

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Τελική εξέταση, 13 Ιουνίου 2017

Θέμα 1ο: Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο εξυπηρέτησης ενός νοσοκομείου φθάνουν ερωτήματα με ρυθμό 120 την ώρα. Κάθε ερώτημα μπορεί να είναι ιατρικής, οικονομικής ή διοικητικής φύσης με πιθανότητα 50%, 30% και 20% αντίστοιχα, ανεξάρτητα από τα άλλα ερωτήματα και παραπέμπεται αντίστοιχα στο τμήμα ιατρικής τηλεφωνικής υποστήριξης, στο λογιστήριο ή στη γραμματεία. Να υπολογιστούν:

- (1) η πιθανότητα σε 10 διαδοχικά ερωτήματα, τα 8 να είναι ιατρικής φύσης,
- (2) η δεσμευμένη πιθανότητα την πρώτη ώρα λειτουργίας του τηλεφωνικού κέντρου να υπάρχουν 50 ερωτήματα ιατρικής φύσης (και οποιοσδήποτε αριθμός ερωτημάτων οικονομικής ή διοικητικής φύσης), δεδομένου ότι τις πρώτες δυο ώρες λειτουργίας του τηλεφωνικού κέντρου υπάρχουν 80 ερωτήματα ιατρικής φύσης, 60 ερωτήματα οικονομικής φύσης και 35 ερωτήματα διοικητικής φύσης,
- (3) η πιθανότητα να συμβούν ακριβώς 10 ερωτήματα ιατρικής ή οικονομικής φύσης, μεταξύ 2 διαδοχικών ερωτημάτων διοικητικής φύσης,
- (4) ο ελάχιστος αριθμός ιατρών που πρέπει να στελεχώνουν το τμήμα ιατρικής τηλεφωνικής υποστήριξης ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές, αν κάθε ερώτημα ιατρικής φύσης απαιτεί κατά μέσο όρο 4 λεπτά για την διεκπεραίωσή του.

Θέμα 2ο: Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$ και ροπές r -τάξης ενδιάμεσων χρόνων $E[X^r] = \mu_r^r$, $r \geq 1$. Έστω επίσης $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη χρονική στιγμή t , δηλαδή ο χρόνος που απομένει μέχρι το επόμενο γεγονός.

- (1) Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος όρος της $\{B(t)\}$, δηλαδή το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t (B(u))^2 du \right]}{t},$$

χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές.

- (2) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} E[(B(t))^2]$, χρησιμοποιώντας το βασικό ανανεωτικό θεώρημα (δεν χρειάζεται να ελέγξετε ότι η συνάρτηση $D(t)$ του θεωρήματος γράφεται ως διαφορά δυο μη-αρνητικών, φθινουσών και φραγμένων συναρτήσεων).

Θέμα 3ο: Θεωρούμε μια μηχανή που έχει ανεξάρτητους εκθετικούς χρόνους ζωής O_1, O_2, \dots με παράμετρο λ . Η μηχανή αντικαθίσταται είτε όταν χαλάσει είτε όταν περάσει χρόνος s . Το κόστος αντικατάστασης είναι c_f αν η αντικατάσταση γίνει λόγω βλάβης ή c_p αν η αντικατάσταση γίνει προληπτικά μετά από χρόνο s . Οι χρόνοι που απαιτούνται για την αντικατάσταση της μηχανής είναι οι D_1, D_2, \dots . Ο χρόνος αντικατάστασης είναι ίσος με s_f αν η αντικατάσταση γίνει λόγω βλάβης ή s_p αν η αντικατάσταση γίνει προληπτικά μετά από χρόνο s . Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους στη μονάδα του χρόνου κάτω από τη συγκεκριμένη πολιτική αντικατάστασης.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε την $M/M/2$ ουρά, με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ , εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , 2 υπηρέτες, άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς την FCFS.

- (1) Να δοθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (p_n) , σε συνεχή χρόνο, όταν είναι ευσταθές.
- (2) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.
- (3) Να βρεθεί η μέση διάρκεια του κύκλου απασχόλησης του συστήματος, δηλαδή ο μέσος χρόνος από τη στιγμή που ένας πελάτης αναχωρεί αφήνοντας κενό το σύστημα μέχρι την επόμενη φορά που θα συμβεί αυτό.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!