Στοχαστικά Μοντέλα

Σειρά Ασκήσεων 3 - Σύντομες Απαντήσεις

Άσκηση 1

Έστω διαδικασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό αφίξεων λ, $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. $\sim Exp(\lambda)$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι και $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$ οι χρόνοι των γεγονότων. Γνωρίζουμε ότι $P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n)$ για $t \geq 0$, $n \geq 0$.

Όμως $S_n \sim Erlang(n, \lambda)$, επομένως

$$P(S_n \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

Επίσης $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, επομένως

$$P(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 2

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, \quad f_Y(y) = \mu e^{-\mu x}, \quad P(Y \geq x) = e^{-\mu x}$$

Δεσμεύοντας ως προς x:

$$P(X \leq Y) = \int_0^\infty P(Y \geq x) f_X(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\,dx$$

$$\lambda^n \int_0^\infty \frac{x^{n-1} e^{-(\lambda+\mu)x}}{(n-1)!}\,dx = \frac{\lambda^n}{(\lambda+\mu)^n} \int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^n x^{n-1} e^{-(\lambda+\mu)x}}{(n-1)!}\,dx$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n,$$

επειδή η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι η σππ της Erlang$(n, \lambda+\mu)$

Άσκηση 3

Έστω $X = b + Y$, $Y \sim Exp(\lambda)$.

Τότε $F_X(x) = P(Y \leq x - b) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ 1 - e^{-\lambda(x-b)}, & x > b \end{cases}$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ \lambda e^{-\lambda(x-b)}, & x > b. \end{cases}$$

Για τη διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ έχουμε

$$P(N(t) \geq k) = P(S_k \leq t) = P(X_1 + \cdots + X_k \leq t$$

$$P\left(kb+\sum_{j=1}^{k} Y_j \le t\right) = P\left(R_k \le t-kb\right)$$

όπου $R_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j \sim Erlang(k,\lambda)$.

Επομένως για $t-kb<0$: $P(R_k \le t-kb)=0$

Για $t-kb \ge 0$:

$$P(R_k \le t-kb) = \int_0^{t-kb} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N(t)\ge k) = \begin{cases} 0, & t<kb \\ 1-e^{-\lambda(t-kb)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{[\lambda(t-kb)]^j}{j!}, & t \ge kb. \end{cases}$$

Ασκηση 4

Εστω $X_1, X_2, \ldots \sim Erlang(2,1)$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N(t)\}$.

Οι X_j εκφράζονται ως αθροίσματα δύο εκθετικών δηλαδή

$$X_1 = Y_1 + Y_2$$

$$X_2 = Y_3 + Y_4$$

$$\vdots$$

$$X_n = Y_{2n+1} + Y_{2n+2} \,,$$

$$\vdots$$

όπου $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ $Exp(1)$.

Έστω $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $Y_1, Y_2, \ldots$. Η $\{\tilde{N}(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 1$.

Επομένως έχουμε:

$$P(N(t)=n) = P(X_1 + \cdots + X_n \leq t,\ X_1 + \cdots + X_{n+1} > t)$$

$$= P(Y_1 + \cdots + Y_{2n} \leq t,\ Y_1 + \cdots + Y_{2n+2} > t) =$$

$$= P(2n \leq \tilde{N}(t) < 2n+2)$$

$$= P(\tilde{N}(t) = 2n) + P(\tilde{N}(t) = 2n+1)$$

$$= e^{-t}\frac{t^{2n}}{(2n)!} + e^{-t}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Άσκηση 5

(a) $P(N_1(t)=k_1, N_2(t)=k_2) =$

$= P(N_1(t)=k_1)\, P(N_2(t)=k_2) = e^{-\lambda_1 t}\dfrac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!}\, e^{-\lambda_2 t}\dfrac{(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!}$

