Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Λύσεις Ασκήσεων

Λύνονται ορισμένες από τις ασκήσεις του φυλλαδίου της e-class, που τέθηκαν κατά το εαρινό εξάμηνο 2018-2019. Είναι πιθανόν να υπάρχουν αρκετά λάθη, οπότε κάθε παρατήρηση είναι κάτι παραπάνω από βοηθητική. Για οποιαδήποτε παρατήρηση, μπορείτε να απευθυνθείτε στο e-mail panosandreou98@gmail.com.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Υπενθύμιση από τις Πιθανότητες

Άσκηση 1.4 *Έστω X μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια*

$$P_X(z) = \frac{c}{6 - z - z^2}.$$

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c.

2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.

3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x),\ x = 0, 1, 2, \ldots$

4. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X$ είναι άρτιος$)$.

Λύση:

1. Γνωρίζουμε ότι $P_X(1) = 1$, οπότε $\frac{c}{4} = 1 \Leftrightarrow c = 4$ και άρα $P_X(z) = \dfrac{4}{6 - z - z^2}$.

2. Γνωρίζουμε ότι

$$E[X] = P_X^{'}(1) = \frac{4(2z+1)}{(6 - z - z^2)^2}\Big|_{z=1} = \frac{3}{4}.$$

3. Θα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$P_X(z) = \frac{4}{6 - z - z^2} = \frac{4}{(3+z)(2-z)} = \frac{A}{3+z} + \frac{B}{2-z}. \tag{1.1}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (1) με $3 + z$, παίρνουμε ότι

$$\frac{4}{2-z} = A + \frac{B}{2-z}(3+z) \overset{z=-3}{\Rightarrow} A = \frac{4}{5}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την (1) με $2 - z$, παίρνουμε ότι

$$\frac{4}{3+z} = B + \frac{A}{3+z}(2-z) \overset{z=2}{\Rightarrow} B = \frac{4}{5},$$

οπότε

$$\begin{aligned} P_X(z) = \frac{\frac{4}{5}}{3+z} + \frac{\frac{4}{5}}{2-z} &= \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{3}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) z^x = \sum_{x=0}^{\infty} \left[\frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] z^x \Rightarrow$$

$$f_X(x) = \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^x + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

4. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(X \text{ είναι άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(2k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4}{15} \left(\frac{1}{9}\right)^k + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^k \right] \\ &= \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 1.6 *Ένα σύστημα έχει δύο εξαρτήματα και χαλάει μόλις κάποιο από τα εξαρτήματα χαλάσει. Ο χρόνος ζωής του πρώτου εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$ (δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0$), ενώ ο χρόνος ζωής του δεύτερου εξαρτήματος ακολουθεί την κατανομή $Gamma(n, \mu)$ (δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_2(t) = \mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}/(n-1)!,\ t \geq 0$). Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι ζωής των εξαρτημάτων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος των δυο εξαρτημάτων.*

Λύση:
Έστω $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Gamma(n, \mu)$ και $Z = \min(X, Y)$. Ζητείται η $E[Z]$. Θα βρούμε πρώτα τη συνάρτηση κατανομής F_Z της Z. Έστω $t \geq 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= Pr[Z \leqslant t] = Pr[\min(X, Y) \leqslant t] = 1 - Pr[\min(X, Y) \geqslant t] \\ &= 1 - Pr[X \geqslant t, Y \geqslant t] \overset{\text{ανεξ.}}{=} 1 - Pr[X \geqslant t] \cdot Pr[Y \geqslant t] \\ &= 1 - (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_Y(t)) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Έχουμε μία έκφραση για τη συνάρτηση κατανομής μίας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής και θέλουμε τη μέση τιμή της. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα βοηθητικό

Λήμμα. *Αν X μη αρνητική μεταβλητή, τότε*

$$E[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$E[X] = \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx = \int_0^\infty \int_0^x du\, f_X(x)\, dx$$

Οι συναρτήσεις μέσα στα ολοκληρώματα είναι μη αρνητικές. Από το Θεώρημα Tonelli, επιτρέπεται η εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης. Για τα όρια ολοκλήρωσης παρατηρούμε ότι $x \geqslant u$ και $u \geqslant 0$, οπότε παίρνουμε

$$E[X] = \int_0^\infty \underbrace{\int_u^\infty f_X(x)\, dx}_{1-F_X(u)}\, du = \int_0^\infty (1 - F_X(u))\, du,$$

όπως δηλαδή θέλαμε. □

Επιστρέφουμε τώρα στο ζητούμενο της άσκησης και έχουμε:

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \int_0^\infty (1 - F_Z(t))\, dt = \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{(\mu t)^k}{k!} \right) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{(\mu t)^k}{k!}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mu^k \int_0^\infty \frac{1}{k!} t^{(k+1)-1} e^{-(\lambda+\mu)t}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \int_0^\infty \underbrace{\frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{k!} t^{(k+1)-1} e^{-(\lambda+\mu)t}}_{\text{σ.π.π. Gamma}(k+1,\lambda+\mu)}\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \cdot 1 \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} = \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^k} \\
&= \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^k = \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^n}{1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right)^n}{\lambda}
\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 2

Ανανεωτική Θεωρία

Άσκηση 2.4 *Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, όπου ένας ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης έχει συνάρτηση κατανομής*

$$F_X(t) = p + (1-p)(1 - e^{-\lambda t}), \quad t \geqslant 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geqslant 0)$ και $\tilde{m}(s)$. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt, \quad t \geqslant 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A και B.

Λύση:

Έχουμε ότι

$$F_X(t) = p + (1-p)(1 - e^{-\lambda t}), \quad t \geqslant 0,$$

άρα

$$\tilde{F}_X(s) = p + (1-p)\frac{\lambda}{\lambda + s},$$

οπότε:

- $\tilde{F}_{S_k}(s) = (\tilde{F}_X(s))^k = \left(p + (1-p)\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k$
- $\tilde{p}_k(s) = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^k = \left(1 - p - (1-p)\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)\left(p + (1-p)\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k$

- Έχουμε:

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{p+(1-p)\dfrac{\lambda}{\lambda+s}}{1-p-(1-p)\dfrac{\lambda}{\lambda+s}}$$
$$= \frac{\lambda+ps}{(1-p)s} = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{(1-p)s}$$

άρα, αντιστρέφοντας, παίρνουμε

$$m_X(t) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{(1-p)}t = A + Bt,$$

όπου $A = \dfrac{p}{1-p}$ και $B = \dfrac{\lambda}{1-p}$.

