Υπολογίστε το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος.

Θέμα 3ο (2 βαθμοί): Έστω X_1, X_2, X_3, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$) και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία. Έστω $X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ ο t -εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος τη στιγμή t (δηλαδή ο χρόνος από το αμέσως προηγούμενο γεγονός πριν από τη στιγμή t έως το αμέσως επόμενο γεγονός μετά τη χρονική στιγμή t). Να γραφεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $E[(X(t))^2]$, να λυθεί και να υπολογιστεί το $\lim_{t \rightarrow \infty} E[(X(t))^2]$.

Θέμα 4ο (2 βαθμοί): Θεωρούμε την $M/M/1/2$ ουρά, με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ , εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , 1 υπηρέτη και χωρητικότητα 2 (δηλαδή το πολύ ένας πελάτης μπορεί να εξυπηρετείται και άλλος ένας να περιμένει στο χώρο αναμονής).

- (1) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (p_n), σε συνεχή χρόνο.
- (2) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πελάτες (οι πελάτες που αποχωρούν άμεσα λογίζονται με χρόνο παραμονής 0). Επίσης, να βρεθεί η μέση διάρκεια του κύκλου απασχόλησης του συστήματος.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!