(β) $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson $(\lambda_1+\lambda_2)$

$$P(N(t)=k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^k}{k!}$$

(γ) $P(N_1(t)=k_1 \mid N_1(t+s)=n_1) =$

$$= \frac{P(N_1(t)=k_1, N_1(t+s)=n_1)}{P(N_1(t+s)=n_1)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=k_1)\, P(N_1(t+s)-N_1(t)=n_1-k_1 \mid N_1(t)=k_1)}{P(N_1(t+s)=n_1)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=k_1)\, P(N_1(t+s)-N_1(t)=n_1-k_1)}{P(N_1(t+s)=n_1)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!}\, e^{-\lambda_1 s}\frac{(\lambda_1 s)^{n_1-k_1}}{(n_1-k_1)!}}{e^{-\lambda(t+s)}\frac{[\lambda_1(t+s)]^{n_1}}{n_1!}} = \frac{n_1!}{k_1!\,(n_1-k_1)!}\left(\frac{t}{t+s}\right)^{k_1}\left(\frac{s}{t+s}\right)^{n_1-k_1}$$

б) $P\left(N_1(t)=k_1,\ N_2(t)=k_2 \mid N_1(t+s)=n_1,\ N_2(t+s)=n_2\right)$

$$= \frac{P\left(N_1(t)=k_1,\ N_1(t+s)=n_1,\ N_2(t)=k_2,\ N_2(t+s)=n_2\right)}{P\left(N_1(t+s)=n_1,\ N_2(t+s)=n_2\right)} =$$

$$= \frac{P(N_1(t)=k_1)\,P(N_1(t+s)=n_1 \mid N_1(t)=k_1)}{P(N_1(t+s)=n_1)} \cdot \frac{P(N_2(t)=k_2)\,P(N_2(t+s)=n_2 \mid N_2(t)=k_2)}{P(N_2(t+s)=n_2)}$$

$$= P\left(N_1(t)=k_1 \mid N_1(t+s)=n_1\right) \cdot P\left(N_2(t)=k_2 \mid N_2(t+s)=n_2\right)$$

$$= \binom{n_1}{k_1}\left(\frac{t}{t+s}\right)^{k_1}\left(\frac{s}{t+s}\right)^{n_1-k_1}\binom{n_2}{k_2}\left(\frac{t}{t+s}\right)^{k_2}\left(\frac{s}{t+s}\right)^{n_2-k_2}$$

e) $P(N_1(t)=k_1, N_2(t)=k_2 \mid N_1(t+s)=n_1) =$

$$= P(N_1(t)=k_1 \mid N_1(t+s)=n_1) \cdot$$

$$\cdot P(N_2(t)=k_2 \mid N_1(t)=k_1, N_1(t+s)=n_1)$$

$$= P(N_1(t)=k_1 \mid N_1(t+s)=n_1) \cdot P(N_2(t)=k_2) =$$

$$= \binom{n_1}{k_1} \left(\frac{t}{t+s}\right)^{k_1} \left(\frac{s}{t+s}\right)^{n_1-k_1} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!}$$

σΖ) $P\left(N_1(t)=k_1, N_2(t)=k_2 \mid N(t+s)=n\right) =$

$$= \frac{P\left(N_1(t)=k_1,\ N_2(t)=k_2,\ N(t+s)=n\right)}{P\left(N(t+s)=n\right)} =$$

$$= \frac{P\left(N_1(t)=k_1, N_2(t)=k_2\right) \cdot P\left(N(t+s)=n \mid N_1(t)=k_1, N_2(t)=k_2\right)}{P\left(N(t+s)=n\right)}$$

$$= \frac{P\left(N_1(t)=k_1\right) P\left(N_2(t)=k_2\right) \cdot P\left(N(t+s)-N(t)=n-k_1-k_2\right)}{P\left(N(t+s)=n\right)}$$

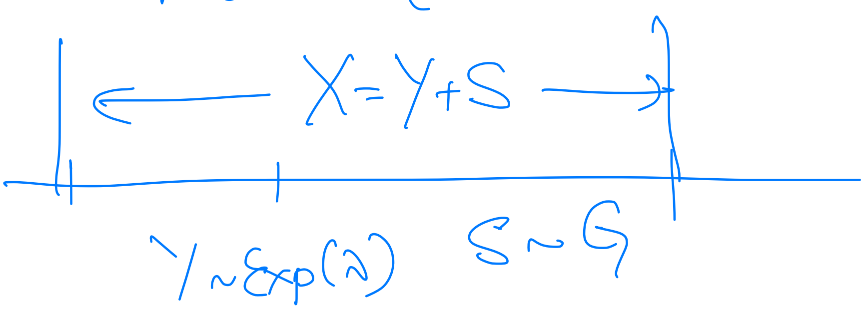
$$= \frac{e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s} \frac{\left[(\lambda_1+\lambda_2)s\right]^{n-k_1-k_2}}{(n-k_1-k_2)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t+s)} \frac{\left[(\lambda_1+\lambda_2)(t+s)\right]^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, (n-k_1-k_2)!} \cdot \left(\frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1+\lambda_2)(t+s)}\right)^{k_1} \left(\frac{\lambda_2 t}{(\lambda_1+\lambda_2)(t+s)}\right)^{k_2} \left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)s}{(\lambda_1+\lambda_2)(t+s)}\right)^{n-k_1-k_2}$$