□

Άσκηση 2.6 *Έστω μία ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$, με μέση τιμή μ και έστω $h(t) = E[S_{N(t)+1}],\ t \geqslant 0$. Να διατυπωθεί μία ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = \mu(1+m(t)), \quad t \geqslant 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

Λύση:

Έστω S_1 η χρονική στιγμή πρώτης ανανέωσης. Με χρήση του ανανεωτικού συλλογισμού, παίρνουμε:

$$h(t) = E\big[E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\big]$$
$$= \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]dF_{S_1}(u)$$
$$\overset{S_1 \overset{d}{=} X}{=} \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]dF_X(u),$$

όπου

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} E[S_1], & u > t \\ E[S_{N(t-u)+2}], & u \leqslant t \end{cases} \Rightarrow$$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u, & u > t \\ u + h(t-u), & u \leqslant t \end{cases},$$

άρα

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_t^\infty u dF_X(u) + \int_0^t u dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= \underbrace{\int_0^\infty u\, dF_X(u)}_{E[X]=\mu} + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) \\ &= \mu + (h * F_X)(t) = d(t) + (h * F_X)(t), \end{aligned}$$

όπου $d(t) = \mu$. Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} h(t) &= d(t) + (d * m)(t) \\ &= \mu + \int_0^t d(t-u) dm(u) = \mu + \int_0^t \mu\, dm(u) \\ &= \mu + \mu\, m(t) = \mu(1 + m(t)). \end{aligned}$$

□

Άσκση 2.7 *Έστω μια ανανεωτική διδαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι*

$$h(t) = 2(m * m)(t),\ t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

Λύση:

Έστω S_1 η χρονική στιγμή πρώτης ανανέωσης. Με χρήση του ανανεωτικού συλλογισμού, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} h(t) &= E\big[E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u]\big] \\ &= \int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u] dF_{S_1}(u) \\ &\overset{S_1 \overset{d}{=} X}{=} \int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u] dF_X(u), \end{aligned}$$

όπου

$$E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0, & u > t \\ E[(1 + N(t-u))N(t-u)], & u \leqslant t \end{cases}$$

Θέλουμε να εμφανίσουμε τη συνάρτηση h στον δεύτερο κλάδο και συγκεκριμένα την $h(t-u)$, ώστε να φτιάξουμε τη συνέλιξη που εμφανίζεται στην ανανεωτική εξίσωση.

Έχουμε

$$\begin{aligned}E[(1+N(t-u))N(t-u)] = E\Big[(N(t-u))^2\Big] + E[N(t-u)] = 2E[N(t-u)] \,+ \\ + E[N(t-u)(N(t-u)-1)] = 2\,m(t-u) + h(t-u).\end{aligned}$$

Σπάμε τώρα στα διαστήματα $[0,t]$ και $[\,t,\infty)$ το ολοκλήρωμα που βρήκαμε για την $h(t)$ και παίρνουμε την ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$:

$$\begin{aligned}h(t) &= \int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u]\, dF_X(u) \\ &= \int_t^\infty 0\, dF_X(u) + \int_0^t \Big(2m(t-u) + h(t-u)\Big)\, dF_X(u) \\ &= 2\int_0^t m(t-u)\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \\ &= 2\,(m * F_X)(t) + (h * F_X)(t) = d(t) + (h * F_X)(t),\end{aligned}$$

όπου $d(t) = 2\,(m * F_X)(t)$. Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = d(t) + (d * m)(t) = 2\,(m * F_X)(t) + 2\,(m * F_X * m)(t)$$

Από την ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$, γνωρίζουμε ότι

$$m(t) = F_X(t) + (m * F_x)(t) \Rightarrow (m * F_X)(t) = m(t) - F_X(t),$$

οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}h(t) &= 2\,(m(t) - F_X(t)) + 2\,((m - F_X) * m)(t) \\ &= 2\,m(t) - 2\,F_X(t) + 2\,(m * m)(t) - 2\,(F_X * m)(t) \\ &= 2\,m(t) - 2\,F_X(t) + 2\,(m * m)(t) - 2\,(m(t) - F_X(t))\end{aligned}$$

και, άρα, $h(t) = 2\,(m * m)(t), \;\; t \geq 0.$ □

Κεφάλαιο 3

Διαδικασία Poisson

Άσκηση 3.1 *Έστω* $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ *μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ. *Να υπολογιστεί η μέση τιμή*

$$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)].$$

Λύση:

Η $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ είναι διαδικασία Poisson, άρα $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, για κάθε $t \geqslant 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)] = P_{N(t)}^{(k)}(1)$$

και $P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$, άρα $P_{N(t)}^{(k)}(z) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t(1-z)}$, οπότε

$$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)] = P_{N(t)}^{(k)}(1) = (\lambda t)^k.$$

$\square$

Άσκηση 3.2 *Έστω* $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ *μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* λ. *Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση*

$$Cov[N(t), N(s)].$$

Λύση:

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $s = t$, τότε

$$Cov[N(t), N(s)] = Cov[N(t), N(t)] = Var[N(t)] = \lambda t,$$

  διότι $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$, για κάθε $t \geqslant 0$.

- Αν $s < t$, τότε $N(t) = N(s) + N(t-s)$ (προκύπτει άμεσα αν σκεφτούμε ότι η $\{N(t)\}$ "μετράει" πλήθος γεγονότων), οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} Cov[N(t), N(s)] &= Cov[N(s) + N(t-s), N(s)] \\ &= Cov[N(s), N(s)] + Cov[N(t-s), N(s)] \\ &= Var[N(s)] + 0 = \lambda s, \end{aligned}$$

  διότι οι $N(t-s)$ και $N(s)$ είναι ανεξάρτητες, αφού η $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ έχει την ιδιότητα ανεξάρτητων προσαυξήσεων ως διαδικασία Poisson, και επομένως $Cov[N(t-s), N(s)] = 0$.

- Αν $t < s$, εντελώς συμμετρικά βρίσκουμε ότι

$$Cov[N(t), N(s)] = \lambda t.$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$Cov[N(t), N(s)] = \lambda \cdot \min\{t, s\}.$$

Σημείωση: Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο μεγάλο χρονικό διάστημα κι αν έχει παρέλθει η συνδιακύμανση εξαρτάται μόνο από τη μικρότερη χρονική στιγμή! □

Άσκηση 3.3 *Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t)$ είναι περιττός$)$, $t \geq 0$.*

Λύση:
Έστω $t \geq 0$. Χρησιμοποιώντας ότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, έχουμε ότι

$$P(N(t) \text{ είναι περιττός}) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t) = 2n+1] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Θεωρούμε τα αθροίσματα $A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ και $B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Παρατηρούμε ότι

$$A + B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

και

$$A - B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x}$$

Προσθέτοντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε ότι $2A = e^x + e^{-x} \Rightarrow A = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Επιστρέφουμε στο αρχικό μας πρόβλημα και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(N(t) \text{ είναι περιττός}) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \\ &= 1 - \frac{1 + e^{-2\lambda t}}{2} = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3.4 *Υποθέτουμε ότι πελάτες φθάνουν σε μία τράπεζα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό* 8 *πελάτες την ώρα. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:*
1. Η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της τράπεζας.
2. Η πιθανότητα κανείς πελάτης να μην μπει στην τράπεζα τα τελευταία 15 *λεπτά μιας εργάσιμης μέρας.*
3. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 *και* 11.00 *και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την ίδια μέρα μεταξύ* 10.00 *και* 11.00.
4. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 *και* 11.00 *και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την επόμενη μέρα μεταξύ* 10.00 *και* 11.00.

Λύση:
Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ η διαδικασία Poisson ρυθμού 8 που περιγράφει τη διαδικασία αφίξεων των πελατών στην τράπεζα. Η χρονική μονάδα που χρησιμοποιούμε εδώ είναι η 1 ώρα.

1. Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, άρα εδώ έχουμε $N(8) \sim \text{Poisson}(64)$, οπότε $E[N(8)] = Var[N(8)] = 64$.

2. Έστω p_1 η ζητούμενη πιθανότητα. Από την ιδιότητα ομογενών και ανεξάρτητων προσαυξήσεων της διαδικασίας Poisson, μπορούμε να πούμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με την πιθανότητα να μην μπει πελάτης στα πρώτα 15 λεπτά μιας εργάσιμης

μέρας, δηλαδή
$$p_1 = Pr\Big[\underbrace{N\left(\frac{1}{4}\right)}_{\text{Poisson}(8\cdot 1/4)} = 0\Big] = e^{-2}\cdot\frac{2^0}{0!} = \frac{1}{e^2}.$$

3. Θεωρούμε ως αρχή του χρόνου την ώρα 9.00, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
Cov[N(2), N(2)-N(1)] &= Cov[(N(2)-N(1)) + N(1), N(2)-N(1)] \\
&= \underbrace{Cov[N(2)-N(1), N(2)-N(1)]}_{Var[N(2)-N(1)]} + \underbrace{Cov[N(1), N(2)-N(1)]}_{0,\,\text{ως ανεξάρτητα}} \\
&= Var[N(2)-N(1)] = Var[\underbrace{N(1)}_{\text{Poisson}(8)}] = 8,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις της διαδικασίας Poisson $\{N(t)\}$.

4. Τα ενδεχόμενα που έχουμε αναφέρονται σε ξένα μεταξύ τους διαστήματα και, άρα, από τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις της $\{N(t)\}$, συμπεραίνουμε ότι είναι ανεξάρτητα, οπότε η ζητούμενη συνδιακύμανση ισούται με 0. □

Άσκηση 3.5 *Θεωρούμε $\{N_1(t):\ t\geq 0\}$ και $\{N_2(t):\ t\geq 0\}$ δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω A_i να είναι ο αριθμός των γεγονότων στη διαδικασία $\{N_i(t)\}$ πριν το πρώτο γεγονός στην άλλη διαδικασία, $i = 1, 2$.*
1. Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις πιθανότητας των A_i, $i = 1, 2$.
2. Να εξεαστεί αν οι A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητες.

Λύση:
1. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Το ενδεχόμενο $\{A_1 = k\}$ ισούται με το ενδεχόμενο στην υπέρθεση των $\{N_1(t):\ t\geq 0\}$ και $\{N_2(t):\ t\geq 0\}$ τα πρώτα k το πλήθος γεγονότα να οφείλονται στην $\{N_1(t)\}$, καθένα από τα οποία συμβαίνει με ρυθμό $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, και το επόμενο στην $\{N_2(t)\}$, το οποίο συμβαίνει με ρυθμό $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$. Επομένως,

$$Pr[A_1 = k] = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Ακριβώς με το ίδιο σκεπτικό, βρίσκουμε ότι

$$Pr[A_2 = k] = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

2. Παρατηρούμε ότι $Pr[A_1 = 1, A_2 = 2] = 0$, ενώ $Pr[A_1 = 1] \cdot Pr[A_2 = 2] > 0$, αφού $Pr[A_1 = 1] > 0$ και $Pr[A_2 = 2] > 0$, οπότε οι A_1 και A_2 δεν είναι ανεξάρτητες. $\square$

Άσκηση 3.7 *Έστω δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$, με ρυθμούς λ_1 και λ_2, αντίστοιχα. Έστω, επίσης, $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $Pr[N_1(t) = k \mid N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της $N_1(t)$ δεδομένου του ότι $N(t) = n$; Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;*

Λύση:
Έστω $0 \leq k \leq n$. Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
Pr[N_1(t) = k \mid N(t) = n] &= \frac{Pr[N_1(t) = k, N_1(t) + N_2(t) = n]}{Pr[N(t) = n]} \\
&= \frac{Pr[N_1(t) = k, N_2(t) = n - k]}{Pr[N(t) = n]} \\
&= \frac{Pr[\underbrace{N_1(t)}_{\text{Poisson}(\lambda_1 t)} = k] \cdot Pr[\underbrace{N_2(t)}_{\text{Poisson}(\lambda_2 t)} = n - k]}{Pr[\underbrace{N(t)}_{\text{Poisson}((\lambda_1+\lambda_2)t)} = n]} \\
&= \frac{\exp\{-\lambda_1 t\} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \exp\{-\lambda_2 t\} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}}{\exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\} \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)\, t]^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η δεσμευμένη κατανομή της $N_1(t)$ δεδομένου του ότι $N(t) = n$ είναι διωνυμική $\text{Bin}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$. Διαισθητικά, αυτό είναι λογικό: στην υπέρθεση συμβαίνουν γεγονότα της $\{N_1(t)\}$ με ρυθμό $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, άρα για μία δεδομένη χρονική στιγμή βλέπουμε το ενδεχόμενο να έχουν συμβεί k γεγονότα της $\{N_1(t)\}$ δεδομένου ότι έχουν συμβεί n γεγονότα συνολικά, ως το ενδεχόμενο να έχουν συμβεί k επιτυχίες σε n δοκιμές με πιθανότητα κάθε επιτυχίας $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. $\square$

Άσκηση 3.8 Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson(λ) και X μία τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της $\{N(t)\}$, με κατανομή Exp(μ). Έστω N το πλήθος των γεγονότων της $\{N(t)\}$ στο (τυχαίο) διάστημα $[0, X]$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της N. Τι κατανομή είναι;

Λύση:

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ζητείται η $Pr[N(X) = n]$. Εφόσον μέσα στην N εμφανίζεται το στοχαστικό κομμάτι X, χρησιμοποιούμε Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (στη συνεχή περίπτωση) και έχουμε:

$$\begin{aligned} Pr[N(X) = n] &= \int_0^\infty Pr[N(X) = n \mid X = x]\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty Pr[N(x) = n \mid X = x]\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty Pr[\underbrace{N(x)}_{Poisson(\lambda x)} = n]\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} \mu e^{-\mu x}\, dx \\ &= \frac{\mu \lambda^n}{n!} \int_0^\infty x^n\, e^{-(\lambda+\mu)x}\, dx, \end{aligned}$$

όπου η αφαίρεση της δέσμευσης στην τρίτη ισότητα προέκυψε από την ανεξαρτησία της X και της $\{N(t)\}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα θυμίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Gamma($n+1, \lambda+\mu$). Την εμφανίζουμε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας κατάλληλα:

$$\begin{aligned} Pr[N(X) = n] &= \frac{\mu \lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{(\lambda+\mu)^{n+1}} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{(\lambda+\mu)^{n+1}}{n!} x^{(n+1)-1}\, e^{-(\lambda+\mu)x}}^{\text{Gamma}(n+1\,,\,\lambda+\mu)}\, dx}_{1} \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n, \end{aligned}$$

δηλαδή η κατανομή της $N(X)$ είναι γεωμετρική Geom $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$.