Άσκηση 6

Έστω $T_1, T_2, \ldots$ οι διαδοχικές στιγμές που ένας πελάτης ολοκληρώνει την εξυπηρέτησή του και αναχωρεί από το σύστημα.

Ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, ανεξάρτητα από το πότε συνέβη η προηγούμενη άφιξη, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας. Επομένως οι $T_1, T_2, \ldots$ είναι χρόνοι αναγέννησης της διαδικασίας που περιγράφει τη λειτουργία του υπηρέτη. Κάθε αναγεννητικός κύκλος περιλαμβάνει ένα διάστημα $Y \sim Exp(\lambda)$ όπου ο υπηρέτης είναι ανενεργός, και ένα διάστημα $S \sim G(t)$ όπου ο υπηρέτης εξυπηρετεί τον πελάτη που ήρθε.



Το μήκος του κύκλου είναι $X = Y + S$.

Ο αριθμός πελατών που χάνονται (φεύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν) στη διάρκεια ενός κύκλου είναι έστω M.

Τότε ο μέσος αριθμός πελατών που χάνονται ανά μονάδα χρόνου είναι ίσος με $\dfrac{E(M)}{E(X)}$.

Για την $E(M)$, δεσμεύοντας ως προς S έχουμε

$$E(M) = \int_0^\infty E(M \mid S = u)\, dG(u)$$

$$= \int_0^\infty \lambda u \, dG(u) = \lambda E(S) = \frac{\lambda}{\mu}$$

Επίσης $E(X) = E(Y) + E(S) = \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{E(M)}{E(X)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu}$$

Άσκηση 7

Και σε αυτό το μοντέλο οι χρόνοι απεξεργοποίησης του υπηρέτη είναι χρόνοι αναγέννησης.
Εδώ ο χρόνος αδράνειας είναι $Y \sim Exp(\lambda)$ όπως κ' στην άσκηση 6, όμως ο χρόνος λειτουργίας $\tilde{S}$ είναι
$$\tilde{S} \stackrel{d}{=} \begin{cases} S_1, & \text{με πιθ. } p \\ S_1+S_2, & \text{'' '' } 1-p \end{cases}$$

όπου S_1, S_2 ανεξ. $\sim G$.

Έστω X το μήκος του ανανεωτικού κύκλου και M ο αριθμός πελατών που χάνονται στη διάρκεια ενός κύκλου.
Έχουμε $E(X) = \frac{1}{\lambda} + p \cdot \frac{1}{\mu} + (1-p)\frac{2}{\mu} = \frac{1}{\lambda} + (2-p)\frac{1}{\mu}$

Για την $E(M)$ σκεφτόμαστε ως εξής:
Έστω N_1 ο αριθμός αφίξεων στη διάρκεια του χρόνου $\tilde{S}$ όπου έρχεται ένας πελάτης και N_2 ο αριθμός αφίξεων 2 πελατών μαζί. Τότε $M = N_1 + 2N_2$

Με βάση το θεώρημα διάσπασης της διαδικασίας Poisson, οι αφίξεις 1 και 2 πελατών είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = \lambda p$ και $\lambda_2 = \lambda(1-p)$ αντίστοιχα.

Επομένως, αντίστοιχα με την ανάλυση της Άσκησης 6:

$$E(N_1) = \lambda p \, E(\tilde{S})$$

$$E(N_2) = \lambda(1-p) \, E(\tilde{S})$$

και ο μέσος αριθμός πελατών που χάνονται σε ένα κύκλο είναι ίσος με

$$E(M) = [\lambda p + 2\lambda(1-p)] \, E(\tilde{S}) = \lambda(2-p) \, E(\tilde{S})$$

$$= \lambda(2-p)^2 \frac{1}{\mu}$$

Επομένως

$$\frac{E(M)}{E(X)} = \frac{\lambda(2-p)^2 \frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda} + (2-p)\frac{1}{\mu}}$$

Άσκηση 8

Έστω D η ζήτηση του προϊόντος κατά τη διάρκεια του διαστήματος μήκους L

Οι ελλείψεις είναι ίσες με $S = (D-Q)^+ =$

$= \max(D-Q, 0)$.