Σημείωση: Διαισθητικά, το παραπάνω αποτέλεσμα είναι λογικό. Εφόσον από υπόθεση $X \sim Exp(\mu)$, σκεφτόμαστε να θεωρήσουμε την X ως τον χρόνο του πρώτου γεγονότος μία στοχαστικής διαδικασίας Poisson, έστω $\{M(t)\}$, ρυθμού μ, και να μεταφέρουμε το ερώτημα στην υπέρθεση των $\{N(t)\}$ και $\{M(t)\}$. Τότε, η πιθανότητα $Pr[N(X) = n]$ ισούται με την πιθανότητα, στην υπέρθεση των $\{N(t)\}$ και $\{M(t)\}$ τα πρώτα n γεγονότα να είναι της $\{N(t)\}$, καθένα από τα οποία συμβαίνει με ρυθμό $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ και το επόμενο να είναι της $\{M(t)\}$, το οποίο συμβαίνει με ρυθμό $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Το ενδεχόμενο $\{N(X) = n\}$ δηλαδή μεταφράζεται ως ενδεχόμενο πλήθους αποτυχιών ως την πρώτη επιτυχία, με πιθανότητα επιτυχίας κάθε φορά $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, από όπου τελικά προκύπτει η γεωμετρική κατανομή Geom $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$ που πήραμε με τους υπολογισμούς. $\square$

Άσκηση 3.9 *Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson και $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t, δηλαδή η $E[S_{N(t)}]$.*

Λύση:
Παρατηρούμε ότι στη ζητούμενη μέση τιμή εμφανίζεται το στοχαστικό κομμάτι $N(t)$. Αυτό μας παραπέμπει κατευθείαν σε Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής:

$$\begin{aligned}
E[S_{N(t)}] &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(E[S_{N(t)} \mid N(t)=n]\cdot Pr[N(t)=n]\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(E[S_n \mid N(t)=n]\cdot Pr[N(t)=n]\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(E[U_{n:n}]\cdot Pr[N(t)=n]\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{nt}{n+1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\Big(\lambda t - (1-e^{-\lambda t})\Big) = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda},
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα Campbell και με $U_{n:n}$ συμβολίζουμε τη n-οστή διατεταγμένη ομοιόμορφη από τις n το πλήθος $\text{Uniform}(0,1)$. $\square$

Άσκηση 3.10 *Έστω $\{N(t)\}$ μία διαδικασία Poisson και S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_1 \mid N(t)\geq 1]$.*

Λύση:
Η έκφραση στην εκφώνηση μας παραπέμπει στο Θεώρημα Campbell, μόνο που αντί για ανισότητα θα θέλαμε ισότητα στη συνθήκη $N(t)\geq 1$. Επομένως, η φυσιολογική σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουμε Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής, παίρνοντας ότι

$$E[S_1 \mid N(t)\geq 1] = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(E[S_1 \mid N(t)\geq 1, N(t)=n]\cdot Pr[N(t)=n \mid N(t)\geq 1]\Big)$$

και να κάνουμε τις πράξεις. Ωστόσο, υπάρχει ένας αρκετά πιο σύντομος τρόπος. Διαμερίζοντας στα ενδεχόμενα $\{N(t) = 0\}$ και $\{N(t) \geq 1\}$, παίρνουμε ότι

$$E[S_1] = E[S_1 \mid N(t) = 0] \cdot Pr[N(t) = 0] + E[S_1 \mid N(t) \geq 1] \cdot Pr[N(t) \geq 1] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} + E[S_1 \mid N(t) \geq 1] \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow$$

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = \frac{\frac{1}{\lambda} - \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}}.$$

$\square$

Κεφάλαιο 4

Ανανεωτικές Διαδικασίες με Κόστη

Άσκηση 4.1 *Σε μια στάση λεωφορείων φθάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Η εταιρεία που εξυπηρετεί τη συγκεκριμένη στάση έχει δύο τύπους λεωφορείων, απλά και φυσούνες, που περνούν εναλλάξ από τη στάση. Ο χρόνος από την αναχώρηση απλού λεωφορείου μέχρι την άφιξη φυσούνας είναι x χρονικές μονάδες, ενώ ο χρόνος από την αναχώρηση φυσούνας μέχρι την άφιξη απλού λεωφορείου είναι y χρονικές μονάδες. Το κόστος ανά επίσκεψη στη στάση απλού λεωφορείου είναι K_1 και το κόστος ανά επίσκεψη φυσούνας είναι K_2. Το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά χρονική μονάδα είναι h. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους και να βρεθούν οι τιμές των x και y που τον ελαχιστοποιούν.*

Λύση:
Στα προβλήματα με κόστη συνήθως ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Μοντελοποίηση
- Επαλήθευση ορισμού
- Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη
- Βελτιστοποίση

Ξεκινάμε από τη μοντελοποίηση, που είναι ένα από τα σημαντικότερα κομμάτια και συχνά προκαλεί δυσκολία. Στα προβλήματα με κόστη ένα σημαντικό κομμάτι της μοντελοποίησης είναι να καθορίσουμε ποια ανανεωτική διαδικασία βρίσκεται από κάτω, δηλαδή ποιες στιγμές θα θεωρούμε ως στιγμές ανανέωσης. Επειδή αυτοί οι ενδιάμεσοι χρόνοι θέλουμε να είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι, εδώ διαλέγουμε ως ενδιάμεσο χρόνο τον χρόνο που χρειάζεται για να περάσει ένα απλό λεωφορείο και μία φυσούνα (χρόνος $x + y$), παρ' όλο που ίσως μία λογική σκέψη αρχικά θα ήταν να μελετάμε για κάθε λεωφορείο χωριστά.

Έστω $\{A(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία αφίξεων των επιβατών στη στάση. Από υπόθεση, η $\{A(t)\}$ είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Έστω $\{C(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία που μετράει το κόστος τη χρονική στιγμή t, και $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία που τη στιγμή t εκφράζει το πλήθος των φορών που έχουν περάσει από τη στάση ένα απλό λεωφορείο και μία φυσούνα, για την οποία θεωρούμε ενδιάμεσους χρόνους $X_1 = X_2 = \cdots = x+y$ και χρόνους ανανέωσης $S_n = n(x+y),\ n \in \mathbb{N}$. Στον n-οστό κύκλο, για το κόστος C_n έχουμε

$$C_n = \underbrace{K_1}_{\text{κόστος απλού}} + \underbrace{K_2}_{\text{κόστος φυσούνας}} + \underbrace{h\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i})}_{\text{κόστος αναμονής}} + \underbrace{h\sum_{j=A_n(x)+1}^{A_n(x+y)}(y - S_{n,j})}_{\text{κόστος αναμονής}},$$

όπου $S_{n,i}$ η στιγμή άφιξης του i-οστού πελάτη στον n-οστό κύκλο. Παρατηρούμε ότι τα $C_n,\ n = 1,2,\ldots$, εξαρτώνται από την $\{A(t)\}$ στα ξένα και ισομήκη διαστήματα $((n-1)(x+y), n(x+y)]$, συνεπώς από τις ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις της διαδικασίας Poisson $\{A(t)\}$ έπεται ότι οι $(X_n, C_n),\ n \in \mathbb{N}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επίσης, $E[X_n] = x + y < \infty$ και

$$\begin{aligned} E[C_n] &= E\left[K_1 + K_2 + h\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i}) + h\sum_{j=1}^{A_n(y)}(y - S_{n,j})\right] \\ &= K_1 + K_2 + h\,E\left[\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i})\right] + h\,E\left[\sum_{j=1}^{A_n(y)}(y - S_{n,j})\right]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i})\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i})\middle|A_n(x) = k\right]\cdot Pr[A_n(x) = k]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=1}^{k}(x - S_{n,i})\middle|A_n(x) = k\right]\cdot Pr[A_n(x) = k]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=1}^{k}(x - U_{i,k})\right]\cdot Pr[A_n(x) = k]\right), \end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα Campbell και με $U_{i,k}$ συμβολίζουμε τη διατεταγμένη i-οστή από k ομοιόμορφες κατανομές Uniform$(0,1)$. Άρα,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i})\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(kx - \frac{x}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}\right)Pr[A_n(x) = k] \\ &= \frac{x}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Big(k\cdot Pr[A_n(x) = k]\Big) = \frac{x}{2}\lambda x = \frac{\lambda x^2}{2}. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$E\left[\sum_{i=A_n(x)+1}^{A_n(x+y)} (y - S_{n,i})\right] = \frac{\lambda y^2}{2},$$

οπότε

$$\begin{aligned} E[C_n] &= K_1 + K_2 + h\,E\left[\sum_{i=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,i})\right] + h\,E\left[\sum_{j=1}^{A_n(y)} (y - S_{n,j})\right] \\ &= K_1 + K_2 + \frac{\lambda h(x^2+y^2)}{2} < \infty \end{aligned}$$

και άρα το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη (ΣΑΘΚ) είναι εφαρμόσιμο. Αν συμβολίσουμε με $c(x,y)$ τον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό κόστους, από το ΣΑΘΚ παίρνουμε ότι

$$c(x,y) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} = \frac{K_1+K_2}{x+y} + \frac{h\lambda}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Τώρα μένει το κομμάτι της βελτιστοποίησης, δηλαδή να βρεθούν οι τιμές των x και y που ελαχιστοποιούν την $c(x,y)$. Έχουμε ότι

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{h\lambda y^2 + K_1 + K_2}{(x+y)^2} = \frac{h\lambda}{2}$$

και, λόγω συμμετρίας,

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{h\lambda x^2 + K_1 + K_2}{(x+y)^2} = \frac{h\lambda}{2},$$

άρα $x = y$ και

$$\frac{h\lambda y^2 + K_1 + K_2}{(x+y)^2} = \frac{h\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{h\lambda x^2 + K_1 + K_2}{4x^2} = \frac{h\lambda}{2} \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{h\lambda}},$$

οπότε παίρνουμε τις τιμές $x^* = y^* = \sqrt{\dfrac{K_1+K_2}{h\lambda}}$. □

Άσκηση 4.2 *Πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα, σύμφωνα με διαδικασία Poisson(λ), και ζητάνε ένα συγκεκριμένο προϊόν. Το αρχικό απόθεμα του προϊόντος στο κατάστημα είναι S. Κάθε πελάτης που φθάνει στο κατάστημα ικανοποιείται άμεσα αν υπάρχει απόθεμα προϊόντος, αλλιώς χάνεται. Μόλις το απόθεμα του καταστήματος εξαντληθεί, το κατάστημα παραγγέλνει S μονάδες προϊόντος από τον προμηθευτή του, οι οποίες του παραδίδονται μετά από τυχαίο χρόνο με μέση τιμή L. Υποθέτουμε ότι το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα στο κατάστημα είναι h. Το κόστος αγοράς ενός προϊόντος από το κατάστημα είναι c και η τιμή πώλησης είναι p. Το κόστος διεκπεραίωσης μίας παραγγελίας είναι d ανεξάρτητα από το μέγεθός της. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του καταστήματος.*

Λύση:
Έστω $\{A(t) : t \geqslant 0\}$ η στοχαστική διαδικασία Poisson ρυθμού λ που περιγράφει τη διαδικασία άφιξης των πελατών στο κατάστημα. Έστω $\{N(t) : t \geqslant 0\}$ η αναγεννητική διαδικασία που περιγράφει το μέγεθος του αποθέματος στο κατάστημα τη στιγμή t, με στιγμές αναγέννησης τις στιγμές που παραδίδονται οι μονάδες προϊόντος από την παραγγελία, και $\{C(t) : t \geqslant 0\}$ η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το κέρδος του καταστήματος τη στιγμή t. Ονομάζουμε X_n τη διάρκεια του n-οστού κύκλου της αναγεννητικής διαδικασίας $\{N(t)\}$, $Y_{n,i}$ τη στιγμή άφιξης του i-οστού πελάτη κατά τον n-οστό κύκλο λειτουργίας του καταστήματος, για $i = 1, \ldots, S$, και C_n το κέρδος του καταστήματος στον n-οστό κύκλο. Εφόσον ζητείται κέρδος, βάζουμε αρνητικό πρόσημο όπου έχουμε δεδομένο για κόστος, οπότε έχουμε ότι

$$C_n = \underbrace{-h \cdot \sum_{i=1}^{S} (S - i + 1)\, Y_{n,i}}_{\text{κέρδος αποθήκευσης}} + \underbrace{p \cdot S}_{\text{κέρδος από πώληση}} + \underbrace{(-c \cdot S)}_{\text{κέρδος αγοράς}} + \underbrace{(-d)}_{\text{παραγγελία}}$$

άρα το C_n εξαρτάται από τις $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,s}$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες αφού η $\{A(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson. Έπεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές (X_n, C_n), $n \geqslant 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επίσης, $E[X_n] = S \cdot \dfrac{1}{\lambda} + L < \infty$ και

$$\begin{aligned} E[C_n] &= (p - c) \cdot S - d - h \cdot \sum_{i=1}^{S} (S - i + 1)\, E[Y_n] \\ &= (p - c) \cdot S - d - h \cdot \sum_{i=1}^{S} (S - i + 1) \frac{1}{\lambda} \\ &= (p - c) \cdot S - d - h \cdot \frac{S(S + 1)}{2\lambda} < \infty, \end{aligned}$$

οπότε εφαρμόζεται το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη και παίρνουμε ότι

$$c = \lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} = \frac{(p - c)S - d - h\frac{S(S+1)}{2}}{\frac{S}{\lambda} + L},$$

όπου c ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του καταστήματος. □

Άσκηση 4.5 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ) και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του έχει κατανομή $F_X(x)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο* *αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.*

Λύση:
(*Μοιάζει πολύ με το παράδειγμα της εναλλασσόμενης ανανεωτικής διαδικασίας*)
Έστω $\{I(t):\ t \geqslant 0\}$ αναγεννητική διαδικασία με

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος τη στιγμή t} \\ 0, & \text{αν ο υπηρέτης είναι ελεύθερος τη στιγμή t} \end{cases}$$

με στιγμές αναγέννησης, S_n, τις στιγμές που αρχίζει να εξυπηρετείται πελάτης. Ονομάζουμε X_n τον χρόνο που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος κατά τον n-οστό κύκλο και Y_n τον χρόνο που είναι ελεύθερος. Έστω c το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών. Έχουμε ότι

$$c = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t I(u)du\right]}{t}.$$

Η παραπάνω έκφραση μας θυμίζει τη μορφή $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E[C(t)]}{t}$, που εμφανίζεται στο ΣΑΘΚ. Σκεφτόμαστε, λοιπόν, να θεωρήσουμε μία στοχαστική διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$, με $C(t) = \int_0^t I(u)du$, που εκφράζει τον συνολικό χρόνο στο $[0, t]$ που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος και άρα δημιουργούνται "χαμένοι" πελάτες.