Η S είναι μη αρνητική ακέραια τ.μ. Επομένως

$$E(S) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S>k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(D-Q>k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(D > Q+k).$$

Για την κατανομή της D έχουμε

$$P(D=k) = \int_{t=0}^{\infty} P(D=k \mid L=t)\, f_L(t)\, dt =$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mu e^{-\mu t}\, dt = \lambda^k \mu \int_0^{\infty} \frac{t^k e^{-(\lambda+\mu)t}}{k!}\, dt$$

$$= \frac{\lambda^k \mu}{(\lambda+\mu)^k} = p(1-p)^k, \quad k=0,1,2,\ldots,$$ όπου $p = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Επομένως $P(D>k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} p(1-p)^j =$

$$= p\frac{(1-p)^{k+1}}{p} = (1-p)^{k+1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k+1}$$

Συνεπώς

$$E(S) = \sum_{k=0}^{\infty} P(D>Q+k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{Q+1+k} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{Q+1} \cdot \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{Q+1}\left(\frac{\lambda}{\mu}+1\right)$$

Άσκηση 9

Έστω $Y(t)$ ο αριθμός επιβατών που περιμένουν στη στάση τη στιγμή t.
Οι χρονικές στιγμές άφιξης των λεωφορείων είναι χρόνοι αναγέννησης της $\{Y(t), t\geq 0\}$ (λόγω της αμνήμονης ιδιότητας του χρόνου μεταξύ αφίξεων λεωφορείων).

Έστω C το συνολικό κόστος αναμονής των επιβατών στη διάρκεια ενός κύκλου ανανέωσης. Τότε το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα είναι ίσο με $\frac{E(C)}{E(X)}$, όπου X η διάρκεια του κύκλου.

(a) $X = T =$ σταθερό $\quad E(X) = T$.

Εφαρμόζουμε δέσμευση ως προς τον αριθμό αφίξεων στο διάστημα $[0, T]$: $N(T)$.

$$E(C) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{N(T)}(k)\, E(C \mid N(T) = k).$$

Για την $E(C \mid N(T) = k)$ δεσμεύουμε επιπλέον ως προς τους χρόνους άφιξης των k επιβατών : $0 < W_1 < W_2 < \dots < W_k < T$.

$$E(C \mid N(T) = k) = E_{W_1, \dots, W_k}\left[h \sum_{j=1}^{k} (T - W_j) \right]$$

Για τη διαδικασία Poisson γνωρίζουμε ότι η κατανομή των $(W_1, \dots, W_k) \mid N(T) = k$ είναι αυτή των k-order statistics από την ομοιόμορφη $\mathcal{U}(0,T)$, δηλαδή $W_j = \mathcal{U}_{j:k}$, όπου $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ ανεξάρτητες κ' ισόνομες $\sim \mathcal{U}(0,T)$.

Όμως τότε $\sum_{j=1}^{k} (T - W_j) = \sum_{j=1}^{k} (T - \mathcal{U}_j)$, επομένως

$$E(C \mid N(T) = k) = h \sum_{j=1}^{k} (T - E(\mathcal{U}_j)) = h \sum_{j=1}^{k} (T - T/2)$$

$$\frac{hT}{2} \cdot k .$$ Επιστρέφοντας στην $E(C)$!

$$E(C) = \sum_{k=0}^{\infty} P[N(t) = k] \cdot \frac{hT}{2} k = \frac{hT}{2} \cdot E(N(T))$$

$$= \frac{hT}{2} \cdot \lambda T = \frac{\lambda h T^2}{2}$$

Επομένως $\dfrac{E(C)}{E(X)} = \dfrac{\lambda h T^2/2}{T} = \dfrac{\lambda h T}{2}$