Σημείωση: *Να τονιστεί ότι μία δομή κόστους δεν αναφέρεται απαραίτητα σε χρηματικές μονάδες. Το ΣΑΘΚ εφαρμόζεται για ποσότητες οι οποίες συσσωρεύονται στον χρόνο. Εδώ η δομή κόστους αναφέρεται σε ποσοστό χρόνου.*

Στον n-οστό κύκλο έχουμε ότι

$$C_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} I(u)\,du = \int_{S_{n-1}}^{X_n} du = X_n - S_{n-1},$$

άρα οι $(X_n, C_n),\ n \geqslant 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Έχουμε ότι

$$E[X_n + Y_n] = E[X] + \frac{1}{\lambda} < \infty \quad \text{και} \quad E[C_n] < \infty.$$

Εφαρμόζεται, λοιπόν, το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη. Έχουμε:

$$c = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t I(u)du\right]}{t} = \frac{E[C_1]}{E[S_1]} = \frac{E\left[\int_0^{S_1} I(u)\,du\right]}{E[X] + \frac{1}{\lambda}} = \frac{E\left[\int_0^{X_1} 1du\right]}{E[X] + \frac{1}{\lambda}} = \frac{E[X]}{E[X] + \frac{1}{\lambda}},$$

όπου $X \sim F_X(x)$ η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης. □

Άσκηση 4.6 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_A(x)$ και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του είναι Exp (μ). Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.*

Λύση:
Δουλεύουμε ακριβώς όπως στην προηγούμενη άσκηση. Έστω $\{I(t) : t \geqslant 0\}$ αναγεννητική διαδικασία με

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος τη στιγμή t} \\ 0, & \text{αν ο υπηρέτης είναι ελεύθερος τη στιγμή t} \end{cases}$$

με στιγμές αναγέννησης, S_n, τις στιγμές που αρχίζει να εξυπηρετείται πελάτης. Ονομάζουμε X_n τον χρόνο που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος κατά τον n-οστό κύκλο και Y_n τον χρόνο που είναι ελεύθερος. Έστω c το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών. Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία κόστους $\{C(t)\}$, με $C(t) = \int_0^t I(u)\,du$. Εφαρμόζουμε το Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη:

$$c = \lim_{t\to\infty} \frac{E\Big[\int_0^t I(u)du\Big]}{t} = \frac{E[C_1]}{E[S_1]} = \frac{E\Big[\int_0^{S_1} I(u)\,du\Big]}{E[X] + \frac{1}{\mu}} = \frac{E\Big[\int_0^{X_1} 1du\Big]}{E[X] + \frac{1}{\mu}} = \frac{\frac{1}{\mu}}{E[X] + \frac{1}{\mu}},$$

όπου $X \sim F_A(x)$ η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων πελατών. □

Κεφάλαιο 5

Ουρές Αναμονής

Άσκηση 5.1 *Θεωρήστε μια $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 5 πελάτες την ώρα και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης ανά πελάτη 78 λεπτά.*
1. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών c που χρειάζεται για να είναι το σύστημα ευσταθές (δηλαδή να μην απειρίζεται η ουρά);
2. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών που χρειάζεται αν η εργατική νομοθεσία επιβάλλει κάθε υπηρέτης να είναι απασχολημένος το πολύ το 80% του χρόνου του;

Λύση:
1. Υποθέτουμε ότι μετράμε τον χρόνο σε λεπτά, οπότε $\lambda = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$, $b = 78$ και $\rho = \lambda b = \frac{1}{12} \cdot 78 = 6.5$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η ουρά ευσταθής είναι $\rho < c \Leftrightarrow c > 6.5$, οπότε ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών c που χρειάζεται για να είναι το σύστημα ευσταθές είναι 7.

2. Το ποσοστό απασχόλησης ενός υπηρέτη στην $M/M/c$ ουρά ισούται με $\frac{\rho}{c}$, οπότε έχουμε

$$\frac{\rho}{c} \leqslant 0.8 \Leftrightarrow c \geqslant \frac{\rho}{0.8} = \frac{6.5}{0.8} = 8.125,$$

οπότε ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών που χρειάζεται αν η εργατική νομοθεσία επιβάλλει κάθε υπηρέτης να είναι απασχολημένος το πολύ το 80% του χρόνου του είναι 9. □

Άσκηση 5.2 *Να βρείτε τις οριακές κατανομές (p_n), (α_n) και (d_n) των αριθμών των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων, αντίστοιχα, σε μια ευσταθή $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, χρησιμοποιώντας τον νόμο του Little και την ιδιότητα PASTA. Για τον σκοπό αυτό θεωρήστε ως 'σύστημα' την i θέση του συστήματος εξυπηρέτησης για $i = 1, 2, \ldots$.*

Λύση:

Εφόσον οι αφίξεις συμβαίνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson, από την ιδιότητα PASTA ισχύει ότι $(p_n) \stackrel{d}{=} (\alpha_n)$. Επίσης, από την ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων, παίρνουμε ότι $(d_n) \stackrel{d}{=} (\alpha_n)$, οπότε $(p_n) \stackrel{d}{=} (\alpha_n) \stackrel{d}{=} (d_n)$ και άρα αρκεί να βρούμε την (p_n). Θα δουλέψουμε με τον νόμο του Little. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει πρώτα να καθορίσουμε σε ποιο υποσύστημα του αρχικού μας θα δουλέψουμε (ενδέχεται να είναι και το αρχικό φυσικά). Εδώ, θεωρούμε ως σύστημα την i θέση του συστήματος εξυπηρέτησης για $i = 1, 2, \ldots$. Από τον νόμο του Little, ισχύει ότι

$$E\big[Q^{(i)}\big] = \lambda^{(i)} \cdot E[S^{(i)}],$$

όπου με $E[Q^{(i)}]$ συμβολίζουμε το μέσο πλήθος πελατών στην i θέση, με $\lambda^{(i)}$ τον ρυθμό άφιξης πελατών στην i θέση και με $E[S^{(i)}]$ τον μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στην i θέση. Το σημαντικό είναι να προσδιορίσουμε σωστά τις τρεις αυτές ποσότητες. Τις μελετάμε ξεχωριστά:

- $E[S^{(i)}]$

  Αν ένας πελάτης βρεθεί στην i θέση, τότε ο μέσος χρόνος παραμονής του σε αυτήν ισούται με τον μέσο υπολειπόμενο χρόνο εξυπηρέτησης του εξυπηρετούμενου πελάτη (αφού μόλις εκείνος τελειώσει την εξυπηρέτησή του, όλοι θα μετακινηθούν κατά μία θέση). Όμως, ο χρόνος εξυπηρέντσης ακολουθεί Exp(μ) κατανομή και από την αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής έπεται ότι ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησής του ισούται με $\frac{1}{\mu}$, οπότε και $E[S^{(i)}] = \frac{1}{\mu}$.

- $\lambda^{(i)}$

  Για να βρεθεί ένας πελάτης στην i θέση, πρέπει κατά την άφιξή του να βρει τουλάχιστον $i-1$ το πλήθος πελάτες στο σύστημα. Αν με α_k συμβολίσουμε την πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να δει k το πλήθος πελάτες, τότε ο ρυθμός άφιξης πελατών στην i θέση ισούται με τον ρυθμό άφιξης πελατών στο σύστημα (λ) επί την πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να βρει τουλάχιστον $i-1$ το πλήθος πελάτες στο σύστημα, δηλαδή $\lambda^{(i)} = \lambda \cdot \sum_{k=i-1}^{\infty} \alpha_k$.

- $E[Q^{(i)}]$

  Παρόμοια με πριν, σκεφτόμαστε ότι στην i θέση μπορεί να βρίσκεται το πολύ ένας πελάτης. Για να βρίσκεται πελάτης, πρέπει στο σύστημα να υπάρχουν τουλάχιστον i το πλήθος πελάτες. Παίρνουμε, λοιπόν, ότι $E[Q^{(i)}] = 1 \cdot \sum_{k=i}^{\infty} p_k = \sum_{k=i}^{\infty} p_k$.

Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$E\big[Q^{(i)}\big] = \lambda^{(i)} \cdot E[S^{(i)}] \Rightarrow \sum_{k=i}^{\infty} p_k = \lambda \cdot \sum_{k=i-1}^{\infty} \alpha_k \cdot \frac{1}{\mu} \stackrel{\rho=\lambda/\mu}{\Rightarrow} \sum_{k=i}^{\infty} p_k = \rho \cdot \sum_{k=i-1}^{\infty} \alpha_k$$

Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson, οπότε από την ιδιότητα PASTA παίρνουμε ότι $\alpha_k = p_k$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots$, άρα η τελευταία σχέση δίνει

$$\sum_{k=i}^{\infty} p_k = \rho \cdot \sum_{k=i-1}^{\infty} p_k \tag{5.1}$$

Θέτοντας στην (5.1) όπου i το $i+1$, παίρνουμε

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} p_k = \rho \cdot \sum_{k=i}^{\infty} p_k \tag{5.2}$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις (5.2) και (5.1) κατά μέλη, προκύπτει ότι $p_i = \rho \cdot p_{i-1}$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots$, οπότε $p_i = \rho^i \cdot p_0$. Για να βρούμε το p_0 χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 \Rightarrow p_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow p_0 = 1 - \rho$$

Τελικά, παίρνουμε ότι

$$p_n = \alpha_n = d_n = (1-\rho) \cdot \rho^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

□

Άσκηση 5.3 *Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, στην $GI/GI/\infty$ ουρά με μέσο ενδιάμεσο χρόνο αφίξεων α και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b.*

Λύση:
Εφόσον το σύστημα έχει άπειρο πλήθος υπηρετών, όλοι οι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα, οπότε εφαρμόζουμε τον νόμο του Little με ρυθμό άφιξης πελατών $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$ και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $E[S] = b$. Έχουμε:

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S] = b \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{b}{\alpha}$$

Σημείωση: Με το ίδιο σκεπτικό, μπορούμε να δούμε άμεσα ότι σε μία ουρά με άπειρο πλήθος υπηρετών ισχύει ότι $E[Q] = \rho$, όπου ρ ο ρυθμός συνωστισμού. □

Άσκηση 5.4 *Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο τύπων, 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, ανεξαρτήτως τύπου,* *έχει Exp(μ) χρόνο εξυπηρέτησης. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ένας πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τύπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτηση και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον νεοαφιχθέντα πελάτη τύπου 1. Να βρεθούν οι μέσοι οριακοί αριθμοί πελατών τύπων 1 και 2, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$, αντίστοιχα.*

Λύση:
Το πρόβλημα απλοποιείται αρκετά από τη στιγμή που οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, καθώς τότε οι πελάτες τύπου 1 εξυπηρετούνται σύμφωνα με μία $\underbrace{M}_{\lambda_1}/M/1$ ουρά. Όλοι οι πελάτες μαζί διαμορφώνουν μία $\underbrace{M}_{\lambda_1+\lambda_2}/M/1$ ουρά. Αν λοιπόν βρούμε τον μέσο αριθμό πελατών, $E[Q]$, σε μία $\underbrace{M}_{\lambda}/\underbrace{M}_{\mu}/1$ ουρά, τότε έχουμε τελειώσει. Θα χρησιμοποιήσουμε ανάλυση μέσης τιμής. Από τον νόμο του Little, έχουμε

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S] \tag{5.3}$$

Δεσμεύοντας στο πλήθος Q^- των πελατών που βλέπει ένας αφικνούμενος πελάτης, έχουμε για τον μέσο χρόνο παραμονής πελάτη:

$$\begin{aligned} E[S] &= \sum_{n=0}^{\infty} Pr[Q^- = n]\, E[S \mid Q^- = n] = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[Q^- = n] \left(\underbrace{n \cdot \frac{1}{\mu}}_{n \text{ μπροστινοί}} + \underbrace{\frac{1}{\mu}}_{\text{αφικνούμενος}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\mu} Pr[Q^- = n] = \frac{E[Q^-]+1}{\mu} \overset{PASTA}{=} \frac{E[Q]+1}{\mu} \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση και την (5.3), χρησιμοποιώντας και ότι $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, παίρνουμε

$$E[Q] = \rho \cdot E[Q] + \rho \Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Επιστρέφοντας τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα, έστω $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu}$ και $\rho = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}$ οι ρυθμοί συνωστισμού της ουράς που σχηματίζουν οι πελάτες τύπου 1 και της ουράς που σχηματίζουν όλοι μαζί οι πελάτες, αντίστοιχα. Ισχύει ότι $E[Q_1] = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}$ και

$$E[Q_1 + Q_2] = \frac{\rho}{1-\rho} \Rightarrow E[Q_2] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$$

□

Άσκηση 5.9 *Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και Exp(μ) χρόνους εξυπηρέτησης, με αποθαρρυνόμενους πελάτες, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα q_n, με $q_0 = \frac{1}{4}$ και $q_n = \frac{3}{4}$ για $n \geq 1$. Να βρεθούν*
1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα
2. η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