(β) Αν $T \sim F_T(t)$ τότε $E(X) = E(T) = a$

και για την $E(C)$ δεσμεύουμε πρώτα

ως πρός τα διαστήματα του T:

$$E(C) = \int_0^\infty E(C \mid T=t)\, dF_T(t)$$

Όμως για $T=t$ ισχύει η ανάλυση του

(α) για σταθερό χρόνο άφιξης του λεωφορείου

Επομένως $E(C \mid T=t) = \frac{\lambda h t}{2} \Rightarrow$

$$E(C) = \int_0^\infty \frac{\lambda h t^2}{2}\, dF_T(t) = \frac{\lambda h}{2} E(T^2)$$

Επομένως $\dfrac{E(C)}{E(X)} = \dfrac{\lambda h}{2} \dfrac{E(T^2)}{E(T)}$

(γ) Ο χρόνος άφιξης του λεωφορείου είναι ο

χρόνος άφιξης του $N^{\text{οστού}}$ πελάτη στη διαδικασία

Poisson(λ), δηλαδή $X = S \sim \text{Erlang}(N, \lambda)$

Επομένως $E(X) = \frac{N}{\lambda}$.

Επίσης οι χρόνοι άφιξης των επιβατών είναι

$W_i = S_i \sim Erlang(i, \lambda)$, $i = 1, \dots, N$

Επομένως $E(C) = h\, E\left[\sum_{i=1}^{N} (S_N - S_i)\right]$

$$= h \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{N}{\lambda} - \frac{i}{\lambda}\right) = \frac{h}{\lambda} \sum_{i=1}^{N} (N-i) = \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{2}$$

και $$\frac{E(C)}{E(X)} = \frac{\frac{h}{\lambda}\frac{N(N-1)}{2}}{\frac{N}{\lambda}} = \frac{h(N-1)}{2}$$

Ασκηση 10

ⓐ Οι χρόνοι άφιξης των n πρώτων ατυχημάτων είναι $S_1, \dots, S_n$, όπου

$S_i \sim Erlang(i, \lambda)$

Το κόστος των n πρώτων ατυχημάτων

είναι ίσο με

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C e^{-aS_i} \quad \text{επομένως}$$

$$E(C_n) = C \sum_{i=1}^{n} E\left(e^{-\alpha S_i}\right)$$

Όμως $S_i \sim X_1 + \dots + X_i$, όπου $X_1, X_2, \dots$ ανεξ. $Exp(\lambda)$

Επομένως $E\left(e^{-\alpha S_i}\right) = E\left(e^{-\alpha \sum_{j=1}^{i} X_j}\right) =$

$$= E\left(e^{-\alpha X_1}\right)^i = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^i \quad \left[\text{μετ/σμός LS της } Exp(\lambda)\right]$$

Τελικά: $E(C_n) = C \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^i = C \dfrac{\frac{\lambda}{\lambda+\alpha} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^{n+1}}{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}}$

$$C \cdot \frac{\lambda}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\right)^n\right).$$

(β) Έστω $C(t)$ το συνολικό κόστος των ατυχημάτων στο διάστημα $[0,t]$

Δεσμεύοντας ως προς $N(t)$ = αρ. ατυχημάτων

$$E(C(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} E(C(t) \mid N(t)=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=k)\, E(C(t) \mid N(t)=k).$$

Για τη δεσμευμένη μέση τιμή $E(C(t) \mid N(t)=k)$

έστω $W_1,\dots,W_k$ οι χρόνοι άφιξης των k ατυχημάτων

τότε $W_j = U_{j:k}$, όπου $U_1,\dots,U_k$ ανεξ. $\sim U(0,t)$

Επίσης $C(t) \mid N(t)=k = C \sum_{i=1}^{k} e^{-\alpha W_i} =$

$$= C \sum_{i=1}^{k} e^{-\alpha U_i} = Ck\, E(e^{-\alpha U_1})$$

Όμως $E(e^{-\alpha U_1}) = \int_0^t e^{-a u} \cdot \frac{1}{t}\, du$ $\quad (U_1 \sim U(0,t))$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right),$$ επομένως

$$E\left(C(t) \mid N(t) = k\right) = Ck \, \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

και $$E(C) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(N(t) = k\right) \cdot Ck \, \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} =$$

$$= \frac{C\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}{\alpha} E\left(N(t)\right) = \frac{C \lambda t \left(1 - e^{-\alpha t}\right)}{\alpha}$$