Λύση:
1. Πρώτα πρέπει να σχεδιάσουμε τον πίνακα με τις καταστάσεις της $\{Q(t) : t \geq 0\}$ και τους ενδιάμεσους χρόνους. Η κυριότερη δυσκολία εδώ έγκειται στον προσδιορισμό της διαδικασίας αφίξεων. Αφού ένας πελάτης που βρίσκει $n \geqslant 1$ πελάτες κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $q_n = \frac{3}{4}$, εισέρχεται με πιθανότητα $\frac{1}{4}$. Ομοίως για την περίπτωση $n = 0$. Παίρνουμε, λοιπόν, τον ακόλουθο πίνακα:

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	Exp$\left(\frac{3\lambda}{4}\right)$
n⩾ 1	n+1	Exp$\left(\frac{\lambda}{4}\right)$
	n-1	Exp(μ)

Παρατηρούμε ότι όλοι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικοί, άρα η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Επίσης, η $\{Q(t)\}$ είναι τύπου γέννησης-θανάτου, οπότε η $M/M/c$ είναι Απλή Μαρκοβιανή Ουρά και, έτσι, η συνθήκη ευστάθειας θα βρεθεί από τον υπολογισμό της ποσότητας B^{-1}. Έχουμε:

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\frac{3\lambda}{4} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdots \frac{\lambda}{4}}^{n \text{ φορές}}}{\underbrace{\mu \cdot \mu \cdots \mu}_{n \text{ φορές}}} \overset{\rho=\lambda/\mu}{=} 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{4}\right)^n$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές αν, και μόνο αν,

$$\frac{\rho}{4} < 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \rho < 4$$

2. Υπό τη συνθήκη ευστάθειας, έχουμε ότι

$$B^{-1} = 1 + 3 \cdot \frac{\frac{\rho}{4}}{1 - \frac{\rho}{4}} = 1 + \frac{3\rho}{4-\rho} = \frac{4+2\rho}{4-\rho}$$

οπότε υπολογίζεται άμεσα η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο:

$$p_n = \begin{cases} B, & \text{αν } n = 0 \\ 3B \cdot \left(\frac{\rho}{4}\right)^n, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases},$$

δηλαδή

$$p_n = \begin{cases} \frac{4-\rho}{4+2\rho}, & \text{αν } n = 0 \\ 3 \cdot \frac{4-\rho}{4+2\rho} \cdot \left(\frac{\rho}{4}\right)^n, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}.$$

□

Άσκηση 5.10 *Θεωρούμε την $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και Exp(μ) χρόνους εξυπηρέτησης. Να βρεθούν*
1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα
2. η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

Λύση:
1. Πρώτα πρέπει να σχεδιάσουμε τον πίνακα με τις καταστάσεις της $\{Q(t) : t \geq 0\}$ και τους ενδιάμεσους χρόνους. Η κυριότερη δυσκολία εδώ έγκειται στον προσδιορισμό της διαδικασίας αναχωρήσεων. Εφόσον υπάρχουν c το πλήθος υπηρέτες, αν στο σύστημα βρίσκονται n το πλήθος πελάτες, με $n \geqslant c$, τότε ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί η $\{Q(t)\}$ στην κατάσταση $n-1$ είναι Exp$(c\mu)$, αφού στην ουσία ζητάμε τον ελάχιστο από c το πλήθος Exp(μ) χρόνους. Με την ίδια λογική, αν $1 \leqslant n \leqslant c-1$, απαιτείται Exp$(n\mu)$ χρόνος. Παίρνουμε, λοιπόν, τον ακόλουθο πίνακα:

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	Exp(λ)
n$\geqslant$ 1	n+1	Exp(λ)
	n-1	Exp$(\min(n,c) \cdot \mu)$

Παρατηρούμε ότι όλοι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικοί, άρα η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Επίσης, η $\{Q(t)\}$ είναι τύπου γέννησης-θανάτου, οπότε η $M/M/c$ είναι Απλή Μαρκοβιανή Ουρά και, έτσι, η συνθήκη ευστάθειας θα βρεθεί από τον υπολογισμό της ποσότητας B^{-1}. Έχουμε:

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdots \lambda}^{n \text{ φορές}}}{\mu \cdot 2\mu \cdots n\mu} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdots \lambda}^{n \text{ φορές}}}{\underbrace{\mu \cdot \mu \cdots \mu}_{n \text{ φορές}} \cdot c! \cdot c^{n-c}}$$

$$\stackrel{\rho=\lambda/\mu}{=} \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c! \cdot c^{n-c}} = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές αν, και μόνο αν,

$$\frac{\rho}{c} < 1 \ \Leftrightarrow \ \rho < c$$

2. Υπό τη συνθήκη ευστάθειας, έχουμε ότι

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \cdot \frac{c}{c-\rho}$$

οπότε υπολογίζεται άμεσα η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο:

$$p_n = \begin{cases} B \cdot \dfrac{\rho^n}{n!}, & \text{αν } 0 \le n \le c-1 \\ B \cdot \dfrac{\rho^c}{c!} \cdot \left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{n-c}, & \text{αν } n \ge c \end{cases}.$$

□

Άσκηση 5.11 *Θεωρούμε την $M/M/\infty$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και Exp(μ) χρόνους εξυπηρέτησης. Να βρεθούν*
1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα
2. η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

Λύση:
1. Εφόσον υπάρχουν άπειροι το πλήθος υπηρέτες, ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί η $\{Q(t)\}$ από την κατάσταση $n \geqslant 1$ στην κατάσταση $n-1$ ισούται με το minimum n το πλήθος Exp(μ) και άρα είναι Exp($n\mu$). Παίρνουμε, λοιπόν, τον πίνακα

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
0	1	Exp(λ)
n$\geqslant$ 1	n+1	Exp(λ)
	n-1	Exp($n\mu$)

Παρατηρούμε ότι όλοι οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι εκθετικοί, άρα η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Επίσης, η $\{Q(t)\}$ είναι τύπου γέννησης-θανάτου, οπότε η $M/M/c$ είναι Απλή Μαρκοβιανή Ουρά και, έτσι, η συνθήκη ευστάθειας θα βρεθεί από τον υπολογισμό της ποσότητας B^{-1}. Έχουμε:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\lambda \cdot \lambda \cdots \lambda}^{n \text{ φορές}}}{\mu \cdot 2\mu \cdots n\mu} \\ &\overset{\rho=\lambda/\mu}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty \end{aligned}$$

άρα το σύστημα είναι πάντα ευσταθές.

Σημείωση: Το αποτέλεσμα αυτό είναι διαισθητικά λογικό. Αν το σύστημα έχει άπειρους υπηρέτες, τότε πάντα μπορεί να προσαρμόζεται στο οποιοδήποτε πλήθος πελατών.

2. Για την κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο παίρνουμε άμεσα ότι

$$p_n = \begin{cases} B, & \text{αν } n = 0 \\ B \cdot \dfrac{\rho^n}{n!}, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases},$$

δηλαδή

$$p_n = \begin{cases} e^{-\rho}, & \text{αν } n = 0 \\ e^{-\rho} \cdot \dfrac{\rho^n}{n!}, & \text{αν } n \geq 1 \end{cases},$$

οπότε

$$p_n = e^{-\rho} \cdot \frac{\rho^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

□